

소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 초등 수학교과서 비교 분석: 한국, 일본, 싱가포르, 핀란드를 중심으로

박만구(서울교육대학교, 교수) · 박혜민(서울교육대학교 대학원, 학생)
최은미(서울교육대학교 대학원, 학생) · 표정희(서울교육대학교 대학원, 학생)[†]

본 연구의 목적은 한국, 일본, 싱가포르, 핀란드의 초등 수학교과서의 소수의 곱셈과 나눗셈에 대하여 어떻게 제시하고 있는지 분석하여 수학교육을 위한 시사점을 얻고자 하는 것이다. 소수의 곱셈과 나눗셈은 학생들이 자주 오개념을 가지는 것에 비하여 이를 표현하는 최근 초등 수학교과서의 비교 연구는 많지 않았다. 이 연구를 위하여 한국의 초등 수학교과서와 TIMSS나 PISA와 같은 국제성취도 연구에서 높은 수학 성취도를 나타내는 일본, 싱가포르, 핀란드에서 널리 사용하는 초등 수학교과서를 선정하였다. 분석은 소수의 곱셈과 나눗셈과 관련한 초등 수학교육과정, 지도 시기와 내용, 실생활 소재, 시각적 모델의 사용, 알고리즘의 형식화 방법의 관점에서 살펴보았다. 연구 결과, 소수의 곱셈과 나눗셈 관련 수학교육과정은 한국과 핀란드의 경우 어려움을 포함하고, 일본과 싱가포르는 실생활 연계를 보다 강조하며 핀란드는 중등에서 연산이 완성되도록 하고 있다. 지도 시기와 내용은 짧은 기간에 집중적으로 지도하거나 여러 학년과 학기에 분산하기도 한다. 실생활의 소재는 모든 나라에서 간단한 문장제 형식으로 제시하였고, 시각적 모델의 사용이나 알고리즘의 형식화 방법은 단위 환산 등에서 자연수의 연산과 연계하도록 한다. 이러한 분석을 통해 교과서 개발 및 교사 연수에 제안을 하였다.

I. 서론

본 연구의 목적은 한국, 일본, 싱가포르, 핀란드의 초등 수학교과서에서 소수의 곱셈과 나눗셈의 지도 내용을 분석하여 소수의 곱셈과 나눗셈 지도에 대한 시사점을 제안하는데 있다. 초등수학에서 소수의 곱셈과 나눗셈은 자연수의 십진기수법의 원리가 적용되어 학

생들이 크게 어렵지 않게 이해할 수 있다고 생각되어 왔다(김수정, 방정숙, 2007; Billstein, Libeskind, & Lott, 1990). 그런데 학생들은 소수의 곱셈과 나눗셈에서 개념적 이해의 부족으로 여러 어려움과 오류를 일으키고 있다(김채린, 2022; 박교식, 권석일, 2012; 변희현, 2007; 이연미, 박성선, 2011).

소수의 덧셈과 뺄셈은 자연수의 십진기수법의 원리와 같이 연산을 하면서 소수점의 위치만 생각하면 되므로, 학생들이 연산을 하는데 큰 어려움이 없을 수 있다. 하지만 소수의 곱셈과 나눗셈은 분수의 곱셈과 나눗셈과 같이 1보다 작은 소수를 곱하면 원래의 수보다 작아지게 된다. 초등학교 학생들은 곱하면 원래의 수보다 커진다고 생각하고 있기 때문에 연산에서도 이를 이해하는데 어려움을 가진다(김방진, 류성립, 2011; 김용태, 2000; 문범식, 이대현, 2014; 이종욱, 2007).

그리고 (소수)×(자연수)의 경우는 동수누가의 방법으로 계산 원리를 이해할 수 있으나 (자연수)×(소수)나 (소수)×(소수)의 경우에는 동수누가의 방법으로 이해하기 어렵고, 대신에 넓이 모델로 이해하도록 하는 것이 더 이해하기 쉽다(김방진, 류성립, 2011; 진성현, 박만구, 2016). 그리고 나누는 수가 자연수인 경우에는 초등학교 3학년 수학교과서에서 제시하듯이 등분제나 포함제 상황으로 이해하도록 할 수 있으나 나누는 수가 소수인 경우는 등분제 상황의 적용은 어렵고(배중수, 2005), 이 또한 직사각형의 넓이 모델을 사용하여 이해하도록 할 필요가 있다(송근영, 방정숙, 2008).

(소수)×(소수)의 경우, 6학년 2학기에 다루도록 하고 있는데(교육부, 2019a) 연산의 의미를 이해하지 못하고 기계적인 계산을 하는 경향이 있다(김정원, 2017). 우리나라 초등 수학교과서에서는 곱셈에서 혼소수를 (자연수)+(소수)로 분해한 후 분배법칙을 적용하여 계산하는 방법도 제시하고 있다(강완 외, 2013).

* 접수일(2022년 6월 13일), 심사(수정)일(2022년 7월 3일), 게재확정일(2022년 7월 26일)

* MSC2000분류 : 97U20

* 주제어 : 소수, 곱셈, 나눗셈, 수학교과서, 분석

† 교신저자 : nghuiy1234@gmail.com

소수의 곱셈이나 나눗셈이 자연수 연산의 연장선상에서 쉽게 이해할 수 있다고 생각되지만, 학생들은 나머지가 있는 소수의 나눗셈에서 몫과 나머지를 어떻게 이해하는가에 대한 어려움(박교식, 권석일, 2012)이나 제수가 소수인 나눗셈에 대하여 어려움을 가진다(이중욱, 2007). 그리고 학생들은 소수의 곱셈과 나눗셈의 몫과 나머지에서 소수점을 찍는데 어려움을 가지고 있다(이연미, 박성선, 2011). 또한 초등 수학교과서에서 소수의 곱셈과 나눗셈을 다루는 방식이나 알고리즘의 도입 방식이 다르고(변희현, 2007), 교과서에서 소수의 연산을 위한 문제의 제시에 따라서 학생들의 수학 성취도나 이해에 영향을 주는 것으로 나타났다(Tian, Braithwaite, & Siegler, 2020).

여러 선행 연구에서 알 수 있듯이 소수의 곱셈과 나눗셈은 주로 알고리즘에 집중하다보니 그 의미나 과정 측면에서 학생들이 여러 오개념을 가지거나 오류를 야기하게 된다. 따라서 본 연구에서는 교과서에서 소수의 연산을 제시하는 방식이 중요함을 인지하고 국제 성취도 연구에서 우수한 성취도를 보이고 있는 한국, 일본, 싱가포르, 핀란드의 초등 수학교과서들의 소수의 곱셈과 나눗셈의 제시 방법을 분석하여 이에 대한 연산을 위한 교과서의 개발이나 수학 수업에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 소수의 곱셈과 나눗셈

소수는 소수점을 이용한 십진기수법의 형태로 분수를 새롭게 표현한 것으로 십진분수라는 뜻을 지닌 decimal fraction으로 불린다(문범식, 이대현, 2014). 즉, 소수의 곱셈과 나눗셈은 자연수의 곱셈과 나눗셈 연산 방법을 바탕으로 지도가 가능하며(Billstein, Libeskind, & Lott, 1990), 소수점 규칙을 적용하는 알고리즘을 바탕으로 쉽게 연산이 가능하기 때문에 소수의 곱셈과 나눗셈 연산이 별로 어렵지 않다는 주장 또한 있다(변희현, 2007). 따라서 소수의 곱셈과 나눗셈은 분수의 곱셈과 나눗셈에 비해 초등수학에서는 그리 주목을 받지 못해 왔다. 그러나 학생들은 소수점의 의미에 대한 이해가 부족하여 여러 오류를 일으키기도 한다.

예를 들면, 실생활 문제를 도입부에 제시하고 바로 연산식을 제시하여 이를 모델링 및 형식화하는 교과서 구성은 결국 학생들이 소수의 곱셈과 나눗셈 연산의 의미를 이해하지 못한 채 알고리즘 암기에만 몰두하는 학습을 하게 한다(이연미, 박성선, 2011). 따라서 소수의 곱셈과 나눗셈 지도에 있어 알고리즘의 형식화 이전에 학생들에게 각 연산의 의미 및 계산 원리에 대한 개념적 이해를 보다 깊게 하도록 할 필요가 있다.

진성현, 박만구(2016)는 Baroody와 Coslick(1998)이 제시한 곱셈의 의미 다섯 가지 중 소수의 곱셈에 적용할 수 있는 유형 세 가지(동수누가, 비교, 넓이)로 나누어 제시하였다. 이 중 동수누가는 같은 크기의 묶음이 몇 개 있는지를 동일하게 더해 나가는 과정이라 볼 수 있으며, 이는 (소수) \times (자연수)에는 적용이 가능하나 (자연수) \times (소수) 혹은 (소수) \times (소수)의 상황에는 적용하기가 어렵다. 예를 들면, '0.2 \times 0.4'의 연산은 동수누가의 의미로 접근하기란 쉽지 않으며 넓이의 관점에서 접근하는 것이 더 적합하다(김방진, 류성림, 2011). 또한, 김용태(2000)는 도형의 확대·축소의 측면에서 어떤 대상이 몇 배가 되는지를 통해 소수의 곱셈 지도가 가능함을 제시하였다.

한편, 배종수(2005)는 자연수의 나눗셈을 지도할 때 나눗셈을 곱셈의 역연산 관계로 지도하는 것은 초등학교 학습자 수준에 어려움이 있으므로, 등분제와 포함제의 개념을 사용하여 자연수의 나눗셈을 지도해야 함을 제안하였다. 소수의 나눗셈 또한 곱셈의 역연산 관계로 생각하기에는 초등학교 학습자 수준에 맞지 않기 때문에 등분제와 포함제의 관점에서 접근해볼 수 있다. 하지만 자연수의 나눗셈과는 달리 소수의 나눗셈에서는 나누는 수가 소수인지 또는 자연수인지에 따라 그 의미를 달리할 필요가 있다. 예를 들면, '1.2 \div 2'의 연산은 등분제의 관점에서 1.2를 동등하게 두 개로 나누어 생각할 수 있지만, '1.2 \div 0.2'의 연산은 등분제의 관점에서 생각하기 어려우며 0.2를 1.2에서 몇 번 떨어낼 수 있는지의 포함제 관점에서 접근해야 한다. 또한 '1.2 \div 0.2'의 연산은 포함제 외에 직사각형 넓이의 의미로서 넓이가 1.2인 직사각형 한 변의 길이가 0.2일 때 다른 한 변의 길이는 얼마인지 찾기 위한 과정으로 접근해볼 수도 있다(송근영, 방정숙, 2008).

2. 소수의 곱셈과 나눗셈의 유형

소수의 곱셈 유형은 크게 자연수와 소수의 곱셈, 소수끼리의 곱셈, 혼소수의 곱셈으로 나누어 생각할 수 있다(신준식, 2020). 자연수와 소수의 곱셈은 '0.6×2'와 같은 형태인 (소수)×(자연수), '2×0.5'의 형태인 (자연수)×(소수) 두 가지 유형으로 구분할 수 있으며, 소수끼리의 곱셈은 '0.8×0.3'과 같이 자연수 부분 없이 소수 부분으로만 구성된 소수들의 곱으로 볼 수 있다. 그리고 혼소수(mixed decimal)는 대소수(帶小數)라고도 불리며, '2.5'와 같이 (자연수)+(소수)로 이루어진 소수를 의미한다(박교식, 2013). 혼소수의 곱셈은 '2.8×1.2'와 같은 형태로 자연수와 소수의 합으로 이루어진 소수들 간의 곱, 즉, (혼소수)×(혼소수)로 볼 수 있다. 이와 관련하여 강완 외(2013)는 소수의 곱셈의 유형을 (소수)×(자연수), (자연수)×(소수), (소수)×(소수), (혼소수)×(소수)로 구분하였다.

한편, 소수의 나눗셈은 나누는 수가 자연수인지 혹은 소수인지에 따라 유형을 분류해볼 수 있다. 나누는 수가 자연수인 (소수)÷(자연수)가 있으며, 나누는 수가 소수인 유형으로는 (자연수)÷(소수), (소수)÷(소수)로 분류할 수 있다. 2015 개정 교육과정에 따른 교과서에서는 이 두 가지 유형을 각각 6학년 1학기 및 6학년 2학기에 나누어 제시하고 있다(교육부, 2019b, 2019c). 특히, 소수의 나눗셈은 소수를 분수로 바꾸어 계산하는 것과 밀접한 관련이 있으며 이는 자연수의 나눗셈-분수의 나눗셈-소수의 나눗셈으로 계산 절차에서의 연결성을 보인다. 따라서 연산의 의미를 이해하지 못한 채 기계적인 수행이 되지 않도록 연결성의 측면에서 각각의 나눗셈을 이해하도록 할 필요가 있다(김정원, 2017).

또한, 소수의 곱셈과 나눗셈은 각각의 연산을 어떻게 접근하느냐에 따라 그 유형을 분류해볼 수 있다. 최창우(2019)는 소수의 곱셈과 나눗셈의 유형으로 소수를 분수로 바꾸어 계산하는 분수 연산을 사용한 접근과 소수점 자리를 옮겨 자연수로 변환한 후 계산하는 범자연수의 연산을 사용한 접근을 제시하였다. 그 외에 (소수)×(자연수)나 (자연수)×(소수)의 연산에서 소수를 (자연수)+(소수)로 분해한 후 곱셈의 분배법칙을 이용하여 풀어나가는 유형(강완 외, 2013)도 생각해볼 수 있다.

3. 소수의 곱셈과 나눗셈 관련 선행 연구

소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 선행 연구로 소수의 연산에 대한 교과서 분석 연구들이 있다. 한국과 일본의 수학교과서의 소수의 곱셈 단원을 비교 분석한 연구(변희현, 2007)와 한국의 1차 교육과정부터 2009 개정 교육과정까지 소수의 곱셈과 나눗셈의 지도 순서와 방법을 종적으로 분석한 연구(진성현, 박만구, 2016)도 있다. 그 밖에 교과서 관련 연구로는 한국의 초등 수학교과서의 소수의 나눗셈 단원에서 나머지가 있는 소수의 나눗셈에서 몫과 나머지 취급에서 나타나는 문제점과 그 개선 방안에 대한 연구(박교식, 권석일, 2012)가 있다. 또한 소수의 연산에 관련된 연구로는 주로 학생들의 소수 연산에 대한 이해와 지도에 대한 연구(김수정, 방정수, 2007; 김채린, 2022; 문범식, 이대현, 2004; 윤희태, 2002; 이경아, 1996; 이연미, 박성선, 2011; 이종욱, 2007; Tian, Braithwaite, & Siegler, 2020)가 이루어졌다.

본 연구에서는 선행 연구를 크게 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 교과서 관련 연구와 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생들의 이해와 지도에 관한 연구로 나누어 고찰하고, 이로부터 추출한 내용을 바탕으로 본 연구의 분석 기준을 마련하였다.

가. 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 교과서 관련 연구

변희현(2007)은 한국 수학교과서에서는 소수의 곱셈을 가르칠 때 내재된 수학적 의미를 제한된 맥락에서만 제시하여 도입한다는 문제를 제기하였다. 이 연구에서는 소수의 곱셈에 내재된 비례관계를 직접적이고 적극적으로 다루지 못한 채 성급한 알고리즘화를 시도하여 학생들이 소수의 곱셈의 본질에 대해 충분히 이해하기 어렵다고 지적하면서 일본의 수학교과서의 소수의 곱셈에서 비례관계를 이용하는 사례를 소개하였다. 따라서 보다 의미있는 소수 곱셈의 학습 지도를 위해 비례관계에 기초한 소수 곱셈을 보다 적극적으로 다루는 것이 필요하다고 주장하였다.

진성현, 박만구(2016)는 1차~2009 개정 교육과정까지의 한국 초등 수학교과서의 소수의 곱셈과 나눗셈의 연산 유형을 분석하였다. 이들은 앞서 변희현(2007)에서 소수의 곱셈의 본질을 다루어야 한다고 주장한 것과 유사한 맥락으로 2009 개정 교육과정까지의 나눗셈

유형이 포함제와 등분제에 편중되어 있으며, 지도 방법과 평가에서 실생활 소재를 다양하게 다루지 않았음을 지적하면서 학생들에게 다양한 연산의 맥락을 제공할 필요가 있다고 언급하였다.

한편, 박교식, 권석일(2012)은 나눗셈에서 나머지의 개념은 정수 범위에서 파생된 개념이므로 나머지가 있는 소수의 나눗셈에서 몫과 나머지의 용어 사용의 주의가 필요하다고 강조하였다. 또한 한국 초등 수학교과서에서 몫을 구하는 범위에 따라 나머지가 변화함을 학습시켜 몫과 나머지의 관계에 대한 이해를 강화시킬 것인지, 몫을 자연수 범위로만 한정시켜 학습자의 부담을 경감시킬 것인지에 대한 논의가 필요하다고 주장하였다.

이와 같이 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 교과서 연구는 한국의 교과서를 종적으로 분석한 연구와 일본의 사례와 비교한 연구, 한국의 교육과정과 교과서에서 다루고 있는 나눗셈의 몫과 나머지에 대한 논의가 있었다. 그러나 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 다양한 나라의 최근 수학교과서를 횡적으로 비교 분석한 연구는 거의 없었다.

나. 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생들의 이해와 지도에 관한 연구

김채린(2022)은 6학년 학생들에게 간단한 수학적 도식과 이중 척도 모델을 활용하여 소수의 나눗셈 문장제를 해결하도록 하였다. 그리고 학생들이 만든 도식을 식과 연계하여 식을 만들어 보도록 하였다. 또한 학생들에게 자신의 아이디어를 공유할 수 있는 기회 제공과 교사의 적절한 개입 및 피드백을 통하여 학생들이 식을 만드는 과정에서 그 의미를 이해하게 되었다고 주장하였다.

김수정, 방정숙(2007)은 초등학교 5학년 학생들에게 십진블록을 활용하여 소수의 곱셈을 지도하는 과정에서 학생들의 개념적 이해 과정을 분석하였다. 그 결과 학생들은 연산의 다양한 의미를 십진블록으로 모델링하여 표현했고, 이러한 과정에서 소수의 곱셈 의미를 개념적으로 이해했다고 언급하면서 각 차시의 계산 원리가 포함된 간단한 문제나 식을 십진블록으로 모델링하여 연산의 의미를 이해하고 계산 원리를 발견하도록 지도해야 한다고 주장하였다.

이종욱(2007)은 학생들이 소수의 나눗셈 중 제수가

소수인 나눗셈에서 어려움을 겪고 있다고 지적했다. 그 어려움의 근간에는 자연수의 나눗셈에서 확장된 오개념인 '몫은 피제수보다 항상 작다'가 어느 정도 영향을 주고 있는 것으로 판단된다. 이에 그는 대해 학습자에게 언급할 필요가 있다고 주장하였다. 또한 문장제 문제 중 등분제 나눗셈이며 피제수가 1보다 작은 소수일 경우 학생들이 문제 상황을 나눗셈 수식으로 변환하는데 어려움을 겪고 있음을 밝혔다. 이러한 경우는 나눗셈 단원에서는 다루지 않고 비례식 학습 단원에서 도입하는 방법을 고려할 필요가 있다고 주장하였다.

이연미, 박성선(2011)은 이종욱(2007)이 제기한 문제 외에 소수점 찍기의 오류에 주목하였다. 이들은 소수의 곱셈과 나눗셈에서 소수점 자릿수를 세어서 찍는 전통적인 방법보다 자연수 부분이 있으면 그 부분만 곱해서 자리를 어렵하여 소수점을 찍고 자연수 부분이 없는 소수의 곱셈은 자리를 어렵하여 소수점을 찍는 방법을 쓰면 소수점 오류를 줄일 수 있다는 주장을 하였다. 문범식, 이대현(2014)은 초등학교 6학년 학생들의 소수 개념과 그 연산에 대한 이해도를 분석하여 소수의 연산 중에서 덧셈, 뺄셈보다 곱셈, 나눗셈 영역에서의 학생들의 이해도가 낮다는 것을 발견하였다. 특히, 이연미, 박성선(2011)에서 언급했듯이 이들도 소수의 곱셈과 나눗셈에서 자연수의 곱셈과 나눗셈처럼 계산하는 부분까지는 잘 해결하지만, 소수점을 알맞은 위치에 찍는 부분에서 많은 어려움을 느끼고 있다고 지적하였다. 그리고 학생들이 개념과 원리를 이해하기보다 풀이 방법을 단순 암기하고 익히는 형태로 학습하고 있다는 문제를 제기하였다.

그 밖에 소수 연산에 관한 예비초등교사의 교수내용 지식을 분석한 연구(송근영, 방정숙, 2008), 소수의 나눗셈에 대한 교사의 PCK와 실제 수업을 분석한 연구(김방진, 류성림, 2011)와 분수와 소수의 곱셈의 나눗셈 지도 순서에 관한 예비교사의 인식에 대한 연구(조진석, 김성준, 이동환, 2019)도 이루어졌다. 그리고 국외 연구로 미국의 6학년 학생 3359명을 대상으로 소수의 연산에 대한 교과서 문제를 분석하여, 교과서의 문제 제시가 학생들의 수학 성취도와 이해에 영향을 준다는 연구도 있다(Tian, Braithwaite, & Siegler, 2020).

이와 같이 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 학생들의 이해와 지도에 관한 선행 연구는 주로 계산 중 학생들

의 이해 과정과 그에 따른 어려움, 오류 등에 초점을 맞추고 있었다. 이에 본 연구에서는 여러 선행 연구를 살펴본 바와 같이 여러 나라의 소수의 곱셈과 나눗셈의 지도의 시기와 내용, 다양한 실생활 소재의 사용 등에 대하여 분석하고, 학생들의 계산 과정에 대한 이해를 돕는 시각적 모델과 알고리즘 형식화를 어떻게 제시하고 있는지 살펴보려고 하였다.

III. 연구방법

본 연구는 문헌 분석의 연구로, 한국, 일본, 싱가포르, 핀란드 초등 수학교과서 중에서 한국은 국정교과서, 다른 나라들은 각 나라에서 널리 사용하고 있는 최근의 초등 수학교과서를 선정하였다. 일본, 싱가포르, 핀란드의 수학교과서를 선정한 이유는 TIMSS나 PISA에서 높은 성취도를 보이는 나라들이기 때문이다. 분석 대상 교과서와 분석 방법은 다음과 같다.

1. 분석 대상

분석의 대상은 각 나라의 최근 수학과 교육과정과 초등 수학교과서로, 수학과 교육과정은 소수의 곱셈과 나눗셈과 관련한 내용 및 시기 등을 살펴보았다. 한국의 초등 수학교과서는 교육부에서 2015 개정 교육과정에 따라 발행한 국정 교과서를 대상으로 하였다.

일본의 교과서는 2020년에 개정된 學校圖書에서 출판한 みんなと學ぶ 小學校算數 4下와 5上 영역본 교과서를 분석하였다. 일본은 검정교과서를 사용하고 있기 때문에 현장에서 채택률이 높고 영어로도 번역된 교과서를 분석 대상으로 선정하였다.

싱가포르의 교과서는 2013년 개정된 Mathematics Syllabus Primary에 따른 My Pals are here!라는 교과서를 분석하였다. 현재 싱가포르의 교육과정은 2021년에 개정되어 순차적으로 적용되고 있는 중이나 4, 5학년의 경우 아직 새로운 교육과정에 의한 교과서가 출간되지 않아 출간된 교과서 중 가장 최신판을 사용하였으며, 다양한 교과서 비교 연구들에서 자주 사용되고 있으며 가장 인지도가 있는(박상인, 2017) 2016년 발행한 교과서를 분석 대상으로 하였다.

핀란드의 초등 수학교과서는 여러 종류의 교과서들

이 국내에 번역되어 출판되어 있다. 그중 2018년에 개정된 Otava Publishing Company의 Star Maths 교과서의 번역본이 가장 최신판으로 국내에 출판되어 이를 분석 대상으로 선정하였다.

[표 1] 분석 대상 교과서

국가	교과서명	출판사 (저자, 출판년도)
한국	수학 5-2, 6-1, 6-2	(주)천재교육 (교육부, 2019)
일본	みんなと學ぶ 小學校算數 英譯本 4年下, 5年上	學校圖書 (編集部 外, 2020)
싱가포르	My Pals are Here! Math (3rd Edition) 4-2, 5-2	Marshall Cavenish Education Education (Kheong et al., 2016, 2017)
핀란드	핀란드 수학교과서 Star maths 5a, 6a	Otava Publishing Company (Paivi, K. et al., 2018)

2. 분석 방법

이 연구에서 분석들은 각 나라의 소수의 곱셈과 나눗셈과 관련한 교육과정 및 교과서의 특징 중 선행연구에서 자주 다룬 시각적 알고리즘 형식화 방법을 포함하였다. 그리고 각 나라에서 어떻게 다루고 있는지 알아보기 위하여 소수의 곱셈과 나눗셈과 관련한 교육과정, 지도 시기 및 내용, 실생활 소재, 시각적 모델의 사용, 알고리즘의 형식화 방법을 비교 분석하였다.

본 연구의 분석 내용은 [표 2]와 같이 네 가지로 나누어 분석하였다. 첫째, 국가별로 소수의 곱셈과 나눗셈을 지도하기 위해 교육과정에서 어떻게 제시하고 있는지를 분석하였다. 각 나라에서 어떤 것을 필수적인 지도 내용으로 제시하고, 관련하여 어떤 추가적인 설명 등을 하고 있는지를 알아보았다.

둘째, 소수의 곱셈과 나눗셈의 지도 시기는 언제인지, 지도 시기별로 어떤 내용을 다루는지를 살펴보았다. 한국에서는 소수의 곱셈과 나눗셈을 5-2, 6-1, 6-2에 걸쳐 가르치고 있지만 다른 나라의 교과서에서는 그 이전 시기부터 여러 학년에 걸쳐 제시하거나 한 학년에서 한 번에 배우는 경우도 있다. 각 나라별로 어

면 시기에 배우는지, 배우는 내용들은 무엇인지 등의 특징을 살펴보았다.

[표 2] 분석 내용과 관점

내용	분석 관점
교육과정	국가별 교육과정에 소수의 곱셈과 나눗셈 관련 내용이 어떻게 제시되고 있는가?
지도 시기와 내용	소수의 곱셈과 나눗셈의 지도 시기와 내용은 어떠한가?
실생활 소재	소수의 곱셈과 나눗셈에 사용한 실생활 소재는 어떠한가?
시각적 모델	소수의 곱셈과 나눗셈의 시각적 모델은 어떻게 표현하는가?
알고리즘 형식화 방법	소수의 곱셈과 나눗셈을 어떻게 형식화하고 있는가?

셋째, 실생활 소재로 어떤 것들을 사용하고 있는지 살펴보았다. 다양한 맥락을 통하여 수학을 학습하는 것은 학생들에게 수학 학습에 대한 동기, 관심, 흥미를 제공하기 때문에 매우 중요하다. 따라서 나라별로 이러한 실생활 소재로 어떤 것을 사용하는지, 나라별로 소재 사용에 있어 어떤 특징이 있는지를 알아보았다.

넷째, 각 나라별로 소수의 곱셈과 나눗셈을 시각적으로 어떻게 표현하고 있는지 분석하였다. 소수의 곱셈과 나눗셈은 자연수의 곱셈과 나눗셈의 원리를 적용하여 해결할 수 있으나 그 표현 방법에 있어서 자연수와 같은 의미로 접근하기는 어렵다. 따라서 나라별로 다양한 시각적 모델을 살펴보고 어떤 효과를 기대하고 있는지를 분석하였다.

다섯째, 각 나라별 교과서에서 소수의 곱셈과 나눗셈을 어떻게 형식화하여 제시하고 있는지를 살펴보았다. 소수의 곱셈과 나눗셈을 형식화하기 위하여 분수나 범자연수의 곱셈, 나눗셈 방법을 이용하여 접근하는 방법, 세로셈 등의 방법이 있으며 구체적으로 다른 나라의 교과서에서는 어떻게 형식화하고 일반화하는지 살펴보았다.

IV. 분석 결과

1. 나라별 교육과정에서 제시한 소수의 곱셈과 나눗셈의 성취 내용

한국의 2015 개정 수학과 교육과정에서는 해당 학년에서 학습할 내용을 성취기준으로 상세화하여 제시하고 있다. 소수의 곱셈과 나눗셈 관련 성취기준은 소수의 곱셈과 나눗셈의 계산 원리의 이해, 나눗셈의 몫의 표현, 계산 결과 어림 등의 내용을 담고 있다. 성취기준 다음에 ‘학습 요소’, ‘교수·학습 방법 및 유의 사항’, ‘평가 방법 및 유의 사항’을 제시한다(교육부, 2015). 소수의 곱셈과 나눗셈과 관련된 ‘교수·학습 방법 및 유의 사항’은 ‘소수의 곱셈과 나눗셈은 계산 원리를 이해하는 수준에서 간단히 다루고, 복잡한 계산은 계산기를 사용할 수 있다’로 제안한다. 평가 방법 및 유의 사항에는 소수의 곱셈과 나눗셈에 관련된 내용은 따로 언급하고 있지 않다.

일본의 국가 교육과정인 학습지도요령(文部科學省, 2017)의 ‘각 학년의 목표와 내용’을 [표 3]에 정리하였다. 4학년에서는 승수와 제수가 정수인 경우의 소수의 곱셈, 나눗셈의 계산을 하는 지식, 기능을 익히도록 하고, 소수의 계산 방법을 알고 일상생활과 연결지어 사고력, 판단력, 표현력 등 수학 관련 역량을 기르는 목표를 제시하고 있다. 5학년에서는 소수의 승법, 제법의 의미, 계산 방법, 나머지의 크기, 정수와 같이 연산 법칙이 적용되는 것을 알고, 승수나 제수가 소수인 경우까지 수의 범위를 넓혀서 의미를 고찰하고 계산 방법을 생각하고 일상생활과 연결 짓도록 하는 것을 목표로 제시하고 있다.

싱가포르의 교육과정 Mathematics syllabus Primary one to six(Ministry of Education Singapore, 2013)에서는 가르쳐야 할 내용과 학생이 가져야 할 경험으로 나누어 학년별 학습 내용을 제시하고 있다. 4학년에서의 소수의 곱셈과 나눗셈은 소수점 2자리 이하를 한 자리 정수로 곱하고 나누기, 2단계 문장제 해결과 지정된 자리까지 답을 반올림하도록 하는 내용을 담고 있다. 또한 학생이 가져야 하는 학습 경험으로 수 디스크나 디지털 조작법을 통한 소수와 정수의 알고리즘 연결, 어렵감을 이용한 답의 합리성 확인, 그룹 활동으로 일상적인 경험을 바탕으로 한 문장제 만들기 등을 제시하고 있다. 5학년에서도 소수의 사칙연산을 배우도록 하고 있으며, 구체적으로 곱셈과 나눗셈에서는 소수점

이하 셋째 자리까지 제시된 소수에 10, 100, 1000을 곱하고 나누기와 길이, 무게, 부피 등의 단위의 변환을 소수의 곱셈과 나눗셈을 연결하도록 제시한다. 또한 마지막에는 네 가지 연산을 이용한 문장제 해결하기를 다룬다. 4학년에서와 마찬가지로 학생이 이 내용을 공부하면서 배워야하는 학습 경험으로 수 디스크를 사용하여 소수의 곱셈 나눗셈 설명, 다양한 측정 단위의 실제 사용 예 수집과 소통, 실제 액체의 양 측정을 통한 측정 간의 등가 결정, 선형 척도를 사용하여 측정 단위 사이의 관계 표시, 짝과 게임을 통한 단위 변환, 모둠 활동으로 문장제 만들기, 계산하기 전 어림을 통한 답의 합리성 확인 등을 제시하고 있다.

[표 3] 나라별 교육과정에 제시된 소수의 곱셈과 나눗셈 성취 내용

나라	성취 내용
한국	[초등학교 5~6학년] [6수01-13] 소수의 곱셈의 계산 원리를 이해한다. [6수01-14] '(자연수)÷(자연수)', '(소수)÷(자연수)'에서 나눗셈의 몫을 소수로 나타낼 수 있다. [6수01-15] 나누는 수가 소수인 나눗셈의 계산 원리를 이해한다. [6수01-16] 소수의 곱셈과 나눗셈의 계산 결과를 어림할 수 있다.
일본	[초등학교 4학년] (4) 소수와 그 계산에 관련된 수학적 활동을 통해 다음 사항을 습득할 수 있도록 지도한다. a. 다음과 같은 지식 및 기능을 익히는 것 (d) 승수나 제수가 정수인 경우의 소수의 승법 및 제법의 계산을 할 수 있다. b. 다음과 같은 사고력, 판단력, 표현력 등을 익히는 것 (a) 수의 표현 방법의 구조나 수를 구성하는 단위에 주목해, 계산의 방법을 생각하는 것과 동시에, 그것을 일상생활에 살린다. [초등학교 5학년] (3) 소수의 승법 및 제법에 관련된 수학적 활동을 통해 다음 사항을 습득할 수 있도록 지도한다. a. 다음과 같은 지식 및 기능을 익히는 것 (a) 승수나 제수가 소수인 경우의 소수의 승법 및 제법의 의미를 이해한다. (b) 소수의 승법 및 제법의 계산을 할 수 있는 것 또 나머지의 크기에 대해 이해한다. (c) 소수의 승법 및 제법에 대해서도 정수의 경우와 같은 관계나 법칙이 성립되는 것을 이해한다. b. 다음과 같은 사고력, 판단력, 표현력 등을 익히는 것 (a) 승법 및 제법의 의미에 주목하고, 승수나 제수가 소수일 때까지 수의 범위를 넓혀 승법 및 제법의 의미를 재검토함과 동시에, 계산의

	방법을 생각하거나 그들을 일상생활에 살리게 한다.
싱가포르	[초등학교 4학년] 하위 항목 소수/3. 곱셈과 나눗셈 3.1 소수(소수점 2자리 이하)를 1자리 정수로 곱하고 나누기 3.2 4가지 연산을 포함하는 2단계 문장제 해결하기 3.3 지정된 자리까지 답을 반올림하기 [초등학교 5학년] 하위항목 소수/3. 사칙연산 1.1 소수(소수점 3자리까지)와 10, 100, 1000을 계산기 없이 곱하고 나누기 1.2 10진수 형식의 더 작은 단위에서 더 큰 단위로 또는 그 반대로 측정 변환하기 ·킬로미터 및 미터/미터 및 센티미터/킬로그램 및 그램/리터 및 밀리리터 1.3 4가지 연산을 포함하는 문장제 해결하기
핀란드	[초등학교 3~6학년] S2 수치와 계산 · 계산 기능과 계산 기능 간의 연결을 활용한다. · 결과의 크기를 추정하는 방법을 배우도록 숫자를 반올림하고 근삿값으로 계산한다. · 곱셈과 나눗셈은 자연수 곱셈과 나눗셈을 기반으로 계산한다. · 분수, 소수 및 백분율 간의 연결을 활용한다. [7-9학년] S2 수치와 계산 · 소수 계산 기술을 심화한다.

핀란드의 국가 교육과정은 1~9학년을 기초교육과정으로 묶어 제시하는데, 기초교육기간인 9개 학년 중 처음 6년은 한국의 초등학교와 같이 담임교사가 대부분의 과목을 가르치며, 7~9학년은 주로 교과 교사가 서로 다른 과목을 지도한다(Finnish National Board of Education, 2014). 또한 한국과는 달리 내용 영역에 따른 지도 내용을 세세히 다루기보다는 수학과 목적에 따른 내용 영역과 역량을 제시한다. 소수의 곱셈과 나눗셈 관련 교육과정 내용은 3-6학년 'S2 수치와 계산'에 나타나며, 해당 내용 영역 중 계산 기능과 계산 기능 간의 연결을 활용하는 내용, 결과의 크기 추정을 통해 숫자를 반올림하고 근삿값으로 계산하는 내용, 곱셈과 나눗셈은 자연수 곱셈과 나눗셈을 기반으로 하는 내용, 분수와 소수, 백분율 간의 연결을 활용하는 내용을 찾을 수 있다. 따라서 소수의 곱셈과 나눗셈은 자연수 곱셈과 나눗셈을 기반으로 하여 다루기 때문에 (소수)×(소수)나 (소수)÷(소수) 등은 6학년에서 다루지

않는다. 7-9학년에서는 'S2 수치와 계산' 내용 영역에서 이전 학년에서 학습한 소수의 계산 기술을 심화하도록 제시되어 있다. 즉, 6학년에서 학습한 자연수 기반의 소수의 곱셈과 나눗셈을 바탕으로 7학년에서는 두 수가 모두 소수인 곱셈과 제수가 소수인 나눗셈 연산을 심화하여 다룬다.

각 나라의 교육과정의 문서 체제나 성취기준을 제시하는 틀이 다양하여 직접적인 비교가 어려우나, 성취기준의 '내용' 위주로 한정하여 특징을 찾아보면 다음과 같다. 각 나라마다 모두 계산과 관련된 기능, 원리를 기본적으로 익히는 것을 제시하는 공통점이 있으며, 특히 한국과 핀란드의 경우 계산 결과 어림에 대한 내용을 제시하고 있어 교육과정에서 결핍을 추정하는 방법에 대하여 강조하고 있음을 알 수 있다. 일본의 경우 교육과정에 계산을 바탕으로 일상생활에 이를 연결짓는 내용을 제시하고 있으며 싱가포르의 경우에도 소수의 연산 영역의 마지막에 문장제 해결에 대해 내용으로 제시하고 있어 소수의 곱셈, 나눗셈을 배운 후 이를 생활에 응용하는 부분에 중점을 두고 있음을 알 수 있다.

또한 일본의 경우 소수의 곱셈과 나눗셈을 배울 때, 먼저 승수나 제수가 자연수인 것에서 소수인 경우까지 수의 범위를 넓혀서 적용하는 내용과 정수와 같은 연산 법칙이 적용되는 것에 대해 언급하고 있다. 핀란드도 소수의 곱셈과 나눗셈을 자연수 곱셈과 나눗셈을 기반으로 하도록 하는 내용을 제시하여 이들 두 나라는 배운 내용을 확장하여 연산을 수의 범위가 늘어나도 적용할 수 있도록 하는 것을 특별히 중요하게 생각하고 있는 것으로 보인다.

2. 나라별 소수 연산의 지도 시기와 내용

한국은 5학년 2학기에 소수의 곱셈을 다루고 있고, 6학년 1학기과 2학기에 소수의 나눗셈을 다루고 있다. 그리고 소수 곱셈과 나눗셈을 학년, 학기, 단원으로 구분하여 지도하고 있다. 소수의 곱셈의 경우 1보다 작은 소수와 자연수의 곱셈, 1보다 큰 소수와 자연수의 곱셈, 자연수와 1보다 작은 소수의 곱셈, 자연수와 1보다 큰 소수의 곱셈을 순차적으로 다루고 소수점의 위치와 원리에 대하여 지도한다. 이후 1보다 작은 소수끼리의 곱셈과 1보다 큰 소수끼리의 곱셈을 순서대로

다룬다.

소수의 나눗셈은 2학기에 걸쳐서 지도하고 있다. 먼저 1학기에는 $(\text{소수}) \div (\text{자연수})$ 를 다룬다. 이후 소수점 아래 0을 내려 계산해야 하는 $(\text{소수}) \div (\text{자연수})$, 몫의 소수 첫째 자리에 0이 있는 $(\text{소수}) \div (\text{자연수})$ 를 다루고 $(\text{자연수}) \div (\text{자연수})$ 의 몫을 소수로 나타내기, $(\text{자연수}) \div (\text{자연수})$ 의 몫을 반올림하여 필요한 자리까지 나타내는 것까지 자세하게 다룬다. 다음으로 2학기에는 $(\text{소수 한 자리 수}) \div (\text{소수 한 자리 수})$, $(\text{소수 두 자리 수}) \div (\text{소수 두 자리 수})$ 를 다룬 뒤에 자리수가 다른 두 소수의 나눗셈을 다루고, $(\text{자연수}) \div (\text{소수})$ 의 계산을 다룬다. 이후 소수의 나눗셈 결과 어림, 소수의 나눗셈 검산 및 $(\text{소수}) \div (\text{소수})$ 에서 몫이 나누어떨어지지 않거나 몫이 복잡할 때에 반올림하여 나타내는 방법까지 다룬다. 특히 소수의 나눗셈 검산에서는 소수의 나눗셈에서 나머지를 구하는 방법을 다루는 것은 특징적이다.

일본은 4학년 2학기에 소수의 개념에 대해 공부한 후, 소수의 덧셈과 뺄셈을 다루고 얼마 지나지 않아 소수의 곱셈과 나눗셈에 대해 공부하게 된다. $(\text{소수}) \times (\text{자연수})$, $(\text{소수}) \div (\text{자연수})$ 의 원리를 간단하게 배운 후, 그 다음 단원에서 다시 $(\text{소수}) \times (\text{자연수})$, $(\text{소수}) \div (\text{자연수})$ 세로셈으로 형식화하는 방법을 다룬다. 다음 다양한 나눗셈에서는 소수점 아래 0을 내려 계산해야 하는 나눗셈과 나누어떨어지지 않는 나눗셈을 다룬 후, 실생활 맥락 문제에서 소수의 나눗셈에서 나머지를 구해야 하는 경우를 제시한다. 5학년 1학기에서는 $(\text{자연수}) \times (\text{소수})$, $(\text{소수}) \times (\text{소수})$ 에 대하여 학습하도록 한 후, 곱셈과 관련된 연산 법칙을 제시하여 이를 이용하여 소수의 곱셈 문제를 해결하도록 한다. 다음 나눗셈 단원에서는 $(\text{자연수}) \div (\text{소수})$, $(\text{소수}) \div (\text{소수})$ 를 다룬 후 제수가 1 미만의 소수와 1이상인 수인 경우의 몫을 비교해보도록 하여 법칙을 발견하기, $(\text{소수}) \div (\text{소수})$ 에서 0을 내려 계산해야 하는 경우, 몫을 반올림하여 나타내기 등 나눗셈의 다양한 경우들과 나머지의 소수점의 위치를 학습하도록 하고, 마지막에는 응용문제들을 이중 수직선을 포함한 다이어그램을 이용하여 해결하도록 한다.

싱가포르의 경우, 4학년 2학기에 소수의 개념에 대해서 학습한 후 바로 그 다음 소수의 사칙연산 단원, 소수의 문장제 단원을 연달아 제시하고 있다. 4학년 소수의 곱셈의 경우 올림이 없는 $(\text{소수}) \times (\text{자연수})$ 를 배

운 후, 올림이 있는 (소수)×(자연수)를 배운다. 4학년 소수의 나눗셈에서는 내림이 없는 (소수)÷(자연수)를 배운 후, 내림이 있는 (소수)÷(자연수), 몫이 소수인 (자연수)÷(자연수)의 순서로 배운다. 이후 몫이 나누어 떨어지지 않는 경우도 다루고 있으며, 이 경우 반올림

을 통하여 지정된 자리까지만 수를 나타내도록 한다. 소수의 사칙연산이 끝난 후, 바로 제시되는 소수의 문장제 단원에서는 앞서 배웠던 소수의 네 연산을 이용한 여러 응용 문제들을 해결할 수 있도록 하고 있다. 문장제 단원에서는 문제를 해결하기 위해 필요한 시각

[표 4] 나라별 소수의 곱셈, 나눗셈 지도 시기와 주요 내용

시기 (학년-학기)	한국	싱가포르	일본	핀란드
4	1			
	2	<p>11. 소수의 사칙연산</p> <p>3) 소수의 곱셈 (소수)×(자연수)</p> <p>4) 소수의 나눗셈 (소수)÷(자연수)</p> <p>12. 소수: 문장제</p>	<p>14. 소수로 계산하는 현명한 방법을 생각해 봅시다.</p> <p>1) (소수)×(자연수)</p> <p>2) (소수)÷(자연수)</p> <p>15. 세로셈으로 어떻게 소수를 곱하고 나누는지 생각해봅시다.</p> <p>1) (소수)×(자연수)의 계산</p> <p>2) (소수)÷(자연수)의 계산</p> <p>3) 다양한 나눗셈</p> <p>4) 어떤 연산을 사용할까?</p>	
5	1		<p>6. 연산 규칙을 계산하고 사용하는 방법에 대해 생각해 봅시다.</p> <p>1) (자연수)×(소수)</p> <p>2) (소수)×(소수)</p> <p>3) 계산의 방법</p> <p>7. 연산 규칙을 계산하고 사용하는 방법에 대해 생각해 봅시다.</p> <p>1) (자연수)÷(소수)</p> <p>2) (소수)÷(소수)</p> <p>3) 다이어그램을 그려 생각해 봅시다.</p>	<p>5. 소수의 곱셈 1</p> <p>6. 소수의 곱셈 2</p> <p>7. 세로셈을 이용한 소수의 곱셈</p> <p>8. 소수에 10, 100, 1000 곱하기</p>
	2	<p>4. 소수의 곱셈</p> <p>1) (소수)×(자연수)</p> <p>2) (자연수)×(소수)</p> <p>3) 곱의 소수점의 위치와 원리</p> <p>4) (소수)×(소수)</p> <p>5) 실생활 문제 해결</p>	<p>9. 소수</p> <p>1) × 10, 100, 1000과 그 배수</p> <p>10, 100, 1000, 몇십, 몇백, 몇천 곱하기</p> <p>2) ÷ 10, 100, 100과 그 배수</p> <p>10, 100, 100, 몇십, 몇백, 몇천으로 나누기</p> <p>3) 측정 단위의 변환</p> <p>4) 문장제 문제 해결</p>	
6	1	<p>3. 소수의 나눗셈</p> <p>1) (소수)÷(자연수)</p> <p>2) (자연수)÷(자연수)</p> <p>3) 실생활 문제 해결</p>		<p>3. 소수의 곱셈</p> <p>4. 소수에 10, 100 곱하기</p> <p>5. 소수와 자연수의 나눗셈</p> <p>6. 부분으로 나누어 나눗셈하기</p> <p>7. 분해하여 나눗셈하기</p> <p>8. 세로셈으로 나눗셈하기</p> <p>9. 몫의 반올림</p>
	2	<p>4. 소수의 나눗셈</p> <p>1) (소수)÷(소수)</p> <p>2) (자연수)÷(소수)</p> <p>3) 소수의 나눗셈 결과 어렵</p> <p>4) 소수의 나눗셈 계산</p> <p>5) 몫의 반올림</p> <p>6) 실생활 문제 해결</p>		

적 모델과 답을 구하는 과정 안내 등을 구조화하여 상세하게 제시하고 있는 것이 특징이다. 5학년 2학기에 도 '소수' 단원이 제시되는데 여기에서는 소수와 10, 100, 100과 몇 십, 몇 백, 몇 천을 곱하고 나누는 것을 주요 지도 내용으로 한다. 이때 $(\text{소수}) \times 10$, $(\text{소수}) \times (\text{몇 십})$, $(\text{소수}) \times 100$, 1000과 $(\text{소수}) \times (\text{몇 백})$, (몇 천) 의 순서로 제시한다. 다음 소수의 나눗셈은 소수를 10, 100, 1000나 그 배수로 나누는 내용으로, 먼저 소수를 10으로 나누어보고, $(\text{소수}) \div (\text{몇 십})$, $(\text{소수}) \div 100$, 1000과 $(\text{소수}) \div (\text{몇 백})$, (몇 천) 의 계산을 학습하도록 한다. 소수 단원의 세 번째 소단원인 측정 단위의 변환에서는 무게, 길이, 부피 등의 단위 변환을 학습하게 된다. 각 측정 단원에서 이를 학습하지 않고, 소수의 곱셈과 나눗셈을 배우고 난 후 이를 이용하여 여러 측정 단위의 변환을 한꺼번에 학습하여 수학 내에서 주제를 통합한 것이 특징이다. 마지막 소단원인 문장제 단원은 앞서 배운 소수의 곱셈과 나눗셈을 활용한 응용문제를 해결하도록 하고 있다.

핀란드에서는 소수를 4학년 2학기에 처음 다루기 시작하는데, 4학년 2학기에서는 소수의 개념과 소수의 덧셈과 뺄셈을 다루고 있다. 이후, 5학년 1학기에서 $(\text{소수}) \times (\text{자연수})$ 와 세로셈의 계산, 소수에 10, 100, 1000 곱하는 방법을 공부한다. 6학년 1학기에서도 승수가 자연수인 소수의 곱셈과 제수가 자연수인 나눗셈, 나아가 소수의 나눗셈 몫을 반올림하여 나타내는 학습으로 이어진다. 그러나 곱셈과 나눗셈은 자연수의 곱셈과 나눗셈을 기반으로 한다는 교육과정 내용에서도 알 수 있듯이 $(\text{소수}) \times (\text{자연수})$, $(\text{소수}) \div (\text{자연수})$ 와 같이 자연수가 섞여 있는 형태로만 제한하여 제시한다. 이어 7학년 1학기에서 $(\text{소수}) \times (\text{소수})$ 혹은 $(\text{소수}) \div (\text{소수})$ 와 같이 자연수 기반이 아닌 소수의 곱셈과 나눗셈 연산을 중등학교 이상에서 다룸을 알 수 있다.

각 나라의 지도 내용과 시기의 특이점을 살펴본 결과, 한국의 경우 다른 나라들에 비해 소수의 개념과 소수의 연산을 여러 학기에 나누어 배우는 것을 알 수 있다. 한국의 경우 소수의 도입을 3-1에, 소수의 덧셈과 뺄셈은 4-2, 곱셈과 나눗셈은 5-2, 6-1, 6-2에 다루고 있어 소수의 도입과 소수의 사칙연산을 한 학기 내에 집중적으로 다루는 싱가포르나 일본과는 대조적이라고 할 수 있다(김정원, 권성룡, 2017). 또한 소수의 나눗셈의 경우 차시별로 소수의 나눗셈 계산 과정 중

나올 수 있는 다양한 경우들을 세분화하여 체계적으로 나누어 제시하고 있어, 소수의 나눗셈 계산 과정에서 학생들이 겪는 어려움을 최소화하려는 것으로 보인다.

일본의 경우 계산 과정 측면에서 한국만큼 세세하게 나누어놓지는 않았으나, 곱셈과 관련된 연산 법칙을 적용하여 문제 해결하기, 나눗셈에서 제수가 1 미만/1 이상인 경우 몫을 비교하거나 소수의 나눗셈에서 나머지 구하기 등 소수의 곱셈과 나눗셈에서 다른 나라와 달리 다양한 상황을 학습할 수 있도록 한 것이 특징이다. 그리고 4학년에서 소수의 곱셈과 나눗셈을 처음 도입할 때 원리만 먼저 제시한 후, 다음 단원에서 세로셈으로 형식화하는 방법을 지도하여 학생들이 먼저 개념적 이해에 초점을 맞출 수 있도록 하였다.

싱가포르의 경우 4학년에서 곱셈의 승수, 나눗셈의 제수가 자연수인 경우만을 다루고, 5학년에서는 10의 거듭제곱과 그 배수가 승수, 제수인 경우만을 다루어 실질적으로 5학년에서는 소수점의 위치 변화에 초점을 맞추는 경향이 있으며, 이를 응용하여 측정 단위의 변환을 소수의 곱셈과 나눗셈에서 다루는 것도 특징적이다. 그리고 배유경, 류성림(2011)에서도 분석한 것처럼, 싱가포르 중등 교육과정에서는 따로 소수의 곱셈, 나눗셈을 다루지 않고 있어 이를 응용하여 소수의 곱셈과 나눗셈을 계산할 수 있도록 하는 것으로 보인다.

핀란드의 경우 초등에서 승수와 제수가 자연수인 소수의 곱셈과 나눗셈만을 다루고 있으며, 소수에 10, 100, 1000 등을 곱하여 자릿값이 바뀌는 것을 집중적으로 다루는 것 또한 특징이다. 또한 소수끼리의 곱셈이나 나눗셈은 중등 과정에서 다루어 다른 나라에 비해 소수의 사칙연산이 늦은 시기에 마무리되는 것을 알 수 있다.

한국과 일본은 제수가 자연수인 나눗셈과 함께 소수인 나눗셈까지 다루고 있으나 싱가포르와 핀란드는 초등학교 수준에서는 제수가 자연수인 나눗셈만 다룬다는 공통점이 있다.

3. 소수의 곱셈과 나눗셈에 사용한 실생활 소재

가. 한국

한국의 교과서에는 단원마다 그 단원을 이끌고 가는 하나의 맥락이 있고 그것을 단원 도입 삽화로 제시하고 있으며 그 맥락에 따른 차시 구성이 이루어지

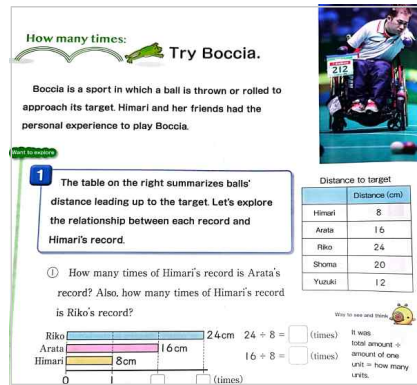
는 특징이 있다. 우선 소수의 곱셈의 경우 마트에서 물건을 사고 산 물건을 실생활에 사용하는 상황이 제시되어 있다. 구체적으로 바나나우유 만들기, 선물 포장하기, 과자 만들기, 식탁을 덮기 위해 필요한 종이를 구매하기 및 세제의 양을 알아보는 맥락으로 도입을 한다. 도전수학과 탐구수학에서는 지진 발생 횟수나 나폴레옹의 키 비교, 영양의 몸길이 비교의 소재 사용한다. 소수의 나눗셈의 경우는 1학기에는 학생들이 과학 축제에 참여하여 여러 가지 체험을 하면서 겪는 소수의 나눗셈 관련 상황이 제시되어 있다. 구체적으로 무게 재기 체험, 용해 실험 체험, 황토 염색 체험, 향초 만들기 체험 등에서 겪을 수 있는 무게 구하기, 넓이 구하기, 용액의 양 구하기 등의 상황이 제시되었고, 도전수학과 탐구수학에서는 색종이 1장의 무게와 두께 구하기 및 모둠 친구들의 달리기 기록과 다양한 길이의 평균을 비교하는 맥락을 제시한다. 2학기는 학생들이 학예회를 위한 준비를 하면서 겪게 되는 소수의 나눗셈과 관련된 실생활 맥락이 제시되어 있다. 구체적으로 철사로 꽃 만들기, 페트병에 색 모래 나눠 담기, 사진 확대하기, 옷감 가격 알아보기, 음료수의 양 및 페인트의 양 알아보기의 상황을 제시하였으며 도전수학과 탐구수학에서 음료와 아이스크림의 가격 비교하기, 동식물의 길이 비교하기의 맥락을 제시한다.

나. 일본

일본의 교과서(學校圖書 編集部 外, 2020a)는 모든 단원은 아니지만 해당 단원에서 배우면 해결할 수 있는 실생활 맥락이 있고, 이를 학습 주제로 끌고 가는 경우에 그 맥락을 도입에 만화로 제시하여 나타낸다. 4下の 소수의 곱셈에서는 한 병에 1.2L인 주스 3병이 있는데 총량을 어떻게 계산하는지에 대한 의문을 제기하면서 도입한 이후에 주스의 양을 계산하는 맥락을 이용하여 학습 내용을 계속해서 이어나간다. 5上の 소수의 곱셈에서는 꽃을 만들기 위해 필요한 리본의 양을 구하는 방법에 대한 의문을 제기하면서 도입한 이후 관련 내용을 다루고, 필요한 페인트의 양 구하기, 화단의 넓이 구하기, 용액의 양 구하기 등 한국과 유사한 소재를 사용한다.

소수의 나눗셈의 경우 4下에서는 철사의 길이, 화단의 넓이 구하기, 자전거의 이동 거리 구하기, 리본 나누어 가지기, 주스 나눠 마시기의 소재를 사용하였다.

5上에서는 주스의 양, 페인트의 양, 철사의 무게와 길이, 철봉의 길이에 따른 무게, 화단의 넓이 등의 소재를 사용하였다. 소수의 곱셈, 나눗셈에 거의 유사한 소재를 사용하였으며 한국에서 다루고 있는 실생활 소재와도 유사했지만, 그 소재를 활용한 맥락은 오히려 더 한정적임을 확인할 수 있다.



[그림 1] 일본 교과서에 제시되어 있는 보치아 경기 기록 계산 맥락(學校圖書 編集部 外, 2020a, p.78)

그러나 [그림 1]과 같이 뇌성 마비 중증 장애인과 운동성 장애인만이 참가할 수 있는 운동 경기 종목인 보치아(Boccia)를 소개하며 소수의 나눗셈을 이용하여 이 경기의 기록을 계산해보도록 하는 부분을 2쪽을 할애하여 제시하여 사회 정의를 반영함과 동시에 실생활 맥락에서 소수의 나눗셈을 활용할 수 있도록 한 점이 인상적이다.

다. 싱가포르

싱가포르의 경우 처음 어떤 개념을 도입할 때 간단한 실생활 맥락을 사용하여 도입한다. 배워야 할 상황에 알맞은 간단한 문제를 제시하고, 문제 상황이 어떻게 될지 설명해보도록 한다. 연산 상황의 도입을 제외하고는 단원의 본차시나 정리에서 실생활 문제를 사용하는 경우는 없으며, 대부분 시각적 모델과 알고리즘의 형식화, 패턴 드릴 등의 탈맥락적인 문제만을 다루고, 실생활과 관련된 문제들은 문장제 단원에서만 제시하고 있다.

4B에 소수의 사칙연산에 바로 뒤따라 나오는 소수의 문장제 단원은 소단원 2개로 이루어져있고, 소수의

사칙연산을 단원 내에서 구분 없이 혼합하여 다루고 있다. 소단원 1에서는 앞서 배운 소수의 사칙연산 중 한 가지만을 가지고 해결할 수 있는 단순한 구조의 문제를 제시하며, 옷감의 길이, 호스의 길이, 학교에서 공원까지의 거리, 초콜릿의 가격, 수학책의 높이, 팔찌의 가격, 가방의 무게 구하기 등을 소재로 사용한다. 소단원 2에 나오는 2단계 문제는 소수의 연산을 두 가지 이상 사용하도록 하는 문제 해결 단계가 복잡한 문제를 제시하고 있다. 예를 들어 수학교과서 7권이 쌓여 있는 높이를 제시한 후, 9권이 쌓여있을 때의 높이를 얼마인지 묻는 문제가 나오는데 이 경우 한 권의 높이를 구하기 위하여 소수의 나눗셈을, 9권의 높이를 구하기 위하여 소수의 곱셈을 이용하는 등 2단계의 과정을 거쳐야 한다. 전체적으로 다양한 해결 방법을 가진 실생활 문제가 제시되는 반면 문제의 소재들은 소단원 1과 비슷하다. 주목할만한 점으로는 ‘직접 활동하기(Hands-on Activity)’에서 장난감 가게의 광고지를 보고 학생들이 소수로 제시된 장난감의 가격을 소재로 하여 모둠별로 직접 소수의 연산 문장제 문제를 내고 친구에게 묻도록 하는 문제 활동을 제시하고 있다.

5B의 소수 단원에서 문장제 단원은 소수 단원 안의 마지막 소단원으로 소수 단원에서 배운 10의 거듭제곱과 그 배수를 소수에 곱하거나 나누는 문제를 해결한다. 소재는 4학년 문장제 단원의 소재였던 길이, 금액, 무게, 들이에 도형의 둘레 혹은 변의 길이 구하기 정도가 추가되었다. ‘직접 활동하기(Hands-on Activity)’에서는 슈퍼마켓 전단지의 여러 물건 가격을 보고 학생들이 모둠별로 문제를 만들고 친구에게 해결할 수 있는 활동을 제시한다.

라. 핀란드

핀란드 교과서 또한 각 차시가 시작될 때 실생활 맥락에서 소수의 곱셈과 나눗셈이 필요한 상황을 제시하고 그에 따른 연산을 형식화할 수 있도록 구성되어 있다. 소수의 곱셈의 경우 0.5m씩 3번 뛰었을 때 뛰 거리 계산하기, 2.60 유로의 앱 2개를 다운 받았을 때의 가격 계산하기 등의 상황을 제시하며 (소수)×(자연수)를 도입하였으며, (소수)×(10, 100, 1000) 연산이 필요한 상황에서도 비슷하게 물건을 구입하는 상황에서 물건 하나의 값을 제시하고 총 얼마가 필요할지 계산하는 장면이 등장한다. 소수의 곱셈 단원의 실생활 소

재는 모두 길이와 금액 계산만을 다루고 있으며, 길이의 단위(m)와 화폐 단위(€)가 마지막 계산 결과에만 제시되지 않고 연산 과정에 계속해서 등장하는 것이 특징적이다. 특히 (소수)×(10, 100, 몇십, 몇백)을 배우는 차시에서는 어떤 물건을 구입하는 상황을 가정하여 10개, 100개 등을 구입하면 얼마인지를 구하는 금액과 연계한 소재를 사용하였다. 구입 물건의 종류 또한 스마트폰이나 태블릿, 컴퓨터에서 사용하는 어플리케이션의 가격을 구하는 소재가 많은 것 또한 한 가지 눈여겨 볼만한 점이다.

나눗셈의 경우 천을 똑같은 길이로 자르는 상황, 여러 날 동안 자전거 탄 거리의 평균을 구하는 상황, 용돈을 자녀에게 똑같이 나누어 주는 상황 등을 통해 소수의 나눗셈이 필요한 상황을 제시하고 있다. 나눗셈의 연산 과정 또한 해당 상황에서 쓰인 단위가 그대로 연산 과정에도 드러나는 점이 특징적이라 볼 수 있다. 또한, [그림 2]와 같이 교과서 자투리 공간에 박테리아의 크기를 소수로 제시한 상황이나 10억분의 1 크기까지 읽어낼 수 있는 혈관 속 나노로봇 상황 등을 제시한 부분이 눈에 띄는데, 이는 실생활 속 미세한 숫자를 확인해야 할 때 소수의 연산이 필요함을 이해할 수 있도록 구성된 것으로 보인다.



[그림 2] 소수가 이용되는 실생활 장면 (Paivi, K. et al., 2018b, p.24, p.48)

네 나라의 소수의 곱셈과 나눗셈에서 다루는 실생활 소재들을 살펴본 결과, 네 나라 모두 단원이나 문제 상황을 도입할 때 복잡하지 않은 실생활 소재를 사용한다는 공통점이 있었다. 특히, 한국의 경우 단원 도입에 사용된 소재가 느슨하게나마 한 단원을 이끌고 가는 역할을 하고 있다. 또한 한국의 도전수학이나 탐구수학, 일본의 뇌성 마비 중증 장애인과 운동성 장애인만이 참가할 수 있는 운동 경기 종목인 보치아(Boccia)에서 소수의 나눗셈을 활용하여 경기 기록을

계산하는 상황, 싱가포르의 ‘직접 활동하기(Hands-on Activity)’에서 장난감 가게의 광고지를 가지고 학생들이 모둠별로 직접 문장제 문제를 만들고 친구에게 해결하도록 하는 활동, 핀란드의 교과서 자투리 공간에 박테리아의 크기를 소수로 제시한 상황이나 10억분의 1 크기까지 읽어낼 수 있는 혈관 속 나노로봇 상황 등의 제시는 한 상황을 보다 상세하게 들여다보고 소수의 곱셈과 나눗셈을 활용하도록 한다는 것에서 유사한 부분이다.

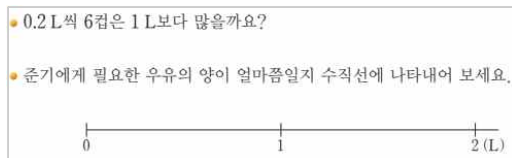
소재 사용에서 가장 큰 차이점 중 하나는 금액 소재 사용 여부이다. 한국과 일본의 경우 금액과 관련된 소재를 다루지 않는데, 이는 화폐 단위의 차이에서 기인한 것으로 보인다. 싱가포르는 싱가포르 달러(\$)와 센트(c), 핀란드 또한 유로(€)와 센트(c)로 주 화폐 단위와 보조 화폐 단위가 나누어져 있어 \$1.2(=1달러 20센트)와 같이 소수점 표기가 가능하나, 한국이나 일본의 경우 단일 화폐 단위를 사용하고 있어 일상생활에서 금액을 표시할 때 소수점 이하 단위를 사용하지 않는다. 이러한 화폐 단위의 차이가 교과서의 실생활 소재의 활용에서의 차이로 이어지는 것을 알 수 있다.

4. 소수의 곱셈에 이용된 모델과 형식화 방법

가. 한국

한국의 초등 수학교과서(교육부, 2019a)에서는 단일 수직선 모델과 이중 수직선 모델, 영역 모델을 이용하여 소수의 곱셈의 결과값을 어렵히는 방법을 제시하고 있다.

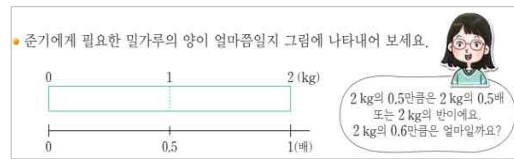
먼저, 1차시와 2차시에 다루고 있는 소수와 자연수의 곱셈의 경우에는 [그림 3]과 같이 소수의 자연수 배만큼 직관적으로 나타내어 보도록 유도하고 있다.



[그림 3] (소수)×(자연수)의 모델(교육부, 2019a, p.78)

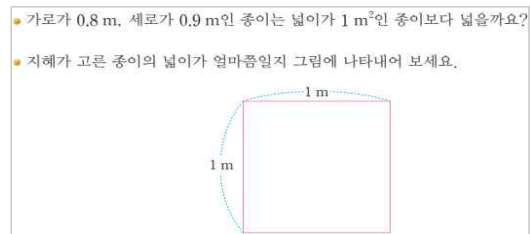
3~4차시에 다루는 자연수와 소수의 곱셈에 사용한 모델은 이중수직선 모델로, [그림 4]와 같이 아래가 승

수를 나타내는 척도로 수직선 형태이고, 위는 피승수의 양을 나타내는 척도이며 띠의 형태이다. 학생들은 일반적으로 곱의 결과값이 커진다는 오개념을 가지고 있는 것을 고려하여 자연수와 소수의 곱을 이중 수직선에 나타내어 봄으로써 승수보다 그 결과값이 작다는 것을 시각적으로 확인한 뒤에 계산 과정을 학습하도록 한다.



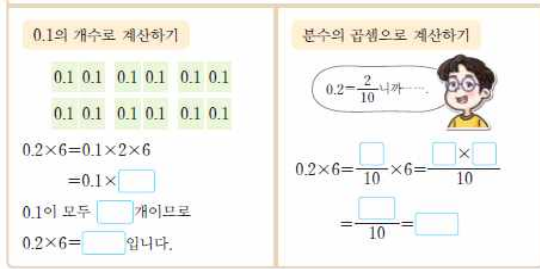
[그림 4] (자연수)×(소수)의 모델(교육부, 2019a, p.82)

1보다 작은 두 소수의 곱을 다루는 5차시에서는 [그림 5]와 같은 직사각형 영역 모델을 사용한다. 단위넓이를 제시하고 그 안에서 1보다 작은 소수끼리의 곱을 어려워 나타내어봄으로써 단위넓이와 비교하여 어느 정도의 양을 나타내는지를 시각적으로 어렵할 수 있는 기회를 제공하고 있다.

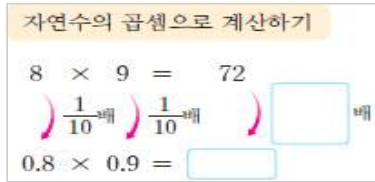


[그림 5] 1보다 작은 두 소수의 곱셈에서 사용하는 모델(교육부, 2019a, p.86)

소수 곱셈의 형식화 단계에서는 다양한 방법을 제시하며 학생들이 사용할 것을 유도한다. (소수)×(자연수)의 경우 0.1의 개수를 세는 방법을 제시하고 있으며, (소수)×(자연수), (자연수)×(소수)에서는 [그림 6]과 같이 소수를 분수로 바꾸어 계산하는 방법으로 접근하기도 한다. 이후 자연수의 곱셈으로 계산하는 방법을 생각한 후, 각각의 수의 $\frac{1}{10}$ 배씩을 생각하여 계산의 결과를 추론하게 한다. ([그림 7] 참고)



[그림 6] 0.1의 개수 세기와 분수의 곱셈을 이용한 형식화(교육부, 2019a, p.79)



[그림 7] 자연수의 곱셈을 이용한 형식화(교육부, 2019a, p.87)

자연수의 곱셈의 계산하기를 제시한 후, 최종적으로 이 방법으로서의 형식화를 의도하는 것으로 보이는데 세로셈으로 형식화하는 절차를 교과서에서 다루고 있지 않고 있다.

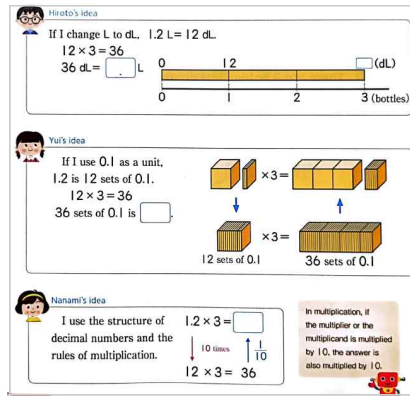
나. 일본

일본 교과서(學校圖書 編集部 外, 2020a)에서는 이 중수직선 모델, 직육면체 형태의 영역모델, 직사각형 영역모델을 사용하고 있다. 소수와 자연수의 곱을 다루는 부분에서 문제를 해결하는 방법을 세 학생의 아이디어를 설명하는 형태로 [그림 8]과 같은 시각적 모델을 사용하고 있다.

첫 번째 학생은 L를 dL로 변환하여 값을 구한 뒤 dL를 L로 재변환하여 값을 소수로 나타내는 방법을 이중수직선과 함께 설명하고 있다. 여기서 이중수직선은 한국의 소수의 곱셈에서 사용하는 모델과 같이 아래는 수직선 형태, 위는 띠 형태인 것을 사용한다. 단순히 계산식만을 사용하기보다 이중수직선을 함께 제시함으로써 결과값이 대략 어느 정도인지 시각적으로 확인할 수 있다.

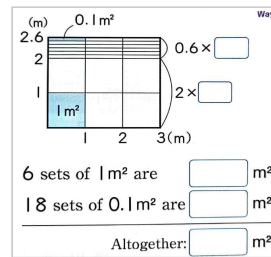
두 번째 학생은 0.1의 개수로 값을 구하는 방법을 사용하였는데 이 때 1을 정육면체로, 0.1을 정육면체의

0.1배인 직육면체를 사용하여 나타내어 비례모델을 사용하여 양의 변화를 시각적으로 드러내고자 하고 있다. 마지막 학생은 자연수를 이용하여 소수의 곱셈을 하였는데, 간단히 화살표를 이용하여 피승수에 10배를 하고 계산하였기 때문에 소수의 곱셈 결과는 자연수의 곱셈 결과의 $\frac{1}{10}$ 이 됨을 표현하였다.



[그림 8] 소수의 곱셈에서 사용된 모델(學校圖書 編集部 外, 2020a, p.62)

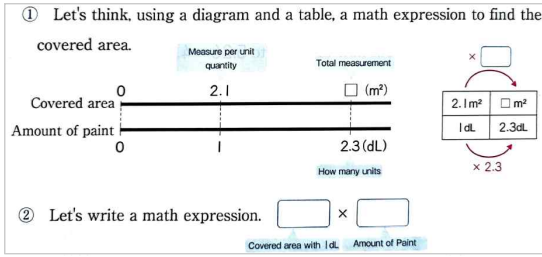
또한 1보다 큰 소수와 자연수의 곱셈의 경우에 [그림 9]와 같이 직사각형 영역모델을 사용하여 단위넓이의 개수를 세어 값을 구하는 방법을 소개한 사례도 있다.



[그림 9] 직사각형 영역 모델(學校圖書 編集部 外, 2020a, p.66)

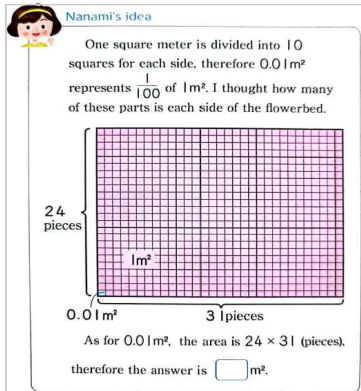
소수와 소수의 곱셈을 다루는 5학년 교과서(學校圖書 編集部 外, 2020b)에서도 이중수직선을 사용하였는데, 이때는 [그림 10]과 같이 아래와 위 모두 수직선 형태로 되어 있는 것을 사용하였다. 4학년에서와 달리 이중수직선에서 수치가 쓰인 부분이 어떤 값을 의미하

는지에 대하여 자세히 설명하고 있다. 이는 학생들에게 생소하게 느껴질 수 있는 이중수직선을 읽고 해석하는 방법의 지도가 포함된 것이라고 볼 수 있다.



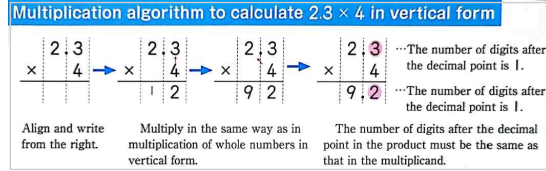
[그림 10] 이중수직선 모델(學校圖書 編集部 外, 2020b, p.69)

그 외에도 [그림 11]처럼 직사각형 영역 모델을 통하여 0.01m^2 의 개수를 세어 소수와 소수의 곱셈의 결과값을 구할 수 있다는 사례도 제시하고 있다.

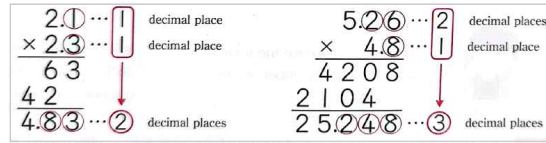


[그림 11] 직사각형 영역 모델(學校圖書 編集部 外, 2020b, p.72)

일본 교과서(學校圖書 編集部 外, 2020a)에서는 세로셈으로 형식화하는 과정을 [그림 12], 또 다른 교과서(學校圖書 編集部 外, 2020b)에서는 [그림 13]과 같이 상세하게 나타내고 있다. 특히 [그림 13]과 같이 계산 후 소수점을 어떻게 찍어야 하는지 소수점의 위치를 상세하게 설명함을 통해 학생들이 소수점 찍기에서 어려움을 느끼고 오류를 범한다는 사실을 알고 이를 방지하도록 하고 있다.



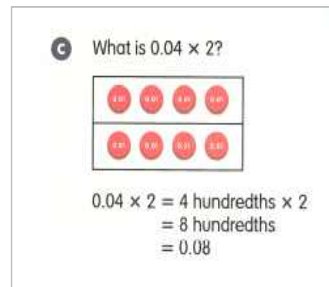
[그림 12] (소수)×(자연수)의 형식화(學校圖書 編集部 外, 2020a, p.66)



[그림 13] (소수)×(소수) 형식화(學校圖書 編集部 外, 2020b, p.70)

다. 싱가포르

싱가포르 교과서(Kheong et al., 2016)의 경우 소수의 곱셈 과정을 동전 모양의 수모형(number disc)을 사용하여 시각적으로 나타낸다. 이 수모형은 비(非) 비례 모델로, 수의 대소에 따라 수모형의 크기가 달라지지 않고 동일하며 자릿값에 따라 색깔을 달리하여 구별한다. 이를 이용하여 자연수의 곱셈과 같은 방법을 사용하여 직관적으로 (소수)×(자연수)를 표현한다.

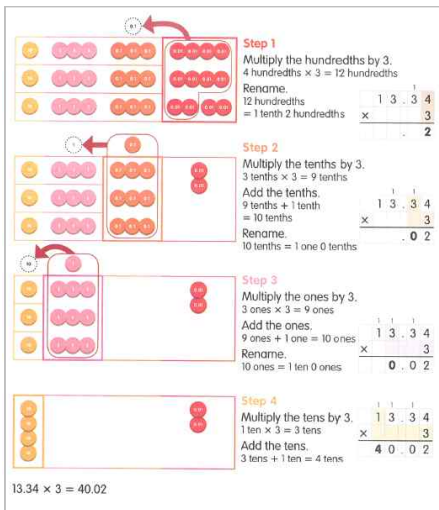


[그림 14] (소수)×(자연수) 모델(Kheong et al., 2016, p.104)

4학년에서 배우는 곱셈의 경우 승수가 자연수이므로 [그림 14]와 같이 곱셈을 표현하였다. 전반적으로 한국과 일본이 소수의 곱셈에서 다양한 주제를 다루며 수직선, 이중수직선, 넓이 모델 등 다양한 모델을 사용하는 것과 비교하여 제수가 자연수인 것만을 다루며

모델도 비(非) 비례 모델 한 가지만 다루는 것이 특징이다.

알고리즘의 형식화 측면에서도 소수를 직접적으로 분수로 변환하여 분수의 곱셈으로 소수의 곱셈을 설명하지 않고, [그림 15]와 같이 ‘tenths, hundredths’ 등의 표현을 사용하여 범자연수의 곱셈에 기반한 방법으로 알고리즘을 제시한다. 그리고 시각적 모델의 표현, 설명과 함께 세로셈을 형식화한다. 직접적으로 범자연수의 곱셈 결과와 소수의 곱셈 결과를 비교하여 소수점의 자리를 옮기거나 소수점의 자리를 결정하는 등의 내용을 제시하지 않으나, 학습 중간이나 직접 활동하는 부분에서 패턴을 발견했는지 질문을 던져서 학생들이 직접 표현할 수 있도록 하고 있다.

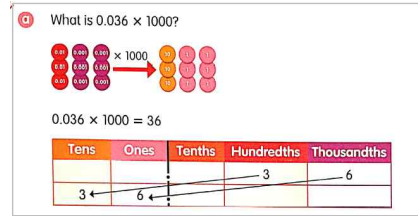


[그림 15] (소수)×(자연수) 형식화(Kheong et al., 2016, p.106)

어림은 말풍선에 소수의 근사치인 자연수를 곱한 결과와 소수의 곱셈의 결과를 비교하도록 하여 답의 타당성을 판단하도록 유도하고 있다.

5학년에서 배우는 곱셈은 [그림 16]에서와 같이 10, 100, 1000과 그의 배수들을 곱하는 내용이 4학년에 나왔던 동전 모양의 수모형(number disc)과 자릿값표로 제시된다. 여기서는 10의 거듭제곱이나 그 배수를 이용한 곱셈이 주요 내용이므로 주로 자릿값표가 형식화와 함께 제시되는데, 화살표를 사용하여 10, 100, 1000을 곱하면서 숫자가 다른 자리로 이동하는 과정을 보

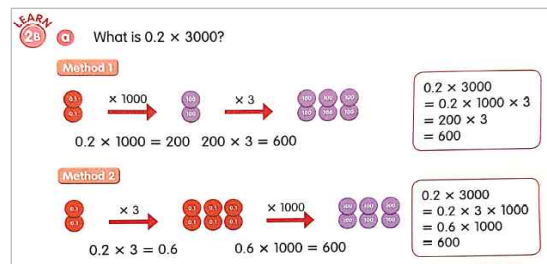
여주는 방식을 사용한다.



[그림 16] (소수)×(10, 100, 1000) 모델: 자릿값표(Kheong et al., 2017, p.15)

같은 방식의 여러 자릿값표를 안내한 후, 말풍선으로 ‘What pattern do you notice?(어떤 패턴을 알아냈나요?)’와 같은 질문을 하여 학생들이 (소수)×(10, 100, 1000)에서의 규칙을 찾아낼 수 있도록 하고 있다. ‘학습하기(learn)’에서 한국과 달리 소수점이 이동하는 것이 아닌 수의 자릿값이 변화하는 관점의 모형을 사용하고 있으나, 소단원을 정리하는 ‘직접 활동하기(Hands on activity)’나 단원의 리뷰에서는 소수점이 어떻게 왼쪽, 오른쪽으로 이동하는지 설명하고 있다.

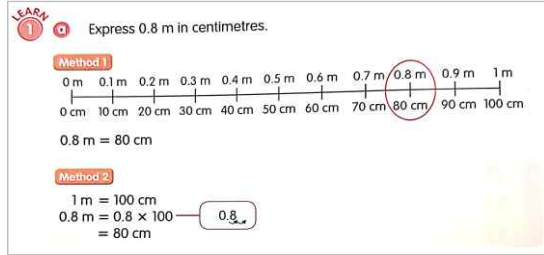
제수가 (몇 십), (몇 백), (몇 천)인 경우 제수를 (몇)×(십, 백, 천) 등으로 분해하여 계산하도록 하였는데, 순서를 달리하여 두 가지 방법을 [그림 17]과 같이 제시한다.



[그림 17] (소수)×(몇 십, 몇 백, 몇 천) 모델과 형식화(Kheong et al., 2017, p.18)

측정 단위의 변환 소단원에서는 큰 단위를 작은 단위로 변환하는 과정을 [그림 18]과 같이 수직선을 사용하여 시각화하고, 형식화 측면에서 이전의 소수의 곱셈에서 수의 자릿값이 바뀌는 형식을 안내했던 것과는 달리 소수점의 자리가 바뀌는 과정을 명시적으로

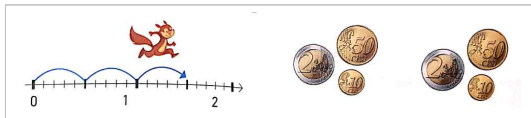
안내하고 있다.



[그림 18] 소수의 곱셈을 이용한 측정 단위의 변환 (Kheong et al., 2017, p.34)

라. 핀란드

핀란드의 교과서(Paivi, K. et al., 2018a; 2018b)에서는 5학년에서 소수의 곱셈 도입시 수직선 모델, 동전 모형을 사용한다. [그림19]와 같이 일상생활 속에서 겪을 수 있는 문제 상황과 그에 맞는 수직선 모델 및 동전 모형을 제시해 (소수)×(자연수)를 학습하도록 한다. 반면 6학년에서는 5학년과 같이 (소수)×(자연수)에서 별다른 시각적 모델 없이 5학년에서 학습한 내용을 더 심화하여 학습할 수 있도록 다양한 문제들이 제시되어 있다.

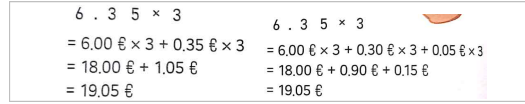


[그림 19] (소수)×(자연수) 모델(Paivi, K. et al., 2018a, p.28)

반면, 알고리즘 형식화 측면에서는(소수)×(한 자리 수)와 (소수)×(10, 100, 1000)으로 나누어 차시가 구성 되어 있으며, 실생활에서 계산이 필요한 문제 상황을 바탕으로 각각의 계산 방법을 형식화하였다.

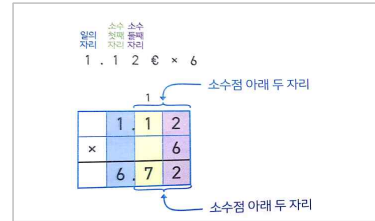
(소수)×(한 자리 수)의 경우 [그림 20]과 같이 혼소수를 분리하거나 소수의 자릿값별로 곱하는 방법을 제시한다. 첫 번째 방법은 곱하는 수인 (소수)를 ‘(자연수)+(순소수)’로 분해한 후 각각을 승수와 곱하는 방법이며 두 번째 방법은 ‘6.35×3’을 ‘6.00×3+0.30×3+0.05×3’과 같이 자릿값별로 나누어 계산하는 방법이다. 이 둘은 모두 분배법칙의 연산 원리가 적용된 것으로 앞서

핀란드 교육과정에서 제시한 바와 같이 소수의 곱셈을 자연수 곱셈의 관점에서 접근하기 위한 장치로 보인다.



[그림 20] (소수)×(자연수)의 형식화(Paivi, K. et al., 2018b, p.16)

주어진 문제 상황을 세로셈으로 형식화하는 부분에서는 [그림 21]과 같이 세로셈 방법을 직접적으로 설명하였으며, 연습문제를 반복적으로 제시하여 해당 개념을 습득할 수 있도록 한다. 특히, 일의 자리, 소수 첫째 자리, 소수 둘째 자리 각각의 자릿값에 색을 지정하여 정확한 계산을 할 수 있도록 유도한다.



[그림 21] (소수)×(자연수)의 세로셈(Paivi, K. et al., 2018a, p.36)

	천의 자리	백의 자리	십의 자리	일의 자리	소수 첫째 자리	소수 둘째 자리	소수 셋째 자리
2.75 × 1 =				2	7	5	
2.75 × 10 =			2	7	5		
2.75 × 100 =		2	7	5			
2.75 × 1000 =	2	7	5	0			

[그림 22] (소수)×(10, 100, 1000)의 모델(Paivi, K. et al., 2018a, p.40)

(소수)×(10, 100, 1000)의 계산에서는 이전에 자연수에서 배운 자릿값표를 이용하여 1, 10, 100, 1000을 곱할 때 각각 각 숫자의 자리가 어떻게 변하는지를 명확하게 드러내고 있다.([그림 22] 참고)

한편, (소수)×(몇십, 몇백) 연산에서는 몇십을 10과 몇의 곱으로 나누어 문제를 해결하도록 한다. 구체적으로 [그림 23]를 보면 (소수)×(몇십)에서 ‘몇십’을 ‘몇’

과 ‘십’으로 나누고 두 가지 방법(① 부분으로 나누어 계산하기, ② 하나의 식으로 계산하기)으로 나누어 계산 방법을 형식화한다.

예컨대, ‘ 1.45×20 ’ 연산의 경우 20을 10과 2로 나누어 먼저 ‘ 1.45×10 ’ 연산을 한 후, ‘ 14.5×2 ’ 연산을 하도록 순차적으로 제시한다. 또한 하나의 식으로 통합해 나타낼 때에는 ‘ 1.45×20 ’을 ‘ $1.45 \times 10 \times 2$ ’의 세 수의 곱으로 한꺼번에 나타낸 후 ‘ 1.45×10 ’을 먼저 계산하고 그 다음 ‘ 14.5×2 ’ 연산 순서로 계산하도록 형식화하여 보여준다.

$1.45 \text{ €} \times 10 = 14.50 \text{ €}$	$1.45 \text{ €} \times 20$
$14.50 \text{ €} \times 2 = 29.00 \text{ €}$	$= 1.45 \text{ €} \times 10 \times 2$
정답: 29.00유로	$= 14.50 \text{ €} \times 2$
	$= 29.00 \text{ €}$

[그림 23] (소수) \times (몇십)의 형식화(Paivi, K. et al., 2018b, p.118)

분석 결과, 한국과 일본에서는 이중수직선과 영역 모델을 사용한 점에서 서로 유사했고, 싱가포르 교과서에서는 비(非) 비례 모델인 동전 모양의 수모형(number disc)을 사용한다는 점, 핀란드 교과서에는 수직선 모델 및 동전 모형의 사용과 함께 소수의 곱셈을 분배법칙 등을 이용하여 형식화하여 지도하고 있다는 점이 특징적이다.

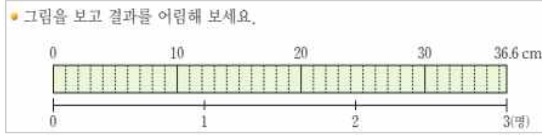
우선 한국에서는 수직선, 이중수직선, 영역모델의 시각적 모델을 주로 결괏값에 대한 어려움을 위한 수단으로 사용하였고, 이를 통해 정확한 결괏값을 구할 것을 기대하지는 않았다. 일본에서도 적극적으로 이중수직선을 사용한 점에서는 유사하지만 한국과 달리 영역 모델을 더 적극적으로 사용한 부분이 특징적이다. 단위 넓이를 이용한 비례 모델을 제시함으로써 결괏값의 어렵 이상으로 실제 정확한 값을 구하도록 유도한 점이 한국과는 다르다. 싱가포르는 동전 모양의 수모형(number disc)을 이용하였는데, 이 모형을 통하여 소수의 곱셈의 세로셈 알고리즘의 형식화를 함께 유도하고 있다는 점에서 한국 및 일본과 차이가 있다. 핀란드의 경우 주어진 문제 상황을 간단한 수직선 모델 및 유회화 동전으로 나타내 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

형식화 측면에서 한국에서는 0.1의 개수로 계산하기, 분수의 곱셈으로 계산하기, 자연수의 곱셈을 이용한 방법을 다룬 이후에 세로셈의 계산 방법을 교과서에 따로 제시하지 않고 있다. 일본은 분수의 곱셈으로 계산하는 방법을 다루지 않고, 단위 변환 방법, 0.1의 개수로 계산하는 방법, 자연수를 이용하는 방법을 다룬다는 점에서 한국과 차이가 있다. 또한 세로셈의 형식화 과정을 상세히 설명하고 있는데, 소수의 곱셈 계산 후 소수점을 어떻게 찍어야 하는지 소수점의 위치를 상세하게 설명함으로써 학생들이 흔히 범하는 소수점 위치 오류를 예방하기 위한 노력을 하고 있다. 싱가포르의 경우에는 동전 모양의 수모형(number disc)을 이용하여 곱셈의 과정을 단계별로 설명하며 형식화의 과정을 함께 설명하고 있다. 또한 분수를 이용한 곱셈 계산하기 과정은 일본과 마찬가지로 없었으며, 자릿값표를 이용하여 자연수의 곱셈과 소수의 곱셈을 비교하여 자연수의 곱셈에 기반하여 형식화하도록 유도하고 있다. 마지막으로, 핀란드에서는 실생활에서 계산이 필요한 문제 상황을 바탕으로 몇 유로(€)가 필요한지를 풀어가는 과정에서 각각의 계산 방법을 형식화한 것이 특징적이다. 또한 피승수인 소수를 ‘(자연수) $+$ (순소수)’로 분해한 후 각각을 승수인 자연수와 곱하는 과정에서 자릿값별로 나누어 계산하는 방법을 제시함으로써 분배법칙의 연산 원리를 적용하여 계산하도록 유도하는 점이 다른 나라와의 차이점이다.

5. 소수의 나눗셈에 이용된 모델과 형식화 방법

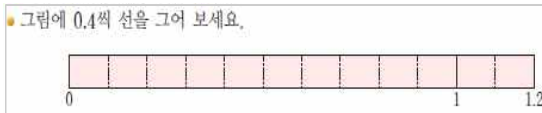
가. 한국

(소수) \div (자연수)와 (자연수) \div (자연수)를 다루는 6학년 1학기 교과서(교육부, 2019b)에는 첫 차시에 등분제 상황에서 소수와 자연수의 나눗셈을 다루는 부분에서 이중수직선 모델을 사용하고 있다. 소수의 곱셈에서와 마찬가지로 어려움을 하기 위한 수단으로 제시하였는데, 소수의 곱셈에서 양을 어렵하는 것에 초점을 맞춘 것에 반해 소수의 나눗셈 부분에서는 [그림 24]와 같이 이중수직선의 위쪽 양을 나타내는 척도에 눈금을 제시해줌으로써 비교적 정확한 양을 어렵할 것을 의도하는 것으로 보인다.



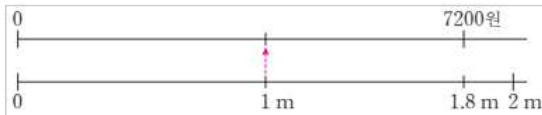
[그림 24] (소수)÷(자연수) 모델(교육부, 2019b, p.51)

6학년 2학기 교과서(교육부, 2019c)에서는 (소수)÷(소수)에서 [그림 25]와 같이 띠 모델을 이용하였는데 다른 모델이 어렵게 쓰기 위하여 쓰인 것과는 다르게 이를 이용하여 정확한 결과값을 얻을 수 있다는 특징이 있다.



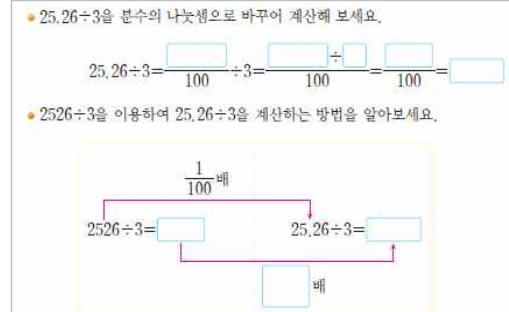
[그림 25] (소수)÷(소수)의 모델(교육부, 2019c, p.30)

(자연수)÷(소수)와 몫을 반올림을 배우는 부분에서는 [그림 26]과 같은 이중수직선을 사용하였다. 그러나 소수의 곱셈과 (소수)÷(자연수)에서 사용했던 이중수직선은 수직선과 띠가 혼용되어 있는 것과는 달리 모두 수직선 형태로 제시되었다는 점에서 차이가 있다. 여기서 몫이 되는 부분에 빨간색 화살표로 표시함으로써 몫이 대략 얼마쯤인지 보다 적극적으로 보여주고 있다.

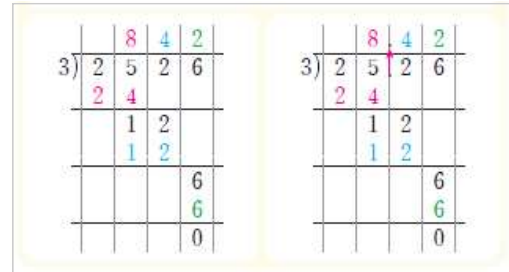


[그림 26] (자연수)÷(소수)에서 사용한 모델(교육부, 2019c, p.38)

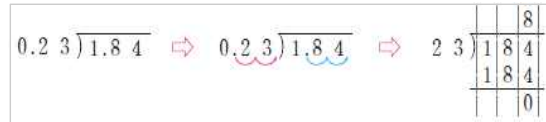
소수의 나눗셈의 형식화 단계에서는 cm와 mm, m와 cm의 단위 변환을 통하여 처음부터 자연수의 나눗셈으로 계산하는 방법을 안내한다. 이후 분수의 나눗셈으로 계산하는 방법, 자연수의 나눗셈으로 피제수와 몫을 $\frac{1}{10}$ 배나 $\frac{1}{100}$ 배하는 과정[그림 27]을 지도(교육부, 2019b)한 뒤에 (소수)÷(자연수)의 경우 [그림 28], (소수)÷(소수)의 경우 [그림 29]와 같이 세로셈으로 형식화하는 절차(교육부, 2019c)를 다루고 있다.



[그림 27] 분수의 나눗셈, 자연수의 나눗셈을 이용한 형식화(교육부, 2019b, p.55)



[그림 28] (소수)÷(자연수)의 형식화(교육부, 2019b, p.55)

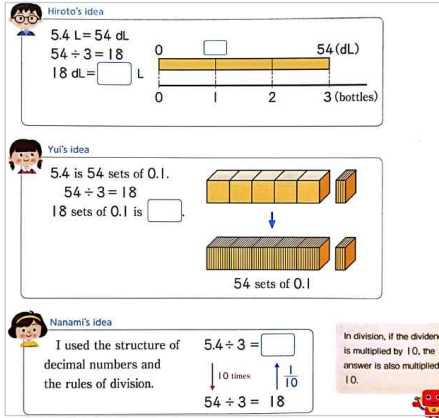


[그림 29] (소수)÷(소수)의 형식화(교육부, 2019c, p.35)

나. 일본

일본 교과서(學校圖書 編集部 外, 2020a)는 앞서 제시한 곱셈과 같이 나눗셈에서도 이중수직선 모델, 직육면체 형태의 영역 모델과 함께 띠 모델을 사용하고 있다.

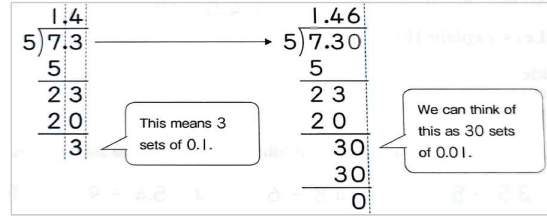
(소수)÷(자연수)를 다루는 차시는 앞서 제시한 (소수)×(자연수) 차시와 함께 동일한 단원 속에서 제시되고 있으며, 나눗셈 또한 곱셈과 같은 형식의 흐름을 보인다. 즉, (소수)÷(자연수)를 다루는 차시에서도 곱셈과 같이 세 학생의 아이디어를 설명하는 형태로 [그림 30]과 같은 시각적 모델을 사용하고 있다.



[그림 30] (소수)÷(자연수) 모델(學校圖書 編集部 外, 2020a, p.64)

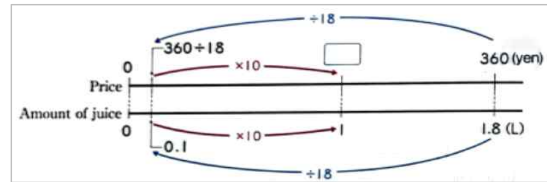
소수 7의 나눗셈 또한 곱셈과 같이 L를 dL로 변환하여 값을 구한 뒤 dL를 L로 재변환하여 값을 소수로 나타내는 방법에 기반하여 해당 개념을 형식화할 수 있도록 제시한다. 첫 번째 학생은 이중수직선을 사용하여 아래는 수직선 형태로 병의 개수를, 위는 띠의 형태로 주어진 전체 dL 양을 보여주는데 여기서 전체 양을 세 등분한 형태를 제시함으로써 나누었을 때 어느 정도 될지 시각적으로 파악할 수 있도록 한다. 두 번째 학생의 경우, 직육면체 모델을 활용하여 1을 의미하는 정육면체 1개를 10등분하여 나누었을 때 0.1이 몇 개가 되는지 비례모델을 활용하여 시각적으로 양을 가늠할 수 있도록 하였다. 마지막 학생은 (소수)÷(자연수)의 계산을 (자연수)÷(자연수)로 바꾸는 과정에서 피제수를 10배 하였을 때 나오는 곱셈값은 $\frac{1}{10}$ 로 변환해야함을 보여준다.

이후, (소수)÷(자연수)를 세로셈으로 형식화하는 차시에서는 몫이 자연수가 되어야 하는 상황과 그렇지 않은 상황을 나누어 제시한다. 몫이 자연수가 되어야 하는 상황에서는 나머지가 등장할 때 세로셈을 통해 소수점을 정확히 찍을 수 있도록 제시한다. 반면, 몫이 자연수가 되지 않아도 되는 문제 상황에서는 피제수가 나누어떨어질 때까지 계산하는 장면을 [그림 31]과 같이 제시한다. 여기에서는 각 자릿값에 따라 나머지가 의미하는 것이 달라진다는 내용을 말풍선으로 강조한다.



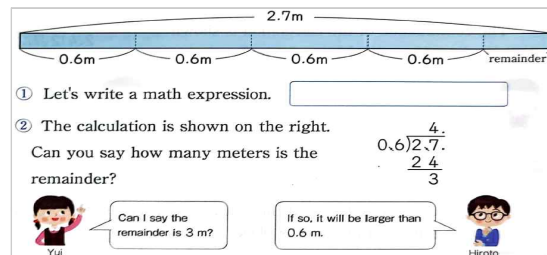
[그림 31] (소수)÷(자연수) 형식화(學校圖書 編集部 外, 2020a, p.72)

한편, 나누는 수가 소수인 나눗셈을 다루는 5학년 교과서(學校圖書 編集部 外, 2020b)에서는 [그림 32]와 같은 형태의 이중수직선을 사용한다. 1.8L가 360엔인 주스의 리터당 가격을 알아보는 문제에서 0.1L당 가격을 계산했을 때의 곱셈값을 기준으로 1L당 가격을 파악할 수 있도록 이중 수직선에 해당 내용을 시각화하여 보여준다.



[그림 32] 이중수직선 모델(學校圖書 編集部 外, 2020b, p.82)

(소수)÷(소수)에서는 [그림 33]과 같이 나머지가 있는 연산을 제시하되 띠 모델을 활용하여 나머지를 시각화할 수 있도록 한다.

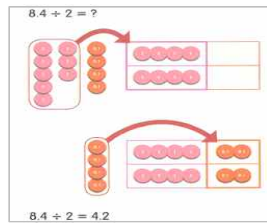


[그림 33] 띠막대 모델(學校圖書 編集部 外, 2020b, p.90)

특히, 나머지를 세로셈에서의 나머지와 연계하여 나머지에 소수점을 붙여 생각하지 않을 경우 피제수보다 커지는 상황임을 학생들의 대화로 제시한다. 이는 소수의 나눗셈에서 학생들이 어려워할 수 있는 나머지의 의미에 대해 정확히 이해할 수 있도록 의도한 것으로 보인다.

다. 싱가포르

싱가포르 교과서(Kheong et al., 2016)는 [그림 34]와 같이 소수의 곱셈에서 사용된 것과 같은 동전 모양의 수모형(number disc), 즉 비(非) 비례 모델을 사용하여 나눗셈을 시각적으로 표현하고 있다. 특히 4학년에서 제수가 자연수인 나눗셈만을 다루고 있어 나눗셈의 등분제 상황만을 나타내고 있다.



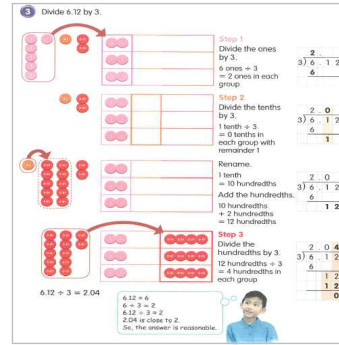
[그림 34] 4학년 소수의 나눗셈 모델(Kheong et al., 2016, p.109)

알고리즘의 형식화 측면에서도 곱셈과 마찬가지로 분수의 나눗셈을 이용하거나 하지 않고 [그림 35]와 같이 시각적 모델과 세로셈만을 범자연수의 나눗셈 방식을 이용하여 형식화하고 있다(Kheong et al., 2016). 마지막으로, 나눗셈 방법을 안내한 후 소수와 가장 근접한 자연수를 사용한 나눗셈으로 계산 결과를 어렵하게 하여 소수의 나눗셈의 몫이 타당한지 판단하도록 한다.

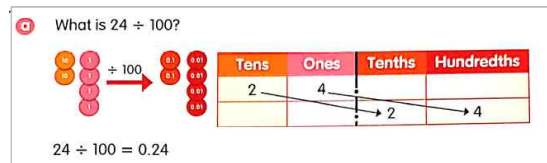
5학년 교과서(Kheong et al., 2017)에서 지도하는 소수의 나눗셈 또한 [그림 36]과 같이 소수의 곱셈과 동일하게 자릿값표와 동전 모양의 수모형을 사용하여 10과 그 거듭제곱, 배수의 나눗셈을 다루고 있다. 여기에서는 10, 100, 1000으로 나눌 때 자릿값표에서 숫자가 이동하는 것을 화살표를 이용하여 보여주고 있다.

같은 방식의 여러 자릿값표를 안내한 후, 말풍선으로 ‘What pattern do you notice?(어떤 패턴을 알아냈나요?)’와 같은 질문을 제시하여 학생들이 (소수 혹은

자연수)÷(10, 100, 1000)에서의 규칙을 찾아낼 수 있도록 하고 있다.

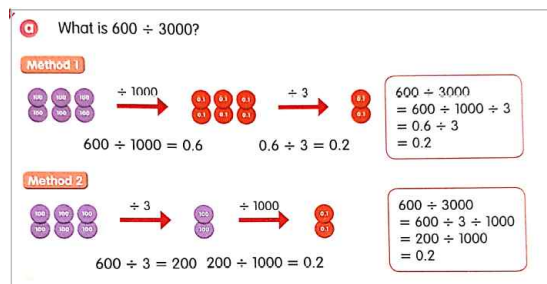


[그림 35] (소수)÷(자연수)의 모델과 형식화(Kheong et al., 2016, p.110)



[그림 36] 제수가 10, 100, 1000인 나눗셈 모델(Kheong et al., 2017, p.27)

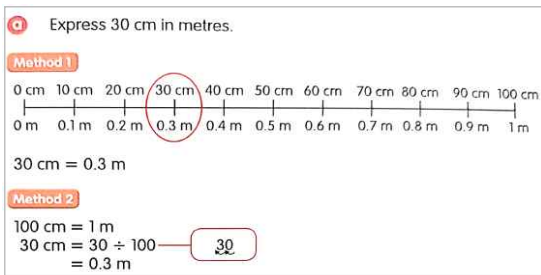
곱셈과 마찬가지로 소수의 나눗셈 과정에서 소수점이 이동하는 것이 아니라 각 자리의 숫자가 자릿값을 이동하는 것을 학습하고 난 후, ‘직접 활동하기(Hands-on activity)’나 전체 단원 리뷰에서 소수점이 어느 방향으로 이동하는지 이야기해보도록 하는 활동 등이 제시되어 있다.



[그림 37] 제수가 몇십, 몇백, 몇천인 나눗셈 형식화(Kheong et al., 2017, p.32)

(소수)÷(몇 십, 몇백, 몇천)의 경우 수를 (몇)×(십, 백, 천)으로 분해하여 두 단계를 거쳐 나눗셈을 하도록 하고, (소수)÷(몇)÷(십, 백, 천)이나 (소수)÷(십, 백, 천)÷(몇)의 두 가지 방법을 [그림 37]과 같이 안내하고 있다.

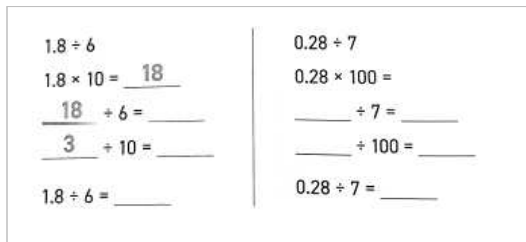
5학년 소수의 세 번째 소단원인 측정 단위의 변환에서는 앞에서 [그림 38]과 같이 배운 ÷(10, 100, 1000)과 수직선을 이용하여 작은 단위를 큰 단위로 변환하는 과정을 배운다. 이 경우에도 앞서 소수의 나눗셈 소단원에서 배운 것과 달리 소수점의 위치가 변하는 것을 명시적으로 나타내고 있다.



[그림 38] 5학년 소수의 나눗셈 모델-측정 단위 변환 (Kheong et al., 2017, p.37)

라. 핀란드

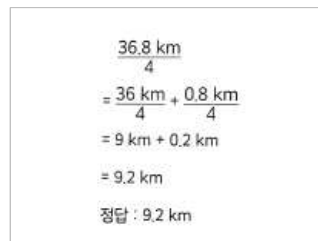
핀란드 교과서(Paivi, K. et al., 2018)에서는 소수의 나눗셈 도입시 별다른 시각적 모델을 사용하지는 않되 소수의 나눗셈을 여러 유형으로 상세화하여 각각의 알고리즘을 형식화할 수 있도록 한다. 특히, 제수가 자연수인 나눗셈을 알고리즘의 방법적인 측면에서 여러 접근 방법을 취한다.



[그림 39] (소수)÷(자연수)의 형식화(Paivi, K. et al., 2018b. p. 28)

먼저, (소수)÷(자연수)에서는 피제수인 소수 부분을 10, 100 등으로 곱하여 자연수로 변환한 후 나눗셈을 하는 방법을 제시한다. 이 방법은 [그림 39]와 같이 피제수가 소수 첫째 자리까지 있는 경우와 둘째 자리까지 있는 경우로 나누어서 제시되며 나눗셈 방법을 세 단계(① 피제수를 10배, 100배 하기, ② 피제수를 제수로 나누기, ③ 결과값인 몫을 10, 100으로 나누기)로 형식화하여 연습할 수 있도록 한다.

(혼소수)÷(자연수)에서는 소수 부분을 자연수와 소수로 분해한 후 제수인 자연수로 각각 나누는 활동으로 구성되어 있다. 예컨대, [그림 40]과 같이 '36.8÷4'로 해결해야 하는 실생활 문제 상황을 제시하고 36.8을 자연수인 36과 순소수인 0.8로 분해하고 각각을 제수인 4로 나누어 결과값 9와 0.2를 합쳐 9.2의 결과값을 얻어낸다. 이 과정에서 나눗셈 기호를 사용하지 않고 분수로 표현하여 연산을 형식화하는데, 이는 핀란드 교육과정에서도 제시된 '분수, 소수, 백분율 간의 연결을 활용'하라는 내용이 반영된 것으로 보인다.



[그림 40] (소수)÷(자연수)의 형식화: (혼소수)를 (자연수)÷(순소수)로 분해(Paivi, K. et al., 2018b. p. 32)

(혼소수)÷(자연수)의 학습은 피제수인 혼소수를 (자연수)÷(순소수)로 나누었을 때 자연수가 제수로 나누어 떨어지는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어 제시한다. 이때 주어진 (혼소수)÷(자연수)를 해결하기 위해서 혼소수를 (자연수)÷(혼소수)로 나누어야 하는 경우도 있는데, 이 과정에서 (자연수)÷(혼소수)가 각각 제수로 나누어떨어지도록 주어진 혼소수를 정확히 분해하는 것이 중요하다. [그림 41]을 보면, 혼소수인 '17.5'를 (자연수)÷(혼소수)로 분해할 때 17.5는 배수표상 15와 20 사이의 수이므로 자연수 부분은 '15', 소수 부분은 '2.5'로 나누어 각각을 제수로 나누도록 순차적으로 제시한다. 알고리즘의 형식화 과정은 세 단계(① 피제

수인 혼소수를 나누어떨어질 수 있는 (자연수)+(소수)로 나누기, ② 자연수와 소수를 제수로 나누기, ③ 각각의 결과값을 합하기로 나누어 제시하며 해당 알고리즘을 반복해서 연습할 수 있도록 한다.

이 과정에서 학생들은 자연수를 기반으로 소수의 나눗셈을 접근할 수 있으며 특히 제수가 어떤 수로 나누어떨어질 수 있는지를 생각하며 피제수를 알맞게 분해하는 과정에서 나눗셈에 대한 수감각을 개발할 수 있다.

[그림 41] (소수)÷(자연수)의 형식화: (혼소수)를 (자연수)+(혼소수)로 분해(Paivi, K. et al., 2018b. p.36)

(소수)÷(자연수)를 세로셈으로 형식화하는 경우는 [그림 42]와 같다. 나눗셈 연산을 세로셈 형식으로 해결하는 과정을 직접적으로 제시하였으며 나누어가는 과정을 순차적으로 보여준다. 특히, 나눗셈의 몫을 위가 아닌 옆에 쓴 점과 나누는 과정에서 빼기 기호를 쓴 점이 특징이다.

[그림 42] (소수)÷(자연수)의 형식화(Paivi, K. et al., 2018b. p.138)

분석 결과, 한국과 일본은 곱셈에서와 같이 이중수직선의 활용이 눈에 띄었으며 두 나라 모두 단위 변환을 통해 소수의 나눗셈을 자연수의 나눗셈으로 바꾸어 계산하도록 유도한 점에서 유사하였다. 싱가포르의 경우 비(非) 비례 모델을 활용하여 나눗셈을 등분제 상황으로 표현한 것, 핀란드의 경우 별다른 시각적 모델의 사용 없이 알고리즘을 다양한 방식으로 형식화한 점이 특징이다.

우선 한국에서는 (소수)÷(자연수)에서는 이중수직선 모델을 이용하여 양을 어렵할 수 있도록 제시하였으며, (소수)÷(소수)에서는 띠 모델을 활용하여 정확한 결과값을 얻어내도록 한다. 반면, 일본에서는 이중수직선을 활용해 나눈 결과값이 어느 정도 될지 예상하도록 한 점은 한국과 비슷했으나 띠 모델 사용에 있어 한국은 정확한 결과값을 얻어내는 데에 이용했으나 일본은 띠 모델을 사용하여 나머지 값을 예측하는 데에만 사용한다. 싱가포르는 곱셈에서와 같이 0.01, 0.1, 1의 동전 모양의 수모형(number disc)을 이용한 비(非) 비례 모델을 제시하였는데 이를 세로셈의 알고리즘 형식화와 연계한 점이 한국, 일본의 시각적 모델과 다른 점이라 볼 수 있다.

형식화 측면에서는 한국과 일본 모두 단위 변환을 통해 소수의 나눗셈을 자연수의 나눗셈으로부터 유도한 것이 특징적이다. 한국은 cm와 mm, m와 cm의 단위 변환, 일본은 L와 dL의 단위 변환을 통해 소수의 나눗셈을 자연수의 나눗셈으로 바꾸어 계산하도록 한 점이 비슷하다. 같은 맥락으로 핀란드 또한 (소수)÷(자연수)에서 피제수 부분을 10, 100을 곱해 자연수의 나눗셈으로 변환으로 하도록 하나, 한국, 일본과 같이 실생활에서의 단위변환을 통한 자연스러운 상황을 이용하지 않고 자연수로 바꾸어 연산하도록 하는 직접적인 설명만을 제시한다. 또한, 한국과 일본, 싱가포르는 나눗셈의 세로셈 방식에 있어 몫이 위로 가게 쓰는 점이 유사했으나, 핀란드의 경우 몫을 오른쪽에 쓰고 나누어가는 과정에서 뺄셈 표시도 함께 나타내는 점, (혼소수)÷(자연수)에서 혼소수를 (자연수)+(순소수)로 분해하여 곱셈의 분배법칙을 이용하여 해결하도록 한 점이 다른 세 나라와는 다른 점이다. 특히, 분해하는 방식에 있어 자연수 부분과 소수점 이하 부분이 제수로 나누어떨어지는지 그렇지 않은지로 세분화하여 소수의 나눗셈 유형을 형식화한 점이 특징적이다.

V. 결론

본 연구의 목적은 한국, 일본, 싱가포르, 핀란드의 초등 수학교과서에서 소수의 곱셈과 나눗셈을 어떻게 제시하고 있는지 분석하여 소수의 곱셈과 나눗셈 지도에 대한 시사점을 제안하는데 있다. 본 연구 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 수학과 교육과정에서 제시한 소수의 곱셈과 나눗셈 영역의 특징은 각 나라마다 모두 계산 기능이나 원리 등을 중시하는 공통점이 있으나 그 중 한국과 핀란드의 경우 계산 결과 어렵에 대한 내용을 제시하여 이를 강조하고 있고, 일본과 싱가포르의 경우 일상생활과의 연결이나 문장제에 대한 내용을 언급하고 있어 실생활과의 연결성을 중요하게 생각하는 것으로 보인다. 또한 일본과 핀란드의 경우 모두 계산 범위를 자연수에서 소수로 확대하는 내용을 담고 있어 이 둘 두 나라는 배운 내용을 확장하여 수의 범위가 늘어나도 계산을 적용하는 것에 중점을 두는 것으로 보인다. 핀란드의 경우, 소수의 곱셈과 나눗셈의 계산을 완성하는 것은 중등학교 단계에서 이루어지도록 하고 있다.

둘째, 소수의 곱셈과 나눗셈의 도입 시기와 각 시기 별 어떻게 배치하는지는 나라마다 다양하여 한국은 여러 학년과 학기에 나누어 학습하도록 하고, 일본과 싱가포르는 소수의 도입과 소수의 사칙연산을 한 학기 내에 집중적으로 다룬다. 소수의 곱셈과 나눗셈의 연산을 집중과 분산으로 학습하도록 할 것인가의 문제는 장단점이 있는데, 연산의 원리에 대한 이해, 형식화 그리고 연산의 능숙도 등과 다른 영역과의 연계성을 생각하여 제시할 필요가 있다. 그리고 한국과 일본은 제수가 자연수인 나눗셈과 함께 소수인 나눗셈까지 다루었으나 싱가포르와 핀란드는 초등학교 수준에서는 제수가 자연수인 나눗셈만 다룬다는 점이 특징적이었다. 어느 정도의 수준을 다룰 것인가는 각 나라의 학생들에게 적합한 근거를 기반으로 유연하게 적용할 필요가 있다.

셋째, 소수의 곱셈과 나눗셈 관련 실생활 소재는 모든 나라에서 문제 상황을 도입할 때 간단한 실생활 소재를 사용한다는 공통점이 있었다. 그리고 싱가포르와 핀란드는 금액을 소수로 나타내어 실생활 소재로 사용하는데 싱가포르는 싱가포르 달러(\$)와 센트(¢), 핀란

드는 유로(€)와 센트(¢) 등 화폐 단위가 나누어져 있어 금액을 소수로 나타내어 소수의 연산 소재로 사용 가능한 것으로 판단된다. 그런데 일부 한국의 도전수학이나 탐구수학, 일본의 뇌성 마비 중증 장애인 관련 경기 기록을 계산하는 상황, 싱가포르의 ‘직접 활동하기(Hands-on Activity)’에서 장난감 가게의 광고지를 가지고 학생들이 모듈별로 직접 문장제 문제를 해결하도록 하는 상황 등은 비교적 실생활의 문제와 밀접하게 연계한 소재의 사용 사례라 할 수 있다. 특히, 핀란드의 교과서의 코너에 학생들이 과학적 지식을 연계하여 생각해 볼 수 있는 박테리아의 크기나 혈관 속 나노로봇 상황 등을 소수의 곱셈과 나눗셈과 연계한 것은 특징적인 부분이다. 한국 교과서에서도 코너를 살려 과학 및 직업 등과 연계하여 융합적인 아이디어를 제시하는 것도 학생들의 흥미 및 수학의 연결성을 알도록 하는 방법이 될 것이다.

넷째, 시각적 모델의 사용에서 한국과 일본에서는 이중수직선과 영역 모델을 사용한 점에서 서로 유사했고, 싱가포르 교과서에서는 비(非) 비례 모델인 동전 모양의 수모형(number disc)과 자릿값표를 사용하고 있다. 그리고 핀란드 교과서에는 별다른 시각적 모델의 사용 없이 소수의 곱셈을 분배법칙 등을 이용하여 형식화하여 지도하고 있다는 점이 특징적이다. 그리고 한국과 달리 일본에서는 세로셈의 형식화 과정을 상세히 설명하여 학생들이 흔히 범하는 소수점 위치 오류를 예방하도록 한다. 핀란드의 경우 혼소수의 경우 (자연수) \div (소수) 부분으로 나누어 분배법칙의 연산 원리를 적용하여 계산하도록 유도하는 점이 다른 나라와의 차이점이다. 시각적 모델의 사용은 교사들에게 다양한 사례를 선택하여 활용하도록 하면 좋을 것이다.

마지막으로, 알고리즘의 형식화 방법에서 한국과 일본 모두 단위 변환을 통해 소수의 나눗셈을 자연수의 나눗셈으로부터 유도한 것이 특징적이다. 또한 한국과 일본, 싱가포르는 나눗셈의 세로셈 방식에 있어 몫이 위로 가게 쓰는 점이 유사했으나, 핀란드의 경우 몫을 오른쪽에 쓰고 나누어가는 과정에서 빨셈 표시도 함께 나타내는 점이 달랐다. 그리고 핀란드는 다른 세 나라와 달리 (혼소수) \div (자연수)에서 혼소수를 (자연수) \div (순소수)로 분해하여 곱셈의 분배법칙을 이용하여 해결하도록 한 점이 다른 세 나라와는 다른 점이다. 한국 학생들의 경우 그 의미를 정확히 이해하지 못하는 경우

도 있으므로, 세로셈에 대한 설명을 세부적으로 추가하는 방안을 고려할 필요가 있다.

이 연구의 결과로부터 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 소수의 나눗셈에서 보다 다양한 경우를 지도하여 학생들의 이해도를 높이는 것에 대해 재고해볼 필요가 있다. 한국의 경우 지도 내용 측면에서 다른 나라에 비해 계산 과정을 세세하게 나누어 체계적으로 제시하고 있으며 특히 소수의 나눗셈의 경우 두 학기에 걸쳐있어 학습량이 적지 않으나 실제 학생들의 소수의 나눗셈의 이해도는 소수의 연산 중 가장 낮다(문범식, 이대현, 2014). 앞서 여러 선행 연구를 살펴본 결과, 소수의 나눗셈에 있어 학생들이 어려워하는 부분은 제수가 소수인 경우 몫이 작아지는 것(이종욱, 2007)이나 몫에 0이 들어가는 경우나 0을 내려 계산할 때 더 어려움을 느낀다는 연구 결과(문범식, 이대현, 2014) 등이 있으므로 일본의 경우와 같이 1보다 작은 소수/1 이상의 소수가 제수인 경우를 비교해보거나 (소수) \div (소수)에서 0을 내려 계산하는 경우를 명시적으로 지도하는 것은 어떨지 제안해본다.

둘째, 소수의 자릿값 관련 내용을 소수의 곱셈, 나눗셈 관련 내용과 연계해서 다루는 것을 고려해야 한다.

우리나라의 경우 2015 교육과정에 따른 여러 교과서들이 4학년 소수의 덧셈과 뺄셈 단원에서 (소수) \times (10, 100, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$)의 내용을 제시하여 소수의 자릿값 이동을 한 차시에 다루고 있으며, 소수의 곱셈과 나눗셈 단원에서는 소수점 찍는 방법을 소수점을 소수의 왼쪽, 오른쪽으로 이동하는 식으로 제시하고 있다. 싱가포르의 경우 소수의 곱셈과 나눗셈에서 (소수) \times (10, 100, 1000)과 (소수) \div (10, 100, 1000)의 내용을 소단원으로 다루고 있으며 핀란드에서는 소수의 곱셈에서 (소수) \times (10, 100, 1000)의 내용을 소단원으로 지도하고 있어 우리나라의 교과서보다 분량이 많으며 다양한 실생활 소재를 사용하여 학생들의 이해를 돕고 있다. 학생들이 실제 소수의 곱셈과 나눗셈 과정에서 소수점 찍기를 어려워하고, 특히 알고리즘을 단순히 기억하는 것보다 소수의 개념 및 자릿값을 이해한 어림 활동이 학생들의 계산력 신장에 효과가 있다는 이연미, 박성선(2011)의 연구 결과 등으로 미루어 보았을 때 우리나라에서도 소수의 10의 거듭제곱의 곱셈, 나눗셈

등을 소수의 곱셈과 나눗셈 단원에서 자릿값과 연계하여 집중적으로 다루는 것이 효과적일 것으로 판단된다. 또한 한국의 교과서는 소수의 곱셈과 나눗셈의 과정에서 '소수점이 이동한다'는 표현을 사용하고 있는데, 소수점이 이동하는 것은 실은 각 수의 자리가 이동하여 자릿값이 바뀌는 것이므로 이들 교과서에 나온 자릿값 표와 같은 시각적 모델을 적극 활용하여 학생들의 개념적 이해를 도울 필요가 있다.

셋째, 초등 수학교과서 개발에서 여러 나라의 교과서에서 제시하고 있는 소수의 곱셈과 나눗셈의 내용, 방법, 시기, 소재, 형식화 방법을 고려할 필요가 있다. 이 연구에서 분석한 결과, 국제 수학적취득 상위권 국가들의 초등 수학교과서에서 제시한 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 접근 방법은 다양하였다. 후속 연구에서는 보다 다양한 국가들의 교과서 제시 방법을 확장하여 분석하고, 각 나라들은 자신들의 교육과정 및 학습자의 현실을 고려하여 현장에서 소수의 곱셈과 나눗셈의 교수·학습을 해 가면서 가장 적절한 지도 방안을 찾아갈 필요가 있다.

넷째, 교사연수를 통하여 소수의 곱셈과 나눗셈의 접근 방법에 대한 다양한 아이디어를 공유할 필요가 있다. 학교 현장에서 다양한 학생들에게 적용한 결과를 기반으로 학생들이 이해하는데 가장 적절한 방법을 찾아갈 필요가 있다. 이는 국내뿐만 아니라 일본을 중심으로 한 수업연구(Insprasitha, Isoda, Wang-inversion, Yeop, 2015)를 통하여 나라간 교차 수학수업 및 연구가 필요하다. 그리고 교사용 지도서에도 소수의 곱셈과 나눗셈에 대한 다양한 지도 방법을 소개하여 교사들이 학교에서 적절하게 활용할 수 있도록 할 필요가 있다.

참 고 문 헌

- 강완, 나귀수, 백석윤, 이경화(2013). 초등수학 교수 단위 사전. 서울: 경문사.
- 교육부(2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책8].
- 교육부(2019a). 수학 5-2. (주)천재교육.
- 교육부(2019b). 수학 6-1. (주)천재교육.
- 교육부(2019c). 수학 6-2. (주)천재교육.
- 김방진, 류성립(2011). 소수 나눗셈에 대한 교사의 PCK와 실제 수업의 분석. 한국초등수학교육학회지, 15(3), 533-557.
- 김수정, 방정숙(2007). 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도에서 초등학교 5학년 학생들의 개념적 이해 과정 분석. 한국초등수학교육학회지, 11(1), 1-21.
- 김용태(2000). 소수 개념의 분석 및 그 지도에 관한 연구. 서울교육대학교 석사학위논문.
- 김정원(2017). 수학의 내적 연결성을 강조한 5학년 분수 나눗셈과 소수 나눗셈 수업의 실행연구. 수학교육학연구, 27(3), 351-373.
- 김정원, 권성룡(2017). 한국, 일본, 싱가포르, 미국의 초등학교 수학 교과서에 제시된 소수 개념 지도 방안에 대한 비교 분석. 학교수학, 19(1), 209-228.
- 김채린(2022). 십진블록을 활용한 소수의 곱셈 지도에서 초등학교 5학년 학생들의 개념적 이해 과정 분석. 한국초등수학교육학회지, 26(2), 133-153.
- 문범식, 이대현(2014). 초등학생들의 소수 개념과 그 연산에 대한 이해도 분석. 한국초등수학교육학회지, 18(2), 237-255.
- 박교식(2013). 우리나라 초등학교 수학용어의 분석과 비판: 몇 가지 예를 중심으로. 한국초등수학교육학회지, 17(1), 1-17.
- 박교식, 권석일(2012). 우리나라 초등학교 수학교과서의 소수 나눗셈에서의 몫과 나머지 취급에서 나타나는 부적절한 관념과 그 개선에 관한 연구. 수학교육학연구, 22(4), 445-458.
- 박상인(2017). 한국, 핀란드, 싱가포르 초등 수학교과서에서 사용하는 시각적 모델 비교 분석. 서울교육대학교 석사학위논문.
- 배유경, 류성립(2011). 한국과 싱가포르의 수학교과서 비교·분석: 소수의 나눗셈을 중심으로. 과학·수학교육연구, 34, 121-142.
- 배종수(2005). 초등 수학교육 내용 지도법: 제7차 교육과정을 중심으로. 서울: 경문사.
- 변희현(2007). 초등수학에서 소수 곱셈의 지도에 관한 소고. 한국수학사학회지, 21(2), 89-108.
- 송근영, 방정숙(2008). 소수 연산에 관한 예비초등교사의 교수내용지식 분석. 한국초등수학교육학회지, 12(1), 1-25.
- 신준식(2020). 2015 교육과정에 따른 초등수학 교수법의 실제. 서울: (주)도서출판 하우.
- 이대현(2018). 한국, 일본, 싱가포르, 미국, 핀란드의 수학 교과서에 제시된 분수 지도 내용의 비교·분석. 초등수학교육, 21(2), 111-130.
- 이연미, 박성선(2011). 어렵하기를 통한 소수점 찍기가 소수의 곱셈과 나눗셈에 미치는 효과. 한국초등수학교육학회지, 15(1), 1-18.
- 이종욱(2007). 5학년 아동의 소수 나눗셈 원리 이해에 관한 연구. 학교수학, 9(1), 99-117.
- 조진석, 김성준, 이동환(2019). 분수와 소수의 곱셈과 나눗셈 지도 순서에 관한 예비교사의 인식과 개선. 한국초등수학교육학회지, 23(1), 1-17.
- 진성현, 박만구(2016). 교육과정 변천에 따른 초등 수학교과서에서 소수의 곱셈과 나눗셈 지도순서 및 방법 분석. 한국초등교육, 27(2), 55-75.
- 최창우(2019). 2015 개정 교육과정에 따른 초등수학 내용지도법. 서울: 경문사.
- 한국과학창의재단(2011). 창의중심의 미래형 수학교과교과내용 개선 및 교육과정 개정 시안 연구. 한국과학창의재단보고서 2011-4.
- 文部科學省 (2017). 小學校學習指導要領 (平成29年告示). Retrieved May 29, 2022 from https://www.mext.go.jp/content/1413522_001.pdf
- 學校圖書 編集部 外. (2020a). みんなと學ぶ小學校算數 4年 下 英譯本. 東京: 學校圖書.
- 學校圖書 編集部 外. (2020b). みんなと學ぶ小學校算數 5年 上 英譯本. 東京: 學校圖書.
- Baroody, A. J. & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*.

- Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Billstein, R., Libeskind, S., & Lott, J. W. (1990). *A problem solving approach to mathematics for elementary school teachers* (4th ed.). Redwood City, CA: The Benjamin/Cummings.
- Finnish National Board of Education (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet* 2014. Retrieved May 26, 2022 from <https://eperusteet.opintopolku.fi/#/en/perusopetus/419550/oppiaineet/466344>
- Insprasitha, M., Isoda, M., Wang-inversion, P., & Yeop, B. (eds.) (2015). *Lesson study: Challenges in mathematics education*. Singapore, World Scientific.
- Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2016). *My pals are here! 4B* (3rd ed.). Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Kheong, F. H., Soon, G. K., & Ramakrishnan, C. (2017). *My pals are here! 5B* (3rd ed.). Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Ministry of Education Singapore (2013). *Mathematics syllabus primary one to six*. Retrieved May 20, 2022 from https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.ashx?la=en&hash=FC5D02BA026AF57A348AD419506B417F1393C968
- Paivi, K., Kimmo, N., Pirita, P., Pekka, R., Maria, S., & Timo, T. (2018a). *Star maths 5a*. Helsinki: Otava. 박문선(역). 핀란드 5학년 수학 교과서 5-1. 서울: 마음이음.
- Paivi, K., Kimmo, N., Pirita, P., Pekka, R., Maria, S., & Timo, T. (2018b). *Star maths 6a*. Helsinki: Otava. 박문선(역). 핀란드 6학년 수학 교과서 6-1. 서울: 마음이음.
- Tian, J., Braithwaite, D. W., & Siegler, R. S. (2020). Distributions of textbook problems predict student learning: Data from decimal arithmetic. *Journal of Educational Psychology, 113*(3), 516-529.

**A Comparative Analysis on the Primary Mathematics Textbooks
for Multiplication and Division of Decimals:
Focusing on Korea, Japan, Singapore, and Finland**

Park, Mangoo

Seoul National University of Education
E-mail : mpark29@snue.ac.kr

Park, Haemin

Seoul National University of Education
E-mail : dr1203@naver.com

Choi, Eunmi

Seoul National University of Education
E-mail : cemstory@sen.go.kr

Pyo, Junghee[†]

Seoul National University of Education
E-mail : nghuiy1234@gmail.com

The purpose of this study is to obtain implications for mathematical education by analyzing how the multiplication and division of decimal numbers are presented in the elementary mathematics textbooks in Korea, Japan, Singapore, and Finland. Compared to the fact that students often have misconceptions about multiplication and division of decimal numbers, there have been not many comparative studies in recent elementary mathematics textbooks. For this study, we selected elementary mathematics textbooks those are widely used in Japan, Singapore, and Finland along with Korean elementary mathematics textbooks. We chose the textbooks because the students in the selected countries have scored high in international achievement studies such as TIMSS and PISA. The analysis was examined in terms of elementary mathematics curriculum related to multiplication and division of decimal numbers, introduction and content, real-life situations, use of visual models, and formalization methods of algorithms. As a result of the study, the mathematics curricula related to multiplication and division of decimal numbers includes estimation in Korea and Finland, while Japan and Singapore emphasize real-life connections more, and Finland completes the operations in secondary schools. The introduction and content are intensively provided in a short period of time or distributed in various grades and semesters. The real-life situations are presented in a simple sentence format in all countries, and the use of visual models or formalization of algorithms is linked to the operations of natural numbers in unit conversions. Suggestions were made for textbook development and teacher training programs.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key Words : decimal numbers, multiplication, division, textbook, analysis

† Corresponding Author