



J. Korean Soc. Aeronaut. Space Sci. 50(8), 531-540(2022)

DOI: <https://doi.org/10.5139/JKSAS.2022.50.8.531>

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

IMM 필터를 이용한 장사정포의 탄종 분리 및 탄착점 예측 통합 알고리즘

정철구¹, 이창훈², 탁민제³, 유동길⁴, 손성환⁵

Integrated Algorithm for Identification of Long Range Artillery Type and Impact Point Prediction With IMM Filter

Cheol-Goo Jung¹, Chang-Hun Lee², Min-Jea Tahk³, Dong-Gil Yoo⁴ and Sung-Hwan Sohn⁵Department of Aerospace Engineering, Korea Advanced Institute of Science and Technology, Daejeon, Republic of Korea¹⁻³Radar R&D Lab, LIG Nex1, Yongin, Republic of Korea^{4,5}

ABSTRACT

In this paper, we present an algorithm that identifies artillery type and rapidly predicts the impact point based on the IMM filter. The ballistic trajectory equation is used as a system model, and three models with different ballistic coefficient values are used. Acceleration was divided into three components of gravity, air resistance, and lift. And lift acceleration was added as a new state variable. The kinematic condition that the velocity vector and lift acceleration are perpendicular was used as a pseudo-measurement value. The impact point was predicted based on the state variable estimated through the IMM filter and the ballistic coefficient of the model with the highest mode probability. Instead of the commonly used Runge-Kutta numerical integration for impact point prediction, a semi-analytic method was used to predict impact point with a small amount of calculation. Finally, a state variable initialization method using the least-square method was proposed. An integrated algorithm including artillery type identification, impact point prediction and initialization was presented, and the validity of the proposed method was verified through simulation.

초 록

본 논문에서는 IMM 필터 기반으로 장사정포의 탄종을 식별하고 탄착점을 신속하게 예측하는 알고리즘을 제시한다. 탄도궤적 방정식을 시스템 모델로 사용하고, 각각 다른 탄도계수 값을 갖는 3가지 모델을 IMM 필터에 적용한다. 가속도를 중력, 공기저항, 양력에 의한 3가지 성분으로 나누고 양력가속도를 새로운 상태변수로 추가하여 추정한다. 속도벡터와 양력가속도가 수직이라는 운동학 조건을 유사 측정값으로 추가한 측정방정식을 다룬다. IMM 필터를 통해 추정된 상태변수와 모드 확률이 가장 높은 모델의 탄도계수를 기반으로 탄착점을 예측한다. 탄착점 예측을 위해 일반적으로 사용되는 룬게-쿠타 수치적분 대신, 준해석적인 방법을 사용하여 적은 계산량으로 탄착점을 예측할 수 있음을 설명한다. 마지막으로 최소제곱법을 이용한 상태변수 초기화 방법에 대해 제안하고 성능을 확인하였다. 탄종식별, 탄착점 예측 및 초기화를 포함한 통합 알고리즘을 제시하고 시뮬레이션을 통해 제안한 방법의 타당성을 검증하였다.

Key Words : Interacting Multiple Model Filter(IMM 필터), Semi-Analytic Integration(준해석 적분), Ballistic Coefficients(탄도 계수), Kinematic-Constraint(운동학 구속조건)

† Received : March 16, 2022 Revised : July 2, 2022 Accepted : July 5, 2022

¹ Master Student, ² Associate Professor, ³ Professor, ⁴ Chief Research Engineer, ⁵ Senior Research Engineer

² Corresponding author, E-mail : lckdgn@kaist.ac.kr, ORCID 0000-0002-0758-1974

© 2022 The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences

I. 서 론

유도탄 및 탄도탄과 같은 기술집약적인 무기체계가 존재하는 현대전에서도 무유도 로켓을 사용하는 장사정포는 큰 위협이 되고 있다. 장사정포는 값이 저렴하며 대량공격이 가능하기 때문이다. 이에 대한 공격을 방어하기 위해서는 낮은 고도와 짧은 거리를 날아오는 장사정포의 탄종을 분리하고 신속하게 탄착점을 예측하는 것이 중요하다. 많은 수의 장사정포가 동시에 날아오는 경우 탄착점을 조기에 예측하고 사격통제 및 사격포대 할당을 통해 중요자산으로 탄착하는 표적을 우선적으로 요격해야 한다. 그러나 표적의 파라미터를 정확하게 알 수 없는 상황에서 미래 궤적과 탄착점을 예측하는 것은 매우 어렵다. 특히 기동을 하지 않는 장사정포의 경우 탄착점 예측을 위해 탄도계수가 가장 중요한 파라미터[1]이며, 탄종에 따라 서로 다른 값을 가진다. 장사정포 탄종에 따라 비행특성이 상이하기 때문에 탄종을 파악하면 조기에 표적 추적 정확도를 높일 수 있다. 따라서 다수의 탄종이 동시다발적으로 날아오는 경우 탄도계수에 따라 탄종을 신속하게 분리하는 것이 중요하다. 또한 필터를 통해 추정된 표적의 현재 위치, 속도 및 탄도계수를 근거로 탄착점을 빠른 시간 안에 계산해내는 수치기법이 요구된다.

그동안 탄착점 예측에 관한 연구들이 많이 수행되었다 [2-4]. 탄도계수를 상태변수 중 하나로 취급하여 상태변수를 추정하고 룽게-쿠타 수치적분을 통해 탄착점을 예측하는 방법이 존재한다[2]. 해당 논문에서는 다양한 필터의 탄착점 추정성능을 비교하였다. 문헌[3]에서는 룽게-쿠타 수치적분을 여러 차수와 적분간격에 대해 적용하여 탄착점 예측 정확도와 계산량을 비교하였다. 또한 비행단계를 추력 단계와 탄도비행단계 두 가지로 나누고 IMM(Interacting Multiple Model) 필터를 적용해 두 단계가 중첩되는 시점에서 탄착점을 예측하는 연구도 수행되었다[4]. 탄착점을 예측하기 위해서는 표적의 현재 상태변수를 예측하는 알고리즘이 필요하다. 추력단계와 비추력단계를 동특성으로 나눈 후 innovation sequence를 이용해 비행단계를 식별하여 상태변수를 추정하는 방식이 제안되었다[5]. 문헌[6]에서는 여러 가지 탄도계수 추정기반 알고리즘들의 표적추적 및 탄착점 예측성능을 비교하였다. 해당 논문에서는 IMM 필터가 다른 필터에 비해 상대적으로 성능이 우수함을 시뮬레이션을 통해 보여주었다.

기존의 연구는 탄종 분리와 탄착점 예측 알고리즘을 통합적으로 다루지 않았다. 또한 대부분의 문헌에서 탄착점을 예측할 때 계산량이 많이 필요한 룽게-쿠타 수치적분을 사용하였다. 이에 본 논문에서는 IMM 필터 기반으로 탄종을 식별하고 탄착점을 신속하게 예측하는 통합 알고리즘을 제시한다. 장사정포의 경우 추력 구간이 짧

기 때문에 비추력 구간의 탄도 방정식을 시스템 모델로 사용하였고, 각각 다른 탄도계수 값을 갖는 3가지 모델을 사용하였다. 가속도를 중력, 공기저항, 양력에 의한 3가지 성분으로 나누고 양력가속도를 새로운 상태변수로 추가하였고, 속도벡터와 양력가속도가 수직이라는 운동학 조건을 유사 측정값으로 사용하였다[7]. 또한 기존의 탄착점 예측 방법은 룽게-쿠타 수치적분을 적용하는데, 표적이 다수인 경우 각각의 탄착점을 예측하기 위해서는 많은 계산량이 요구된다. 따라서 실시간 적용을 위해서는 새로운 방법의 수치적분 알고리즘이 필요하다. 본 논문에서는 문헌[8]의 방법을 참고하여 계산량이 적게 요구되는 준해석적인 방법으로 탄착점을 예측하였다. 마지막으로 최소제곱법을 이용한 상태변수 초기화 방법에 대해 제안하였다. 탄종식별, 탄착점 예측 및 초기화를 포함한 통합 알고리즘을 제시하고 시뮬레이션을 통해 제안한 방법의 타당성을 검증하였다.

본 논문은 다음과 같이 구성되었다. 2절에서는 문제 정의 및 상태변수 추정 문제에 대해, 3절에서는 IMM 필터 알고리즘에 대해 서술하였다. 4절에서는 준해석적으로 빠르게 탄착점을 예측하는 방법을 기술하였다. 5절에서는 초기화 방법, 6절에서는 제안한 방법의 성능 평가를 위한 시뮬레이션 결과를 나타내었다. 마지막으로 7절에서 결론을 맺는다.

II. 상태변수 추정 알고리즘

2.1 동역학 모델

장사정포와 같은 로켓포는 짧은 추력 구간 이후에 탄도궤적으로 비행하며, 짧은 거리를 비행하기 때문에 평평한 지구를 가정하고 지구회전에 의한 영향을 무시할 수 있다. 상태변수는 식 (1)과 같이 레이더 위치를 원점으로 하는 NED(North-East-Down) 좌표계에서의 위치 (r_x, r_y, r_z) , 속도 (v_x, v_y, v_z) , 양력가속도 (a_{Lx}, a_{Ly}, a_{Lz}) 로 구성된다. 식 (2)에서 w 는 각 상태변수의 프로세스 노이즈를 의미한다. 위치의 변화율은 속도와 같으며, 이는 정확한 운동학적 관계이기 때문에 노이즈가 존재하지 않는다. 따라서 식 (2)의 처음 세 상태변수에 대한 프로세스 노이즈는 0의 값으로 설정되었다.

$$X = [r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z, a_{Lx}, a_{Ly}, a_{Lz}] \quad (1)$$

탄도계수 β 를 도입하여 식 (2)와 같이 동역학식을 탄도 방정식으로 모델링한다. 탄도계수는 $\beta = C_D S_{ref} / m$ 로 정의되며, 여기서 C_D, S_{ref}, m 은 각각 항력계수, 기준면적, 질량이다. 밀도와 중력가속도는 식 (3), (4)와 같이 NED 좌표계에서의 z 축 성분에 대한 함수로 모델링될 수 있다. 여기서 g_0 와 R_e 는 해수면에서의 중력가속도와 지구 반경이며 각각 $9.81 m/s^2$ 와 $6,371 km$ 로 설정하였다.

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -0.5\beta\rho(r_z)v_x|v| + a_{Lx} \\ -0.5\beta\rho(r_z)v_y|v| + a_{Ly} \\ -0.5\beta\rho(r_z)v_z|v| + a_{Lz} + g(r_z) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w_{v_x} \\ w_{v_y} \\ w_{v_z} \\ w_{a_{Lx}} \\ w_{a_{Ly}} \\ w_{a_{Lz}} \end{bmatrix} \quad (2)$$

where $|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$$\rho(r_z) = \rho_0 \exp(kr_z) \begin{cases} \text{if } -r_z < 9144m, \rho_0 = 1.227, k = 1.093 \times 10^{-4} \\ \text{if } -r_z \geq 9144m, \rho_0 = 1.754, k = 1.490 \times 10^{-4} \end{cases} \quad (3)$$

$$g(r_z) = g_0 \frac{R_c^2}{(R_e - r_z)^2} \quad (4)$$

2.2 측정 모델

측정값은 레이더 위치를 기준으로 하는 상대 거리 (r), 방위각(ψ), 고각(θ), 상대속도($-\dot{r}$) 및 유사 측정값이다. 유사 측정값은 양력가속도와 속도벡터가 수직이라는 운동학 조건식 (5)를 측정값으로 추가한 것이다.

$$v_x a_{Lx} + v_y a_{Ly} + v_z a_{Lz} = 0 \quad (5)$$

측정모델 h 는 아래 식 (6)과 같고, $v_r, v_\psi, v_\theta, v_r$ 은 레이더 측정치의 노이즈이며, v_{a_x} 은 설계 변수이며 속도 예측 정확도와 양력 가속도의 대략적인 크기를 고려하여 값을 설정할 수 있다. 측정모델의 네 번째 측정치는 레이더의 측정값과 상관없이 0으로 설정된다.

$$h(X) = \begin{bmatrix} \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \\ \tan^{-1}(r_y/r_x) \\ \tan^{-1}(-r_z/\sqrt{r_x^2 + r_y^2}) \\ v_x a_{Lx} + v_y a_{Ly} + v_z a_{Lz} \\ \frac{r_x v_x + r_y v_y + r_z v_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_r \\ v_\psi \\ v_\theta \\ v_{a_x} \\ v_r \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.3 IMM 필터 알고리즘

앞 절에서 유도한 동역학 모델에서는 탄도계수가 고정된 값을 사용한다. 그러나 실제 상황에서 표적의 탄도계수를 미리 알아낼 수 없으므로 서로 다른 탄도계수 값을 갖는 다수의 동역학 모델을 IMM 필터에 적용하여 탄종을 식별하는 방법을 적용할 수 있다. 탄도계수를 상태변수로 취급해 추정하는 방식에 비해 IMM 필터 방법이 더 좋은 추정성능을 보여준다[6]. IMM 필터의 알고리즘은 다음과 같다.

변수 정의

- (a) $Z_k = \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$: k 개의 측정값 모음
- (b) $\mu_{i|j}(k-1|k-1) = Prob\{\sigma_i(k-1)|\sigma_j(k), Z_{k-1}\}$: 혼합확률(Mixing probability)
- (c) $\mu_j(k) = Prob\{\sigma_j(k)|Z_k\}$: 모드 확률(Mode probability)
- (d) $p_{ij} = Prob\{\sigma_j(k)|\sigma_i(k-1)\}$: 모델 변환 확률(Model transition probability) 단, $p_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1, N$ 은 모델의 개수
- (e) $\Lambda_j(k) = N(z(k)|\sigma_j(k), Z_{k-1})$: 모델 j 의 빈도함수(Likelihood function)

1) Interaction

$$\mu_{i|j}(k-1|k-1) = \frac{p_{ij}\mu_i(k-1)}{\sum_{i=1}^N p_{ij}\mu_i(k-1)}$$

$$\hat{x}_{oj}(k-1|k-1) = \sum_{i=1}^N \mu_{i|j}(k-1|k-1) \hat{x}_i(k-1|k-1)$$

$$P_{oj}(k-1|k-1) = \sum_{i=1}^N \mu_{i|j}(k-1|k-1) [P_i(k-1|k-1) + (\hat{x}_i(k-1|k-1) - \hat{x}_{oj}(k-1|k-1))(\hat{x}_i(k-1|k-1) - \hat{x}_{oj}(k-1|k-1))^T]$$

2) Filtering $\forall j \in Model$

$$\hat{x}_j(k|k-1) = F_j(k-1)\hat{x}_{oj}(k-1|k-1)$$

$$P_j(k|k-1) = F_j(k-1)P_{oj}(k-1|k-1)F_j^T(k-1) + Q_j(k-1)$$

$$\hat{x}_j(k|k) = \hat{x}_j(k|k-1) + K_j^*(k)(z(k) - h(\hat{x}_j(k|k-1)))$$

$$P_j(k|k) = P(k|k-1) - K_j^*(k)S_j(k)K_j^*(k)^T$$

$$S_j(k) = H_j(k)P_j(k|k-1)H_j^T(k) + R_j(k)$$

$$K_j^*(k) = P_j(k|k-1)H_j^T(k)S_j(k)^{-1}$$

3) Model probability update

$$\Lambda_j(k) = N(r_j(k) | 0, S_j(k|k-1))$$

$$\mu_j(k) = \frac{\Lambda_j(k) \sum_{i=1}^N p_{ij}\mu_i(k-1)}{\sum_{j=1}^N \Lambda_j(k) \sum_{i=1}^N p_{ij}\mu_i(k-1)}$$

where $\hat{z}_j(k|k-1) = h(\hat{x}_j(k|k-1))$,

$$r_j(k) = z(k) - \hat{z}_j(k|k-1)$$

4) Combination

$$\hat{x}(k|k) = \sum_{j=1}^N \mu_j(k) \hat{x}_j(k|k)$$

$$P(k|k) = \sum_{j=1}^N \mu_j(k) [P_j(k) + (\hat{x}_j(k|k) - \hat{x}(k|k))(\hat{x}_j(k|k) - \hat{x}(k|k))^T]$$

위의 알고리즘에서 \hat{x}_i 와 P_i i 번째 모델의 상태변수 추정값과 공분산을 의미하며 $(k|k-1)$ 와 $(k|k)$ 는 각각 모델을 이용한 예측값과 측정 업데이트 값을 의미한다.

IMM 필터 알고리즘의 첫 번째 과정은 interaction 단계이다. 모드 확률과 모델 변환 확률을 이용하여 혼합확률을 계산하고, 모델별로 예측된 평균과 분산을 적절히 상호작용시켜 새로운 평균과 분산을 도출해낸다. p_{ij} 는 모델변환 확률로 설계 변수이며, N 은 모델의 개수이다. 이러한 상호작용과정으로 인해 모드가 변경되었을 때에도 정상 상태까지 이르는 과도 기간이 짧아지며 특정 필터가 발산하는 것을 방지할 수 있다.

두 번째는 filtering 과정이며 모델별로 확장칼만필터를 적용한다. 첫 번째 단계에서 도출된 새로운 평균 및 분산과 측정값을 이용하여 상태변수를 업데이트한다. 과정은 일반적인 확장칼만필터와 동일하다.

다음은 모드 확률을 갱신하는 model probability update 과정이다. 일반적으로 모드 확률 갱신 과정에서 사용되는 빈도함수는 0과 잔차의 분산 $S_j(k|k-1)$ 를 각각 평균과 분산으로 하는 정규 분포를 사용한다. 빈도함수와 잔차 $r_j(k)$ 을 이용하여 빈도함수값을 구하고 모드 확률을 갱신한다.

마지막으로 combination 단계에서 모드 확률을 이용하여 최종 추정치를 계산하게 된다.

2.4 상태변수 및 공분산 초기화

알고리즘을 실제로 적용하기 위해서는 상태변수와 공분산 초기화가 필요하다. 초기화 오차가 적을수록 해의 수렴속도가 빨라진다. 본 논문에서는 레이더에서 들어온 몇 개의 측정값을 이용해 최소제곱방법으로 초기화를 진행한다. 우선, 짧은 시간 동안 초기화가 이루어지기 때문에 식 (7)과 같이 표적의 궤적을 직선으로 가정할 수 있다. 식 (7)에서 t 는 시간을 의미하며, a_i 와 b_i 는 상수이다.

$$(a_1, a_2, a_3)t + (b_1, b_2, b_3) \quad (7)$$

레이더 측정정보가 들어오면 식 (8)을 이용해 NED 좌표계의 위치로 변환한다.

$$\begin{aligned} r_z &= -\sqrt{\frac{r^2}{1 + \cot^2(\theta)}} \\ r_x &= -\sqrt{\frac{r^2 - r_z^2}{1 + \tan^2(\psi)}} \\ r_y &= \tan(\psi)r_x \end{aligned} \quad (8)$$

이렇게 변환된 위치정보 $r_{x_i}, r_{y_i}, r_{z_i}$ 와 측정치가 들어온 시간 t_i 을 직선 궤적 식 (7)에 대입하면 식 (9)와 같다.

$$(a_1, a_2, a_3)t_i + (b_1, b_2, b_3) = (r_{x_i}, r_{y_i}, r_{z_i}) \quad (9)$$

3개 이상의 측정치가 모이면 식 (10), (11)과 같이 최소제곱방법으로 직선 궤적의 계수들을 구할 수 있다.

$$TC = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{x_1} & r_{y_1} & r_{z_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{x_m} & r_{y_m} & r_{z_m} \end{bmatrix} = M \quad (10)$$

$$C = (T^T T)^{-1} T^T M \quad (11)$$

이렇게 구한 계수행렬 C 를 이용해서 위치와 속도를 초기화할 수 있다. 초기화 시간 t_0 를 식 (7)에 대입하여 위치를 초기화하고, (a_1, a_2, a_3) 를 속도 초기화 값으로 사용한다. 양력 가속도는 모두 0으로 초기화 한다.

다음으로 공분산은 레이더 측정값의 표준편차와 좌표변환을 통해 초기화될 수 있다. LOS 좌표계를 레이더를 중심으로 하는 구형 좌표계로 정의하면 NED 좌표계와 LOS 좌표계 사이의 관계식은 식 (12)와 같다. 여기서 $X_{NED}, Y_{NED}, Z_{NED}$ 는 NED 좌표계에서의 위치값을 나타내며 R, θ, ψ 는 LOS 좌표계에서의 거리, 고각, 방위각을 나타낸다.

$$\begin{aligned} X_{NED} &= R \cos \theta \cos \psi \\ Y_{NED} &= R \cos \theta \sin \psi \\ Z_{NED} &= -R \sin \theta \end{aligned} \quad (12)$$

$X_{NED}, Y_{NED}, Z_{NED}, R, \theta, \psi$ 값 각각에 섭동을 주고 정리하면 식 (13)과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta R_{NED} &= T \Delta R_{LOS} \\ \text{where } \Delta R_{NED} &= \begin{bmatrix} \Delta X_{NED} \\ \Delta Y_{NED} \\ \Delta Z_{NED} \end{bmatrix}, \Delta R_{LOS} = \begin{bmatrix} \Delta R \\ R \cos \theta \Delta \psi \\ -R \Delta \theta \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi - \sin \psi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi \cos \psi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \quad 0 \quad \cos \theta \end{bmatrix}$$

NED 좌표계에서의 위치 공분산은 식 (14)와 같이 좌표변환을 통해서 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} P_{NED} &= E[\Delta R_{NED} \Delta R_{NED}^T] \\ &= TE[\Delta R_{LOS} \Delta R_{LOS}^T] T^T = TP_{LOS} T^T \\ \text{where } P_{LOS} &= \text{diag}(\sigma_R^2, R^2 \cos^2 \theta \sigma_\psi^2, R^2 \sigma_\theta^2) \end{aligned} \quad (14)$$

위치 측정값만을 사용해서 속도를 초기화하였으므로 속도에 대한 공분산은 여유 있게 정해야 한다. 측정노이즈의 표준편차가 주어졌을 때, 시뮬레이션을 통해 최소제곱방법이 얼마만큼의 속도 오차를 발생시키는지에 대한 분석을 통해 대략적인 속도 공분산을 정할 수 있다. 양력가속도는 공기저항과 중력에 의한 가속도에 비해 작으므로 양력가속도에 대한 공분산은 작게 잡아야 한다.

Table 1은 초기화 방법에 따른 초기 위치 및 속도 오차를 나타낸 것이다. 여기서 오차는 실제값과 초기화 값의 차에 대한 2-놈(norm)으로 정의하였다. 레이더 측정

Table 1. Initialized position and velocity error standard deviation

Number of measurements	Position error(m)	Velocity error(m/s)
8	73.76	47.17
3	109.59	178.11
1	125.39	-

노이즈의 표준편차는 각각 $\sigma_R = 4(m)$, $\sigma_{\psi} = 0.002(rad)$, $\sigma_{\theta} = 0.0015(rad)$ 로 가정하였고, 100번의 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하여 구한 오차의 평균을 구하였다. 표적은 초기화 시점에 레이더로부터 50km 거리에 존재한다. 제안한 초기화 방법을 8개 및 3개의 측정값에 적용했을 때의 위치, 속도 오차의 표준편차와 1개의 레이더 측정값을 NED 좌표계로 직접 변환한 경우의 위치 오차에 대한 표준편차를 나타내었다. 1개의 측정값을 식 (8)을 통해 직접변환한 경우, 위치는 초기화할 수 있으나 속도에 대한 초기화는 불가능하다. 제안한 초기화 방법은 소수의 초기측정값을 이용하면서도 낮은 오차의 위치, 속도 초기화가 가능하다는 것을 알 수 있다.

III. 탄착점 예측 알고리즘

이번 절에서는 IMM 필터를 통해 추정된 표적의 현재 위치, 속도 및 탄도계수를 이용해 신속하게 탄착점을 예측하는 알고리즘을 제시한다. 장사정포를 질점 모델로 가정하였을 때, 탄도궤적 평면(2차원)에서의 운동방정식은 식 (15)와 같다. 여기서 γ 는 속도벡터와 x축이 이루는 비행경로각을 의미한다. 또한 β' 은 식 전개의 편의를 위해 식 (16)으로 정의했으며, 앞 절에서 정의한 탄도계수와 다음을 주의해야 한다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -g \sin \gamma - g \beta' V^2 \\ \dot{\gamma} &= -\frac{g}{V} \cos \gamma \\ \dot{x} &= V \cos \gamma \\ \dot{h} &= V \sin \gamma \end{aligned} \tag{15}$$

$$\beta' = \frac{\rho C_D S_{ref}}{2mg} \tag{16}$$

식 (15)의 탄도궤적 방정식은 각각의 상태변수들이 서로 비선형적으로 결합되어 있기 때문에 해석적으로 풀 수 없다. 일반적으로 비선형 동역학식이 주어지면 오일러나 룽게-쿠타 수치적분을 통해 미래 궤적 및 탄착점을 계산할 수 있다. 그러나 이러한 적분방법은 정확도를 높이기 위해 적분간격을 줄여야 하며, 그 결과 많은 계산량이 요구된다. 본 논문에서는 문헌[8]의 준해석적인 방

법을 적용하여 탄착점을 예측한다. 이 방법은 부분적분을 통해 일부 해석해를 구하고, 나머지 부분에만 수치적분을 적용하기 때문에 적분간격이 길더라도 정밀한 해를 구할 수 있다.

우선 독립변수를 비행경로각 γ 로 설정한다. 표적이 탄도궤적으로 비행하는 경우 중력에 의해 비행경로각이 단조 감소하므로 비행경로각을 독립 변수로 활용할 수 있다. 비행경로각을 동일 간격 $\Delta\gamma$ 로 이산화하면, k+1번째 비행경로각은 식 (17)과 같이 구할 수 있다.

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k - \Delta\gamma \tag{17}$$

다음으로 임의의 비행경로각 구간 $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$ 에서 각 상태변수들의 닫힌 해를 도출한다. 식 (15)에서 중력가속도 g 와 β' 는 표적의 고도에 따라 변하는 값이지만 비행경로각 간격 $\Delta\gamma$ 가 크지 않을 경우, 구간 $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$ 에서의 변화량은 크지 않다. 따라서 이 구간에서 g 와 β' 은 k번째 스텝의 고도정보를 통해 산출된 상수값 g_k 와 β'_k 로 가정할 수 있다. 따라서 식 (15)의 탄도궤적 방정식은 아래 식 (18)과 같이 비행경로각에 대한 방정식으로 변환될 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\gamma} &= V \tan \gamma + \beta'_k V^3 \sec \gamma \\ \frac{dt}{d\gamma} &= -(V/g_k) \sec \gamma \\ \frac{dx}{d\gamma} &= -(V^2/g_k) \\ \frac{dh}{d\gamma} &= -(V^2/g_k) \tan \gamma \end{aligned} \tag{18}$$

식 (18)의 $dV/d\gamma$ 의 양변에 $-2V^{-3} \sec^2 \gamma$ 를 곱하면 식 (19)를 얻을 수 있다.

$$-2V^{-3} \sec^2 \gamma \frac{dV}{d\gamma} + 2V^{-2} \sec^3 \gamma \sin \gamma = -2\beta'_k \sec^3 \gamma \tag{19}$$

식 (19)의 좌변을 미분형태로 정리하면 식 (20)과 같다.

$$\frac{d}{d\gamma} [(V \cos \gamma)^{-2}] = -2\beta'_k \sec^3 \gamma \tag{20}$$

식 (20)의 $V \cos \gamma$ 는 현재 위치에서의 x-방향 속도 성분에 해당하며, 식 전개의 편의를 위해 $V_X(\gamma) = V \cos \gamma$ 을 정의한다. 이를 이용해 식 (20)을 적분 형태로 정리하면 식 (21)과 같다.

$$\int_{V_X(\gamma_k)}^{V_X(\gamma_{k+1})} d\left(\frac{1}{V_X}\right)^2 = -2\beta'_k \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \sec^3 \gamma d\gamma \tag{21}$$

위의 식을 구간 $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$ 에서 적분하면 x-방향 속도 성분에 대한 닫힌 해를 식 (22)와 같이 얻을 수 있다.

$$V_X^2(\gamma_{k+1}) = \frac{V_X^2(\gamma_k)}{\beta'_k V_X^2(\gamma_k) [\phi(\gamma_k) - \phi(\gamma_{k+1})] + 1} \quad (22)$$

$$\text{where } \phi(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

앞에서 정의한 $V_X(\gamma) = V \cos \gamma$ 관계를 이용하면 속도에 대한 닫힌 해는 최종적으로 식 (23)으로 나타낼 수 있다.

$$V(\gamma_{k+1}) = \frac{V(\gamma_k) \cos(\gamma_k)}{\cos \gamma_{k+1} \sqrt{1 + \beta'_k V^2(\gamma_k) \cos^2 \gamma_k [\phi(\gamma_k) - \phi(\gamma_{k+1})]}} \quad (23)$$

구간 $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$ 에서 다른 상태변수들은 식 (18)로부터 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} t(\gamma_{k+1}) &= t(\gamma_k) - \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \frac{V(\gamma) \sec \gamma}{g_k} d\gamma \\ x(\gamma_{k+1}) &= x(\gamma_k) - \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \frac{V^2(\gamma)}{g_k} d\gamma \\ h(\gamma_{k+1}) &= h(\gamma_k) - \int_{\gamma_k}^{\gamma_{k+1}} \frac{V^2(\gamma) \tan \gamma}{g_k} d\gamma \end{aligned} \quad (24)$$

위 식의 적분항은 식 (25)와 같이 사다리꼴 적분을 활용하여 근사적으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} t(\gamma_{k+1}) &= t(\gamma_k) + \frac{2[V(\gamma_k) \sin \gamma_k - V(\gamma_{k+1}) \sin \gamma_{k+1}]}{g_k(2 + \mu_k)} \\ x(\gamma_{k+1}) &= x(\gamma_k) + \frac{V^2(\gamma_k) \sin 2\gamma_k - V^2(\gamma_{k+1}) \sin 2\gamma_{k+1}}{2g_k(1 + \mu_k)} \\ h(\gamma_{k+1}) &= h(\gamma_k) + \frac{V^2(\gamma_k) \sin^2 \gamma_k - V^2(\gamma_{k+1}) \sin^2 \gamma_{k+1}}{g_k(2 + \mu_k)} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{where } \mu_k = \beta'_k (V^2(\gamma_k) \sin \gamma_k + V^2(\gamma_{k+1}) \sin \gamma_{k+1})$$

$k=0$ 일 때 상태변수들의 값은 필터를 통해 추정된 표적의 현재 상태변수이고 시간은 $t(\gamma_0) = 0$ 으로 초기화한다. 이러한 초기값으로부터 식 (23)과 식 (25)를 통해 다음 스텝에서의 상태변수들의 값을 순차적으로 예측할 수 있다. 이때 비행경로각과 중력가속도 및 탄도계수는 매 스텝마다 갱신된다. 이와 같은 탄도궤적 예측은 표적의 고도 예측값이 0보다 작아질 때까지 진행하며, 최종 스텝을 $k = n_f$ 로 정의하면 탄도궤적 예측의 종료 조건을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$h(\gamma_{n_f-1}) > 0 > h(\gamma_{n_f}) \quad (26)$$

일반적으로 최종 스텝의 고도 $h(\gamma_{n_f})$ 는 0과 정확히 일치하지 않는다. 따라서 정확한 종료 위치를 산출하기 위해 Fig. 1을 참고하여 선형 보간을 통해 최종 비행경로각 γ'_{n_f} 를 산출한다.

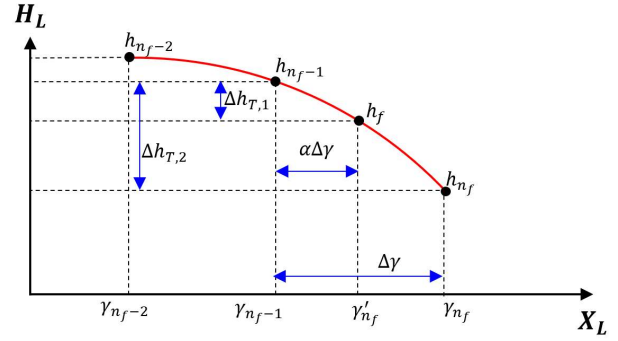


Fig. 1. Final position correction with linear interpolation

위와 같은 선형 보간 기법을 적용하면 최종 스텝에서의 비행경로각은 식 (27)과 같이 산출된다.

$$\begin{aligned} \gamma'_{n_f} &= \gamma_{n_f-1} - \alpha \Delta \gamma \\ \text{where } \alpha &= \frac{h(\gamma_{n_f-1}) - 0}{h(\gamma_{n_f-1}) - h(\gamma_{n_f})} \end{aligned} \quad (27)$$

식 (27)로부터 새롭게 갱신된 최종 비행 경로각 γ'_{n_f} 에 대해 구간 $[\gamma_{n_f-1}, \gamma'_{n_f}]$ 에서 식 (25)를 다시 적용하여 종료 고도에서의 상태변수들을 산출할 수 있다. 최종적으로 제안한 방식을 활용한 예상 탄도궤적 산출과정은 Fig. 2와 같이 요약될 수 있다.

다음으로 제안한 방식의 성능 검증을 위해 오일러 적분을 활용한 예상 탄도궤적 산출 결과와 비교하였다. 오일러 적분의 경우 비행경로각 간격을 $\Delta \gamma = 0.01^\circ$ 로 설정하였고, 제안한 방식의 경우 간격을 $\Delta \gamma = 2^\circ$ 로 설정하였다. Figs. 3, 4를 통해 알 수 있듯이 제안한 방법은 반복 횟수가 200배 감소함에도 불구하고 기존 수치적분 기반의 방법과 유사한 정확도를 보장한다. 제안한 방법은 큰 적분 간격을 활용할 수 있기 때문에 일반적인 수치적분 방법에 비해 예상 탄착점 산출 시 계산시간을 단축할 수 있다.

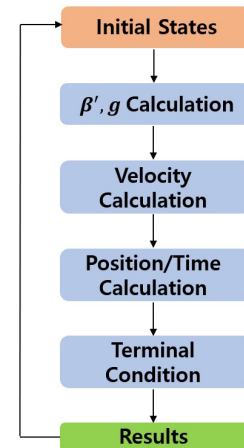


Fig. 2. Process of trajectory calculation

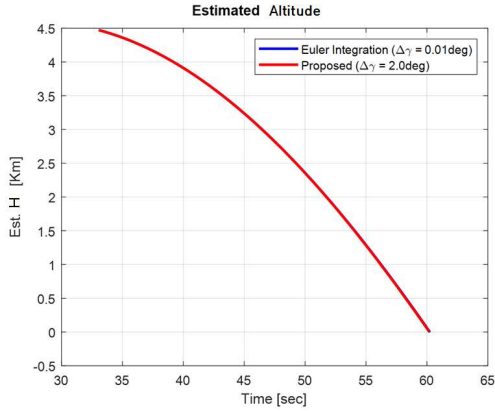


Fig. 3. Estimated altitude

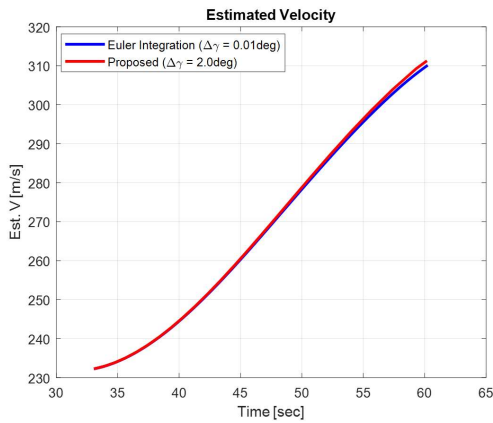


Fig. 4. Estimated velocity

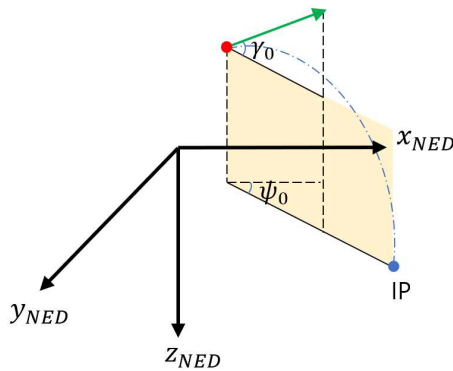


Fig. 5. 3-D implementation of proposed method

앞서 설명한 탄착점 예측 방법을 3차원상에 적용하기 위해 Fig. 5와 같은 상황을 생각하자. 초록색 화살표는 필터를 통해 추정된 표적의 현재 속도벡터이고, 빨간점은 현재 위치이다. 파란점은 예측된 탄착점의 위치이다.

추정된 현재 위치와 속도가 각각 (r_x, r_y, r_z) , (v_x, v_y, v_z) 일 때 식 (28)을 통해 현재 탄도궤적 평면과 NED 좌표계의 x축이 이루는 각을 구할 수 있다. 이렇게 계산된 ψ_0 는 탄도궤적 평면에서 예측된 탄착점을 원래의 NED 좌표계의 값으로 변환시킬 때 사용된다.

$$\psi_0 = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \quad (28)$$

다음으로, 탄도궤적 평면 위의 k=0번째 상태변수를 식 (29)와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sin^{-1}\left(-v_z / \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\right) \\ V(\gamma_0) &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ x(\gamma_0) &= 0 \\ h(\gamma_0) &= -r_z \end{aligned} \quad (29)$$

앞서 설명한 탄착점 예측 방법을 적용하여 탄도궤적 평면상의 탄착점 $x(n_f)$ 를 구한다. 이렇게 구한 탄착점을 식 (30)을 통해 원래의 NED 좌표계에서의 탄착점으로 변환할 수 있다.

$$\begin{aligned} r_{x,IP} &= r_x + \cos(\psi_0)x(n_f) \\ r_{y,IP} &= r_y + \sin(\psi_0)x(n_f) \end{aligned} \quad (30)$$

IV. 시뮬레이션 결과

Figure 6에 나타난 것과 같이 고도가 다른 두 가지 교전 상황에 대해 시뮬레이션을 수행하였다. 레이더의 측정 주기는 2Hz이며 필터의 시간 업데이트(time propagation) 주기는 200Hz이다. 200Hz마다 시간 업데이트뿐만 아니라 운동학 구속조건 식 (5)를 유사 측정값으로 사용하여 측정 업데이트도 진행하였다. 시뮬레이션에서 사용한 레이더 측정 노이즈 표준편차, 프로세스 노이즈 표준편차와 유사 측정값의 노이즈 표준편차를 Table 2와 3에 나타내었다. 탄착점 예측성능을 확인하기 위해서 100번의 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하고 평균을 내었다.

표적의 동역학식은 식 (31)과 같다. 식 (31)을 통해 표적의 실제 궤적을 생성한 후 LOS 좌표계 값으로 변환하였다. 이렇게 변환된 값에 Table 2의 표준편차를 갖는 노이즈를 샘플링하여 더한 후 레이더의 측정값으로 사용하였다. 표적의 실제 궤적을 생성할 때는 고정된 탄도계수 β 를 사용하였다. 표적의 초기 위치는 첫 번째 시나리오에서는 (-85km, 20km, 30km)로 설정하고 두 번째

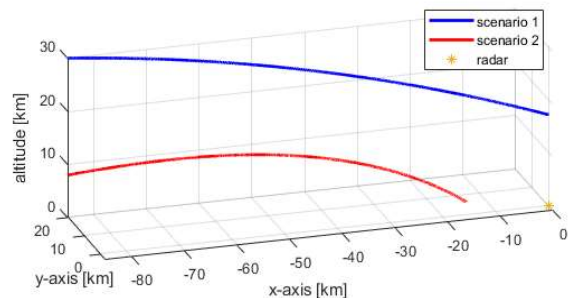


Fig. 6. Simulation scenario

Table 2. Measurement noise standard deviation

Measurement	Range (m)	Closing velocity (m/s)	Azimuth angle (rad)	Elevation angle (rad)
noise σ	5	0.5	0.0020	0.0015

Table 3. Noise standard deviation of design parameter

Process /lift noise	Velocity $w_{v_x}, w_{v_y}, w_{v_z}$	Lift acceleration $w_{a_{Lx}}, w_{a_{Ly}}, w_{a_{Lz}}$	Kinematics v_{a_L}
noise σ	0.8	0.0001	10

시나리오에서는 (-85km, 20km, 8km)의 값으로 설정하였다. 속력은 동일하게 1,800m/s로 설정하였으며, 각각과 방위각은 각각 $(-10^\circ, 0^\circ)$ 와 $(20^\circ, 0^\circ)$ 로 설정하였다.

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{R}}{dt} &= \vec{V} \\
 \frac{dV}{dt} &= -\frac{1}{2}\beta\rho V^2 - g\sin(\theta) \\
 \frac{d\psi}{dt} &= 0 \\
 \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g}{V}\cos(\theta)
 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\text{where } V = |\vec{V}|$$

IMM 필터에서 모델별로 각각 $(0.4928 \cdot 10^{-4}, 0.7040 \cdot 10^{-4}, 0.9152 \cdot 10^{-4})$ 의 탄도계수를 사용했고, 모델변환행렬은 식 (32)의 값을 사용하였다. 표적의 탄도계수 β 는 IMM 필터의 두 번째 모델의 탄도계수 값을 사용하였다. 탄도계수를 10번째 상태변수로 고려하는 단일 EKF (Extended Kalman Filter)와 탄착점 추정성능을 비교하였다. 단일 EKF의 탄도계수 초기화는 3가지 값에서 랜덤으로 샘플링하였다.

$$p_{ij} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \quad (32)$$

첫 번째 시나리오는 Fig. 6과 같이 30km의 높은 고도에서 상태변수와 탄착점 추정이 시작된 경우이다. 탄도계수는 $\beta = C_D S_{ref} / m$ 로 정의되며 항력계수가 포함되어 있다. 높은 고도에서는 밀도가 작아 공기저항에 대한 효과가 매우 적기 때문에 초기에 탄도계수를 정확하게 추정하기 어렵다. Fig. 7을 통해 고도가 낮아지고 밀도가 높아지면서 점진적으로 탄도계수가 잘 추정되는 것을 확인할 수 있으며, 단일 EKF를 사용한 경우에 비해 제안한 방법이 탄도계수를 더 정확하게 추정하는 것을 확인할 수 있다. 이는 EKF의 경우에는 탄도계수에 대한 적당한 범위를 알지 못하기 때문에 측정 노이즈에 민감하

게 반응하는 반면, IMM 필터의 경우는 탄종에 대한 사전지식을 토대로 적절한 범위 내의 탄도계수 값을 갖는 모델을 사용하기 때문에 안정적으로 탄도계수를 추정할 수 있기 때문이다. 단일 EKF의 탄도계수에 대한 프로세스 노이즈값을 줄이면 Fig. 7과 같이 민감하게 변하지는 않지만, 수렴 속도가 매우 느림을 확인할 수 있었다. 또한 Fig. 8을 통해 표적의 실제 탄도계수 값을 갖는 두 번째 모델의 모드 확률이 1에 가까워짐을 알 수 있으며, 탄종 분리가 잘 수행됨을 확인할 수 있다. 단일 EKF 필터와 IMM 필터는 탄도계수 추정방법을 제외하고 모두 동일한 식을 사용하기 때문에 위치의 추정성능은 비슷함을 Fig. 9와 Fig. 10을 통해 알 수 있다.

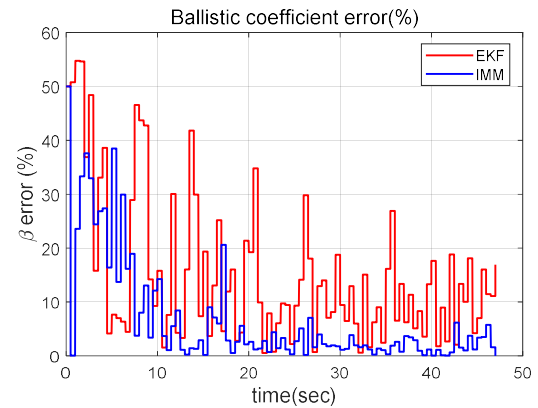


Fig. 7. Ballistic coefficient estimation error

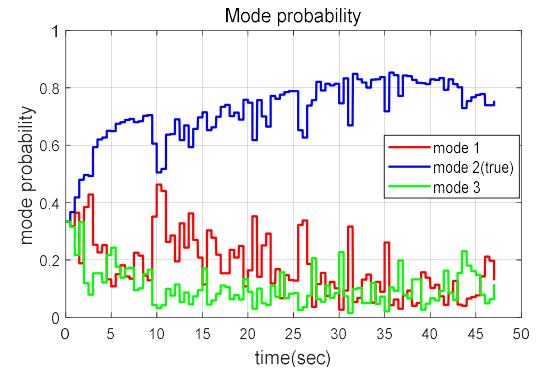


Fig. 8. Mode probability

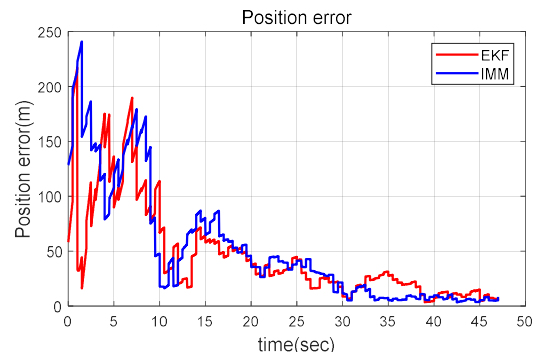


Fig. 9. Position estimation error

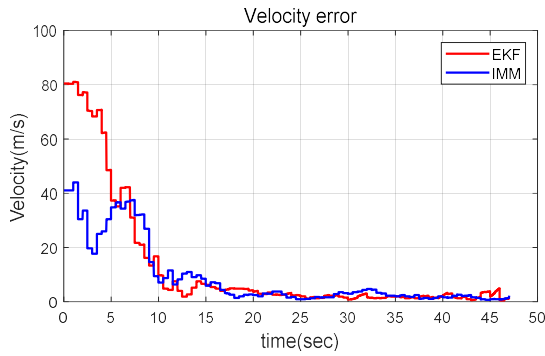


Fig. 10. Velocity estimation error

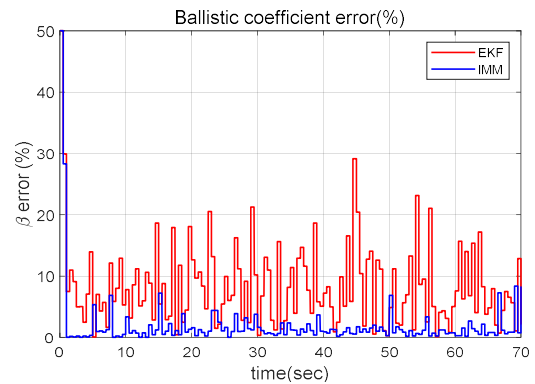


Fig. 12. Ballistic coefficient estimation error

Table 4. Impact point error mean

	20 sec	30 sec	40 sec
EKF	959.3 m	558.8 m	505.6 m
IMM	398.8 m	193.4 m	102.8 m

Figure 11은 초기화 30초 후에 예측된 탄착점들을 나타낸 것이다. 단일 EKF를 통해 예측한 탄착점들은 넓게 퍼져있어 큰 분산값을 보이거나 제안한 방법은 비교적 정확하게 탄착점을 예측하는 것을 알 수 있다. Table 4는 초기화 이후 20초, 30초, 40초의 탄착점 예측 오차의 평균을 나타낸다. 시간이 경과할수록 위치와 속도 추정 및 탄도계수 추정 정확도가 증가하기 때문에 탄착점 예측 정확도도 증가함을 알 수 있다.

두 번째 시나리오에서는 10km 이하의 낮은 고도를 통해 포가 날아오는 경우이다. 낮은 고도에서는 밀도가 높아 공기저항을 많이 받기 때문에 탄도계수를 빠르게 추정해낼 수 있다. 따라서 짧은 시간 안에 탄종을 분리할 수 있다. Fig. 12는 두 번째 시나리오에 대한 탄도계수의 추정성능을 보여준다. 추정 정확도가 점진적으로 증가하는 첫 번째 시나리오에 비해 두 번째 시나리오에서는 초기화 직후부터 탄도계수를 매우 정확하게 추정해내

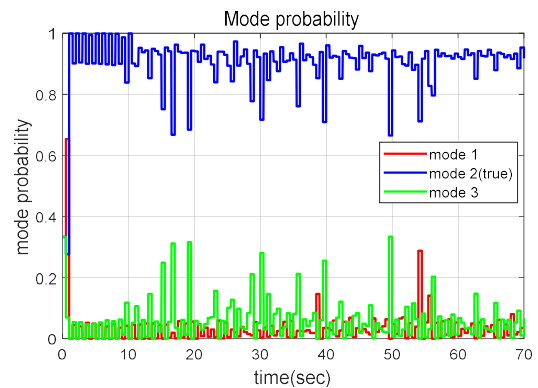


Fig. 13. Mode probability

는 것을 확인할 수 있다. 또한 두 번째 모델의 모드 확률이 매우 빠르게 1에 가까워짐을 Fig. 13을 통해 알 수 있다. 위치와 속도 추정성능은 첫 번째 시나리오와 마찬가지로 비슷하였으며, 그림은 생략하였다.

Figure 14는 초기화 30초 후에 예측된 탄착점들을 나타낸다. 첫 번째 시나리오에 비해 고도가 낮아 탄도계수를 초기에 정확하게 추정할 수 있고, 이는 위치 및 속도 추정 정확도를 높인다. 뿐만 아니라 고도가 낮아짐으로 인해 첫 번째 시나리오에 비해 레이더와의 거리가 짧아지고 고각 및 방위각 오차로 인한 위치 추정 정밀도가 높아지게 된다. 따라서 첫 번째 시나리오에 비해 탄착점 예측 정밀도가 높아진 것을 확인할 수 있다. Table 5는 초기화 이후 20초, 30초, 40초의 탄착점 예측 오차의 평균을 나타낸다. 전체적으로 첫 번째 시나리오에 비해 탄착점 예측 오차가 감소하였으며, 이번에도 제안한 방법이 단일 EKF에 비해 좋은 성능을 보여주었다. Fig. 7과 12에서 EKF의 탄도계수 추정오차는 20초 이후 20% 정도

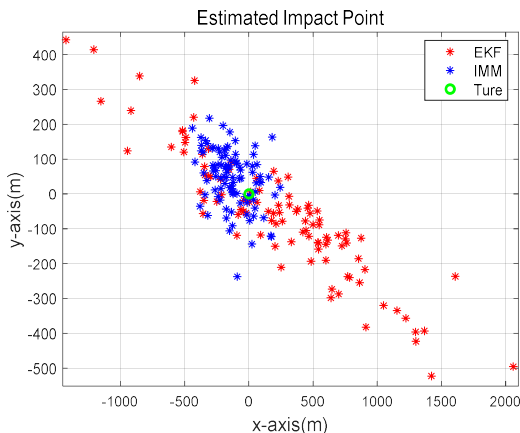


Fig. 11. Estimated impact point at 30sec

Table 5. Impact point error mean

	20 sec	30 sec	40 sec
EKF	622.67 m	132.53 m	58.83 m
IMM	175.3 m	94.89 m	45.61 m

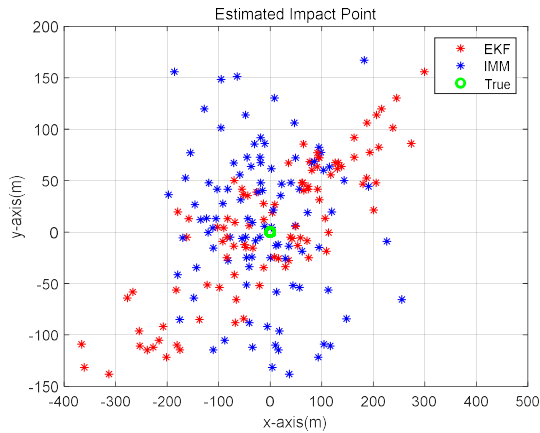


Fig. 14. Estimated impact point at 30sec

로 비슷하지만, 탄착점 예측 오차에는 큰 차이가 존재한다. 이러한 차이가 존재하는 이유는 두 번째 시나리오의 경우 고도가 낮아 첫 번째 시나리오에 비해 레이더와의 거리가 짧고 이로 인해 고각 및 방위각으로 인한 거리측정 오차가 감소하기 때문이다. 탄도계수를 비슷한 정확도로 추정하더라도 레이더와의 거리가 다르면 위치 및 속도 추정 정확도에 차이가 발생하며 탄착점 예측 정확도도 달라지게 된다.

IMM 필터를 적용하는 제안한 방법은 탄도계수에 대한 관측성이 없는 높은 고도의 표적에 대해서 매우 우수한 탄착점 예측 정확도를 보여주었으며, 저고도의 표적에 대해서도 단일 EKF에 비해 좋은 성능을 보여주었다. 뿐만 아니라 탄착점 계산과정에 준해석 방법을 적용하기 때문에 일반 통계-쿠타 수치적분 방식에 비해 수백 배 이상 빠르게 탄착점을 계산할 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서 낮은 고도와 짧은 거리를 날아오는 장사정포의 탄종을 분리하고 신속하게 탄착점을 예측하는 알고리즘을 제안하였다. 탄도궤적을 예측할 때 가장 중요한 파라미터인 탄도계수를 신속하게 추정하기 위해 IMM 필터를 사용하였다. 각각 다른 탄도계수 값을 갖는 3가지 탄도방정식 모델을 IMM 필터에 적용하여 현재 표적의 상태변수를 추정하였다. 추정된 상태변수를 토대로 계산량이 적게 요구되는 준해석적인 방법을 이용하여 탄착점을 예측하는 알고리즘을 제시하였다. 마지막으로, 최소제곱법을 이용한 상태변수 초기화 방법에 대해 논의하였고, 제안한 초기화 방법을 통해 소수의 레이더 측정값만으로도 적은 오차의 위치/속도 초기화가 가능함을 보였다. 상태변수 초기화 및 IMM 필터, 탄착점 예측 알고리즘을 모두 통합하여 몬테카를로 시뮬레이션을 수행하였다. 시뮬레이션을 통해 제안한 방법의 탄도계수 추정 및 탄착점 추정성능이 단일 EKF에 비해 우수함을 검증하였다.

후 기

본 연구는 LIG Nex1의 “장사정포 탐지/추적 필터 및 동시표적 추적 알고리즘 개발” 위탁연구 지원에 의해 수행되었습니다(계약번호: Y21-C002).

References

- 1) Lee, D. G., Cho, K. S., Shin, J. H. and Kim, J. E., “An analysis study about relationship between ballistic coefficient and accuracy of predicted intercept point of super-high speed targets,” *Journal of the Korea Institute of Military Science and Technology*, Vol. 17, No. 2, 2014, pp. 265~274.
- 2) Hardiman, D. F., Kerce, J. C. and Brown, G. C., “Nonlinear estimation techniques for impact point prediction of ballistic targets,” *Signal and Data Processing of Small Targets*, Vol. 6236, 2006, pp. 99~110.
- 3) Uhm, T. W., “Algorithm and simulation system to calculate the impact point of general bomb,” *Proceeding of Institute of Control, Robotics and Systems Conference*, July 2012, pp. 994~1001.
- 4) Jung, J. K. and Hwang, D. H., “The novel impact point prediction of a ballistic target with interacting multiple models,” *Proceeding of International Conference on Control, Automation and Systems Conference*, October 2013, pp. 450~453.
- 5) Jung, J. K. and Hwang, D. H., “Impact Point Prediction of the Ballistic Target Using a Flight Phase Discrimination,” *The Korea Institute of Military Science and Technology*, Vol. 18, No. 3, 2015, pp. 234~243.
- 6) Moon, K. R., Kim, T. H. and Song, T. L., “Comparison of ballistic-coefficient-based estimation algorithms for precise tracking of a re-entry vehicle and its impact point prediction,” *Journal of Astronomy and Space Sciences*, Vol. 29, No. 4, 2012, pp. 363~374.
- 7) Tahk, M. J. and Speyer, J. L., “Target tracking problems subject to kinematic constraints,” *IEEE transactions on automatic control*, Vol. 35, No. 3, 1990, pp. 324~326.
- 8) Chudinov, P. S., “Approximate analytical investigation of projectile motion in a medium with quadratic drag force,” *International Journal of Sports Science and Engineering*, Vol. 5, No. 1, 2011, pp. 27~42.