韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2022.25.3.213
2022. 7. 제 25권, 제 3호, 213-232

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
July. 2022, Vol. 25, No. 3, 213-232

초등학교 4학년 학생들의 수직선 이해 분석: 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈을 중심으로

김정원(대전신탄진초등학교, 교사)

분수 학습에서 수직선 모델의 중요성에 따라, 본 연구에서는 초등학교 4학년 학생들의 수직선에서의 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 이해가 어느 정도인지 살펴보았다. 수직선 검사 도구는 분수 나타내기, 분수의 크기 비교, 분수의 덧셈 및 뺄셈과 관련된 문항으로 구성되었으며 구조화된 수직선과 반구조화된 수직선을 제시하였다. 연구 결과, 전반적으로 정답률이 높지 않았으며, 정답보다 오답의 반응이 높게 드러난 문항들도 있었다. 또한 구조화된 수직선에 비하여 반구조화된 수직선이 제시되는 문항에서의 정답률이 낮게 드러났으며, 다양한 오답 반응을 확인할 수 있었다. 본 연구의 결과를 바탕으로 초등학생들의 분수 이해 및 수직선 이해를 위한 교수·학습 방향에 관한 시사점을 논의하였다.

I. 서론

분수 개념의 중요성과 더불어 분수 개념의 이해를 돕는데 모델은 중요한 역할을 한다(Cramer et al., 2017; Kara & Incikabi, 2018; Lamon, 2001). 이는 분수의 다양한 모델을 통하여 단위, 분할, 동치 등의 분수의 핵심적인 아이디어를 탐색할 수 있고 학생들의 분수에 대한 이해를 발전 및 심화시킬 수 있다는 것을 의미한다. 분수 모델에는 영역, 길이, 집합, 넓이 모델 등이 있으며, 길이 모델과 관련된 수직선은 영역, 집합 모델과 같은 구체적인 모델로 분수를 탐구한 경험을 확장하고 수로서의 분수를 이해하는 기회를 제공할 수 있다(유진영, 신재홍, 2020; Izsák et al., 2008). 또한 수직선에서 단위 및 0으로부터의 거리를 고려한 직선 위의 점으로 분수를 나타냄으로서 다른 자연수 및 분수와의 관계를 통하여 하나의 수로 인식할 수 있게 한다(박예은, 2017; Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014).

이러한 분수 모델로서 수직선의 중요성에 따라 분수를 학습할 때 수직선을 바르게 이해하여 사용할 필요가 있다. 2015 개정 초등학교 수학과 교육과정에 따른 초등학교 수학 교과서를 살펴보면 수직선은 2학년의 세 자리 수를 학습할 때부터 도입되며(교육부, 2020a), 분수와 관련하여서는 여러 가지 분수를 나타내고, 분수의 크기를 가시적으로 비교하고, 분수의 덧셈과 뺄셈을 수행하는데 활용되고 있다(교육부, 2020b, 2020c). 이와 같이 수직선은 학생들이 분수를 학습할 때 자주 접할 수 있는 모델 가운데 하나로(Lee, Choy, & Mizzi, 2021), 학생들의 분수에 대한 이해를 살펴볼 수 있는 수학교수학적(mathedidactical) 도구가 될 수 있으며, 수직선에 제시된 정보의 종류와 수직선의 형태에 따라 교과서에 제시되고 있는 구조화된 수직선뿐만 아니라 단위가 없는 수직선이나 빈 수직선과 같은 다양한 수직선을 활용할 수 있다(Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014).

중요한 점은 교과서나 교사가 학생들이 수직선을 통해 이해하길 바라는 분수의 의미와 이 때 수반되는 사고 과정을 학생들이 공유할 수 있어야 한다는 점이다. 하지만 실제 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 관련된 수직선 과제에서의 학생들의 이해 실태를 살펴보면, 학생들은 수직선에서 단위를 파악하지 못하거나(Cramer et al., 2017), 수직선의 세로선 사이의 간격의 크기를 이해하지 못하여(이상미, 2010) 수직선에서 분수를 나타내는데 어려움을 보였다. 또한 동일한 내용을 영역 모델이나 식으로 해결할 때에 비하여 수직선 모델로 해결하는데 어려움을 겪었으며(김양권, 홍진곤, 2017), 분수의 덧셈이나 뺄셈의 경우 해결 과정을 수직선에 나타내지 못하고 결과값만을 표시하는 반응을 드러냈다(Kara & Incikabi, 2018).

* 접수일(2022년 5월 31일), 심사(수정)일(2022년 6월 15일), 게재확정일(2022년 6월 25일)
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 수직선, 분수 개념, 분수의 덧셈과 뺄셈, 학생 이해

지금까지 이루어진 수직선에서의 학생들의 분수 이해에 관한 선행 연구를 통하여 학생들의 이해 정도와 그 원인을 대략적으로 파악할 수 있다. 하지만, 자연수, 분수, 소수에 관한 전반적인 수직선 이해 실태를 살펴보았거나, 우리나라 학생들을 대상으로 한 연구가 드물었다는 한계가 있다. 이에 우리나라 학생들을 대상으로 분수에 초점을 맞추어 수직선 표현에서의 해결 과정을 알아보는 연구가 필요하다. 이러한 맥락에서 본 연구에서는 우리나라 초등학교 4학년 학생들을 대상으로 수직선에서 분수의 개념과 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 이해를 살펴보고자 한다. 본 연구를 통하여 초등학교 학생들의 분수 개념과 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 이해와 수직선 모델에 대한 이해를 발달시킬 수 있는 교수·학습 방향에 관한 시사점을 제공해 줄 수 있으리라 기대한다.

II. 이론적 배경

1. 분수 학습에서 수직선

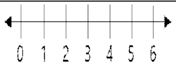
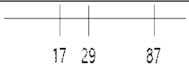
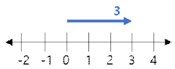
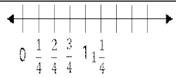
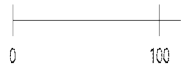
수직선은 수를 하나의 직선 위의 점들에 대응시킨 은유적 표현으로, 추상적인 수 체계의 수를 수직선에 가시적으로 표현함으로써 수를 직관적으로 파악하여 수 개념을 학습하는데 도움이 된다(김양권, 홍진곤, 2016; 이상미, 2010; Lakoff & Núñez, 2000; Skoumpourdi, 2010). Herbst(1997)는 수직선을 기하에서 다루는 직선과 구분하는데, 직선은 점으로 구성되고 수를 가지지 않고 점이 문자로 표시되는 반면, 수직선은 점에 수를 부여함으로써 수 체계의 무한성, 조밀성, 연산의 구조를 체계적으로 드러낼 수 있다고 설명한다. 또한 Duval(1999)은 수직선이 점과 선과 같은 기하학적 요소로 구성되었지만, 특정한 수를 나타내고 연산을 수행하는데 사용될 수 있다는 점에서 수직선을 기하학적 대상과 구별하여 인식해야 한다고 주장한다.

이와 같은 수직선은 수와 연산에 관한 사고를 조직할 수 있는 잠재성을 가지지만, 수직선이 교수학적 도구로서 유용하게 쓰이기 위해서는 수직선의 개념적 특성을 이해하는 과정이 수반되어야 한다(Skoumpourdi, 2010). 특히, 수직선에서 분수를 나타내기 위해서는 단위에 대한 이해, 분할, 다른 수와의 관계를 인식하고 이를 통하여 시각적 정보와 기호적 정보를 조정하는 과정을 이해해야 한다(Cramer et al., 2017). Saxe 외(2013)는 수직선에 분수를 나타낼 때 핵심적 아이디어로 구간(interval)과 순서(order)를 제시한다. 구간은 두 점 사이의 거리를 의미하며 0부터 1까지의 거리가 단위 구간이 되는데 학생들은 단위 구간이 등분할되고 반복될 수 있다는 것을 이해할 수 있어야 한다. 또한 순서는 두 양 사이의 관계를 의미하며, 수직선에서는 점의 순서로 양의 크기를 비교할 수 있어 왼쪽에서 오른쪽으로 갈수록 크기가 커지고 오른쪽에서 왼쪽으로 갈수록 크기가 작아지며 같은 점은 크기가 같다는 것을 이해할 수 있어야 한다.

분수를 수직선에 나타내는 것은 분수에 대한 이해를 깊게 하는데 도움이 될 수 있다. 즉, 수직선에 하나의 점으로 나타내어진 분수는 단위 길이를 고려한 0으로부터의 거리를 의미하는데, 이를 통해 분수를 하나의 수로 인식할 수 있고 자연수나 다른 유리수와 비교하여 수의 크기를 비교할 수 있게 하는 기회를 제공한다. 따라서 학생들이 종종 분수를 2개의 범자연수로 이루어진 것으로 보는 오개념을 극복하거나(Lamon, 1999). 원, 퀴즈네르, 분수 띠 등의 다른 분수 모델에 비하여 분수 사이의 크기와 관계를 명확히 이해하는데 도움이 될 수 있다(Freeman & Jorgensen, 2015).

수직선은 다양한 형태로 나타내어질 수 있다. Saxe(2004)는 수직선 활용을 형식(form)과 기능(function)에 따라 분류할 수 있다고 설명하는데, 이 때 형식은 점, 단위 구간, 0 등의 제시 유무에 따라 다르게 드러나는 시각적 특징을 의미하고 이러한 수직선의 형식은 수직선이 어떤 상황과 주체에 의해 사용되어지는지의 기능에 따라 결정된다. 이러한 맥락에서, Teppo와 van den Heuvel-Panhuizen(2014)은 수직선의 여러 가지 시각적 형태와 교수학적 기능을 고려한 수직선 모델 유형(Family of number line models)을 [표 1]과 같이 제시하였는데, 수직선에 대한 이해를 통하여 실제 교수·학습에 활용할 수 있다는 의의가 있다. 또한 Saxe 외(2007)는 동일한 간격의 세로선과 각 점에 해당되는 수가 제시되는 수직선을 학생들이 자주 다룬다는 의미에서 전형적인(routine) 수직선으로, 그렇지 않은 수직선을 비전형적인(nonroutine) 수직선으로 분류하였고, Skoumpourdi(2010)는 수나 기호의 유무에 따라 구조화된(structured), 반구조화된(semi-structured), 빈

[표 1] 수직선 모델 유형 (Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014, p.57)

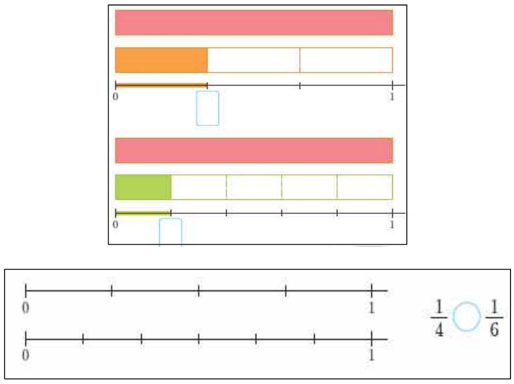
유형	채워진 수직선 Filled Number Line	빈 수직선 Empty Number Line	길이-방향 수직선 Directed-length Number Line	유리수 수직선 Rational Number Line	비례 수직선 Proportional Number Line
형식					
기능	-동일 간격으로 나열된 수가 제시 -수의 계열, 수의 순서 및 관계를 탐색	-문제 상황에 필요한 수를 순서대로 정렬하여 사용 가능	-수의 크기와 방향을 화살표 길이로 제시 -측정으로서의 수 개념 탐색 가능	-유리수의 계열성 및 조밀성 탐색 가능	-수직선의 세로선* 위와 아래에 수를 비례적으로 표시 -비례와 백분율을 추론

(empty) 수직선으로 구분하였다. 이와 같은 수직선의 다양한 형태는 수직선의 활용 가능성과 그에 따른 교육적 가치가 높다는 것을 시사한다. 이에 본 연구에서는 지금까지 살펴본 수직선의 중요성을 바탕으로 분수 학습에서 초등학생들의 수직선 이해 실태를 살펴봄으로써 활용 가능성을 탐색해보고자 한다.

2. 교과서의 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 제시된 수직선 분석

수직선은 현행 2015 개정 초등학교 수학과 교육과정에 따른 수학 교과서의 세 자리 수, 네 자리 수, 큰 수를 다루는 단원과 분수와 소수를 다루는 단원에서 자연수, 분수, 소수의 체계를 나타내는 표현으로 사용된다. 또한 분수의 덧셈과 뺄셈, 분수의 곱셈, 소수의 곱셈, 분수의 나눗셈, 소수의 나눗셈을 다루는 단원에서 분수와 소수의 연산에 대한 이해를 돕기 위하여 수직선이 활용되며, 추가적으로 수의 범위와 어림하기, 비와 비율, 평균과 가능성에 관한 단원의 일부 차시에서도 제시되고 있다. 이 절에서는 분수 개념과 분수의 덧셈과 뺄셈 단원에 초점을 맞추어 수직선이 어떻게 활용되고 있는지 살펴보고자 한다.

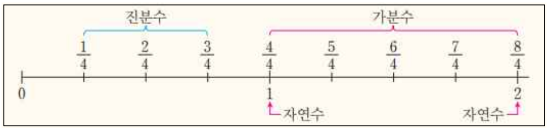
우선, 분수 개념과 관련된 수직선 표현을 살펴보면 3학년 1학기 6. 분수와 소수 단원의 단위분수의 크기를 비교하는 활동에서 수직선이 제시된다. 이 때 수직선은 활동의 처음부터 다루어지는 것이 아니라 종이띠를 이용해 단위분수의 크기를 비교해보는 활동을 한 다음, 종이띠에 나타난 단위분수의 크기를 수직선에도 나타내 보도록 한다([그림 1] 참조). 이후 활동에서는 종이띠없이 수직선만을 제시하여 단위분수를 나타내고 크기를 비교해보도록 한다. 따라서 교과서에서 분수를 나타내는 표현으로 수직선을 처음 제시할 때, 종이띠와 함께 다루어봄으로써 종이띠와 수직선 표현을 연결할 수 있고 수직선 표현을 이해하는데 도움이 될 것이라 추측된다. 즉, 같은 분수를 종이띠에서는 색칠된 부분으로 수직선에서는 0부터의 거리로 나타냄으로써 학생들은 종이띠와 수직선으로 분수를 나타내는 방법의 공통점과 차이점을 시각적이고 암묵적으로 이해할 수 있을 것이다. 주목할 점은, 분수를 수직선에 나타낼 때 0부터 해당 분수의 위치까지의 거리로 표현하는데 이는 자연수를 수직선에 나타낼 때 점으로 표시하는 것과는 다른 방법이다.



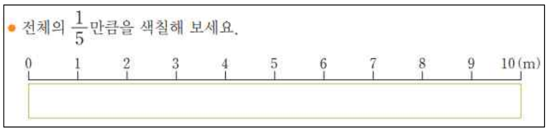
[그림 1] 단위분수의 크기 비교 차시에서 수직선 도입 (교육부, 2020b, p.121)

* 본 연구에서 수직선의 세로선이란 수직선에서 수를 나타내기 위하여 표시한 hash marks 또는 tick marks를 의미한다.

다음으로, 수직선은 3학년 2학기 4. 분수 단원에서 진분수, 가분수, 대분수와 같은 여러 가지 분수를 알아보고, 분모가 같은 두 분수의 크기를 비교하기 위하여 사용된다. 예를 들어, [그림 2]와 같이 수직선에 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{4}$을 제시하고 진분수와 가분수의 예를 살펴보고 $\frac{4}{4}$와 $\frac{8}{4}$이 각각 자연수 1, 2와 같다는 관계를 시각적으로 제시한다. 한편, 분수만큼이 얼마인지 알아보는 차시에서 전체 10m의 $\frac{1}{5}$이 얼마인지 알아보기 위하여 [그림 3]과 같은 표현이 제시되는데, 제시된 막대의 길이가 10m라는 것을 나타내기 위한 '자'의 역할을 하는 이 표현은 수직선과 형태가 유사하여 학생들이 해당 표현을 수직선으로 인식할 수도 있다고 판단된다.

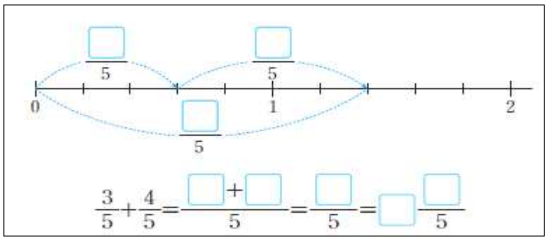


[그림 2] 진분수와 가분수를 나타내기 위하여 수직선 활용 (교육부, 2020d, p.85)

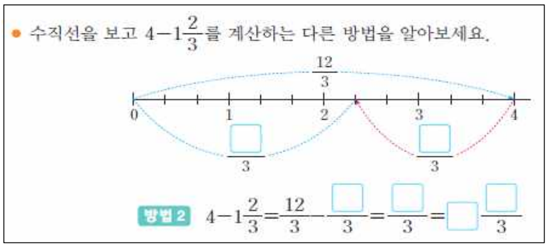


[그림 3] 분수만큼이 얼마인지 알아보는 차시에서 수직선과 유사한 형태의 자 제시 (교육부, 2020d, p.82)

마지막으로, 4학기 2학기 1. 분수의 덧셈과 뺄셈 단원에서 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 방법을 알아보기 위한 표현으로 수직선이 제시된다. 예를 들어, [그림 4]는 $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$의 계산 방법을 수직선을 통해 알아보는 것으로 수직선을 활용함으로써 분모가 같은 두 분수의 덧셈은 분자끼리 더하여 계산하면 된다는 계산원리와 결과값이 1과 2 사이가 된다는 것을 가시적으로 알 수 있다. 또한 [그림 5]와 같이 수직선을 통하여 $4-1\frac{2}{3}$의 두 분수를 각각 $4=\frac{12}{3}$, $1\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$로 바꾸어 계산할 수 있다는 원리를 이해할 수 있다.



[그림 4] 분수의 덧셈의 계산원리를 알아보기 위하여 수직선 사용 (교육부, 2020c, p.11)



[그림 5] 분수의 뺄셈의 계산원리를 알아보기 위하여 수직선 사용 (교육부, 2020c, p.19)

지금까지 살펴본 교과서에 제시된 수직선 표현은 학생들이 진분수, 가분수 등의 여러 가지 분수의 개념, 분모가 같은 분수의 크기를 비교하는 방법, 분모가 같은 두 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산 방법 등을 이해하는데 도움이 될 것이다. 다만, 교과서에 제시된 수직선은 단위 구간이 등분할되어 대부분의 수가 명확히 드러나고 분수의 덧셈과 뺄셈 과정이나 계산 결과를 학생들이 쉽게 알 수 있도록 안내한다는 점에서, 학생들이 수직선의 중요한 핵심적 아이디어를 탐색할 기회가 다소 제한적일 수 있다고 할 수 있다.

3. 학생들의 수직선 이해에 관한 선행 연구 고찰

분수를 학습할 때 수직선 모델을 활용하는 것은 다른 분수 모델에서는 비교적 덜 명확하게 드러날 수 있는 수의 크기와 관계를 이해할 수 있는 기회를 제공한다(김양권, 홍진곤, 2016; Bright et al., 1988; Freeman

& Jorgensen, 2015; Gravemeijer, 1994; Hamdan & Gunderson, 2017; Hannula, 2003). 선행 연구에서는 학생들의 수직선 이해 실태를 살펴보기 위하여, 교과서에서 흔히 제시되는 수직선 형태 외에 다양한 수직선 형태를 활용하여 학생들의 반응을 살펴보고 있다. 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 관련된 선행 연구를 통해 드러난 초등학생들의 수직선 이해 실태를 간략히 요약하면 다음과 같다.

첫째, 학생들은 다른 분수 모델에 비하여 수직선 모델을 이해하는데 어려움을 겪는다. 예를 들어, 김양권과 홍진곤(2017)은 초등학생들이 수 개념과 관련하여 수직선을 어떻게 이해하는지 살펴보기 위하여, 같은 내용과 구조의 문항을 그림, 수 트랙, 수직선 등으로 표현하여 학생들에게 제시하였다. 연구 결과, 학생들은 분수를 표현하거나 크기를 비교하는 문항 등에서 수식이나 수 트랙, 그림 표현에 비하여 수직선 표현으로 나타내는데 낮은 정답률을 드러냈다. 이러한 연구 결과는 Hannula(2003)에서도 확인할 수 있는데 $\frac{3}{4}$을 분수 막대와 수직선에 각각 표현하도록 했을 때, 분수 막대에는 약 70%의 학생들이 정확하게 나타낸 반면, 수직선에는 약 38%의 학생들만이 바른 위치에 나타낼 수 있었으며, 분수 막대 과제와 수직선 과제의 관계를 살펴본 결과 분수 막대를 바르게 풀지 못했을 때 수직선 과제를 해결할 수 있는 가능성은 오직 8%인 반면, 수직선 과제를 해결한 경우에는 93%가 다른 과제를 해결할 수 있다는 것이 드러났다. Kara와 Incikabi(2018)의 연구에서도 6학년 학생들은 분수의 덧셈과 뺄셈을 수행하는데 수식이나 원모델에 비하여 수직선에서 주어진 연산을 표현하고 결과값을 구하는데 어려움을 드러냈다.

둘째, 학생들은 반구조화되거나 빈수직선을 활용한 분수 과제를 해결하는데 어려움을 겪는다(이상미, 2010; Bobis & Bobis, 2005; Izsák et al., 2008; Lemmo et al., 2015). 교과서에 제시되는 0부터 일정한 크기가 반복적으로 제시되는 전형적인 수직선과 다르게 반구조화되거나 빈수직선에서 학생들이 스스로 단위를 파악하거나 분수를 위치시키거나 수직선에 제시된 분수의 크기를 파악해야한다. 이와 관련하여, Izsák 외(2008)는 학생들이 수직선에서 단위 구간을 분할하는 방법과 관련하여 세로선을 해석하는데 어려움을 겪는다고 보고한다. 즉, 학생들은 0부터 1 사이에 제시된 세로선의 개수만을 가지고 분수의 분모를 결정하거나 세로선 사이의 간격이 동일한지 주의를 기울이지 않는다. Lemmo 외(2015)는 초등학교 6학년 학생들에게 0부터 $\frac{1}{2}$간격으로 세로선이 표시되고 0, 1, 3에 해당하는 위치에만 수가 표시된 수직선을 제시한 뒤, $\frac{3}{2}$과 $\frac{5}{10}$의 위치를 나타내보는 과제를 제시하였다. 연구 결과, 학생들 중 약 12%만이 해당 분수의 위치를 바르게 나타내었고, 약 85%는 잘못된 위치에 분수를 나타내었다. 오답 가운데 많은 학생들은 세로선 사이의 간격의 크기를 고려하지 않고 한 칸의 간격을 무조건 1로 생각하거나 제시된 분수의 분자만을 고려하여 $\frac{5}{10}$를 수직선의 5의 위치에 나타내기도 하였다.

이와 같은 연구 결과를 통해 드러난 수직선 과제에 대한 학생들의 어려움은 교사들이 수직선을 활용하여 분수를 지도할 때 좀 더 주의를 기울일 필요가 있다는 것을 시사한다. 특히, 수직선 표현에서 제시되는 정보들을 학생들이 당연히 이해할 것이라 가정하는 것이 아니라(Teppo & van den Heuvel-Panhuizen, 2014), 수직선을 다루는 초기 활동으로 단위, 등분할, 동치 등의 아이디어가 수직선에 어떻게 표현되는지 살펴볼 필요가 있을 것이다. 본 연구에서는 분수 학습에서 수직선 표현의 중요성과 학생들의 어려움을 바탕으로, 초등학생들의 수직선 과제 해결 실태를 살펴보고 이를 통하여 분수 학습에서 수직선 활용 방안에 대한 시사점을 도출하고자 한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈을 중심으로 초등학생들의 수직선 과제 해결 실태를 알아보는 것이 목적이다. 이를 위하여 초등학교 4학년을 연구 대상으로 선정하였는데, 이는 4학년 학생들은 단위분수의 크기 비교, 여러 가지 분수 및 분수의 덧셈과 뺄셈을 학습하면서 수직선을 다루어본 경험이 있기 때

문에 본 연구 결과를 통한 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈의 학습에서의 수직선 활용 방안에 대한 시사점을 제공할 수 있을 것이라 판단되었다. 학력 및 사회경제적 수준이 중간 정도인 대전광역시와 포항시에 각각 소재한 초등학교에서 2개 학급씩을 임의 표집하여 총 75명의 4학년 학생들을 연구 대상으로 하였다.

본 연구에서는 연구 대상의 학생 수가 많지 않고 표집이 임의로 이루어졌기 때문에 본 연구 결과를 우리나라 초등학교 4학년 학생들의 수직선 이해 실태로 확대하여 해석하기에 제한이 있다. 또한 양적 연구의 방법을 사용하여 수직선 검사 문항에 대한 학생 반응을 통계적으로 해석하여 학생들의 사례에 대한 질적 분석이 이루어지지 못한 한계가 있다. 단, 검사 실시의 시기가 분수의 개념 및 분모가 같은 분수의 덧셈과 뺄셈을 학습한 4학년 2학기 후반이기 때문에, 학생들이 이미 학습한 내용을 수직선에 어떻게 표현하고 해석하는지에 관한 실태를 전반적으로 이해할 수 있다는 점에서 의의가 있다고 여겨진다.

2. 검사 도구

교과서 분석 및 문헌 검토를 바탕으로 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 검사 도구를 [표 2]와 같이 구성하였다. 분수 개념은 수직선의 화살표가 가리키는 위치에 알맞은 분수 쓰기, 제시된 분수를 수직선에 나타내기, 수직선에 1을 나타내기, 단위분수를 포함한 분수를 나타내고 크기 비교하기와 관련된 내용으로 총 13개의 문항으로 구성되었다. 분수의 덧셈과 뺄셈은 분수의 덧셈식이나 뺄셈식을 수직선에 나타내고 계산하기, 수직선을 보고 알맞은 분수의 덧셈식이나 뺄셈식 쓰기의 총 9개의 문항으로 구성되었다. 주목할 점은 검사 문항을 구성할 때 동일한 문항 내용이더라도 제시하는 수직선의 형태를 다양하게 함으로써 학생들의 수직선 및 분수에 대한 이해를 보다 상세하게 살펴보고자 하였다는 점이다.

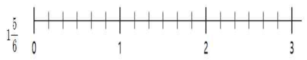
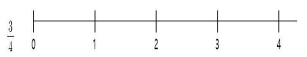
예를 들어, [표 3]은 수직선에 분수를 나타내는 4. 5. 6번 문항에서 각각 제시되는 수직선이다. 첫 번째는 교과서에 제시되는 형태의 구조화된 수직선으로 단위 구간이 지정되어 있고 나타내고자 하는 분수에 맞게 단위 구간이 등분할되어 있다. 다음 수직선은 0, 1, 2, 3, 4가 제시되지만 단위 구간이 등분할되지 않았고, 마지막 수직선은 0만 제시되었다. 첫 번째를 제외한 수직선은 학생들이 단위 구간을 등분할하거나 단위를 지정해야하는 반구조화된 수직선으로, 교과서에 제시된 형태는 아니지만 학생들이 수직선에서 단위를 어떻게 인식하는지, 분할을 어떻게 수행하는지, 수직선에서 분

[표 2] 검사 문항의 구성

유형		문항 내용	문항번호 (문항 개수) 구조화된 수직선	반구조화된 수직선
분수 개념	분수 나타내기	• 수직선의 화살표가 가리키는 위치에 알맞은 분수 쓰기	1,2(2)	3(1)
		• 제시된 분수를 수직선에 나타내기	4(1)	5,6,7(3)
		• 수직선에 1을 나타내기		8,9(2)
	분수의 크기 비교	• 두 분수를 수직선에 나타내고 크기 비교하기	10,11(2)	12(1)
		• 단위분수를 수직선에 나타내고 크기 비교하기		13(1)
분수의 덧셈과 뺄셈	분수의 덧셈	• 분수의 덧셈식을 수직선에 나타내고 계산하기	14(1)	15(1)
		• 수직선을 보고 알맞은 분수의 덧셈식 쓰기	16,17(2)	
	분수의 뺄셈	• 분수의 뺄셈식을 수직선에 나타내고 계산하기	18,19(2)	20(1)
		• 수직선을 보고 알맞은 분수의 뺄셈식 쓰기	21,22(2)	
합계(개)			12	10

수의 덧셈과 뺄셈을 어떻게 표현하는지 등과 관련된 학생들의 이해를 살펴볼 수 있을 것이라 판단되어 본 연구의 수직선 검사지에 추가하였다.

[표 3] 검사지에 제시된 수직선의 형태와 예

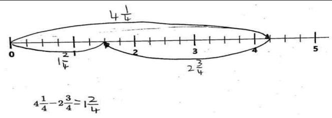
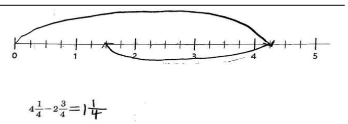
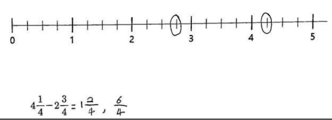
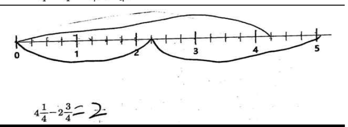
수직선 형태	예
구조화된 수직선 (단위 구간 제시, 등분할)	
반구조화된 수직선 (단위 구간 제시)	
반구조화된 수직선 (0 제시)	

본 연구에서는 전반적으로 문항 내용에 따라 구조화된 수직선과 반구조화된 수직선을 모두 제시하였으나, 문항 내용에 따라 일부 문항에서는 반구조화된 수직선 또는 구조화된 수직선만을 나타내었다. 즉, 수직선에 1 나타내기, 단위분수를 수직선에 나타내고 크기 비교하기에 관한 문항에 대해서는 학생들이 학생들이 제시된 분수의 크기를 바탕으로 1의 위치를 지정하거나 단위 구간과 등분할을 해야하기 때문에 반구조화된 수직선만을 제시하였고, 수직선을 보고 알맞은 분수의 덧셈식 쓰기, 수직선을 보고 알맞은 분수의 뺄셈식 쓰기에 관한 문항에서는 단위 구간과 등분할이 모두 제시된 수직선에 표현된 분수의 덧셈과 뺄셈을 이해해야 하기 때문에 구조화된 수직선만을 제시하였다. 이러한 맥락에서 구조화된 수직선과 반구조화된 수직선의 문항의 개수를 각각 12개와 10개로 구성하였다.

3. 자료 수집 및 분석

2021년 12월에 각 학급의 담임 교사의 감독 아래 40분 동안 학생들이 직접 검사지에 문제를 해결하였다. 수집된 검사지의 학생들 반응을 정답과 오답, 무응답으로 구분하였는데, 문항 가운데 수직선에 나타내고 계산을 해야하는 문항의 경우에는 이 두 가지를 모두 옳게 해결한 경우를 정답으로 분류하고, 수직선 표현만 맞고 계산 결과가 틀리거나 수직선 표현이 틀리고 계산 결과만 맞은 경우는 오답으로 분류하였다. 이 때 반구조화된 수직선의 경우, 등분할하기 위하여 수직선에 세로선을 추가하여 수를 나타내야 하므로 세로선 사이의 등분할 여부, 문제에 제시된 수를 수직선의 알맞은 위치의 점으로 나타냈는지의 여부 등을 고려하여 정답과 오답으로 분류하였다. [표 4]는 '$4\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}$을 수직선에 나타내고 계산해 보세요.' 문항에 대한 분석의 예이다.

[표 4] 문항 분석의 예

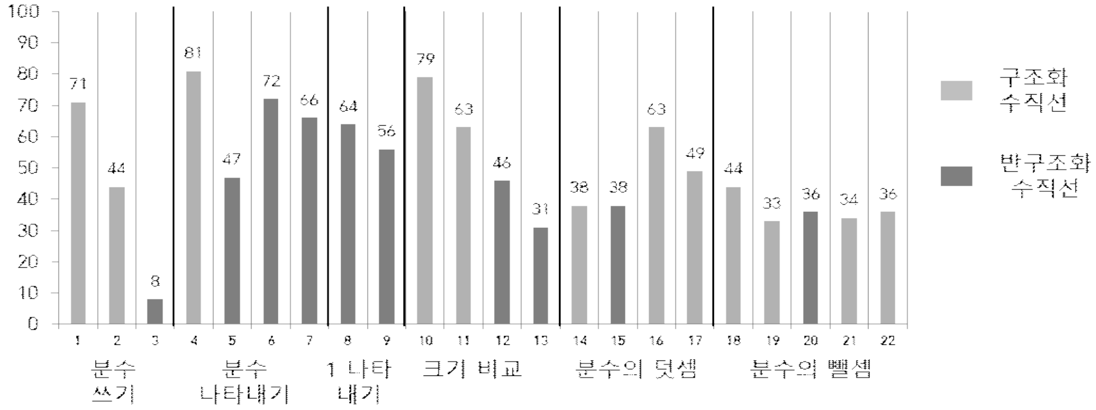
반응 유형	예
수직선 정답 + 계산 결과 정답	
수직선 정답 + 계산 결과 오답	
수직선 오답 + 계산 결과 정답	
수직선 오답 + 계산 결과 오답	

자료 분석은 우선 전체 학생들의 문항별 정답률을 살펴봄으로써 학생들이 수직선을 활용하여 분수를 얼마나 이해하는지 전반적으로 살펴보고자 하였다. 다음으로, 분수 개념 유형과 분수의 덧셈과 뺄셈 유형으로 구분하여 각 문항에 대한 학생들의 반응을 상세히 살펴보았다. 이 때, 학생들의 정답 유형뿐만 아니라 오답 유형도 살펴봄으로써 학생들의 이해와 어려운 점을 다각도에서 살펴보고 수직선을 활용한 분수 지도에 대한 시사점을 얻고자 하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 전반적인 실태 분석

수직선 검사지 문항에 대한 학생들의 문항별 정답률을 살펴보면 [그림 6]과 같다. 4번, 10번, 6번, 1번 문



[그림 6] 전체 학생들의 문항별 정답률(%)

항의 정답률이 각각 81%, 79%, 72%, 71%로 다른 문항에 비하여 높게 나타났고, 나머지 문항의 경우 60% 이하의 정답률을 보였다. 이는 전반적으로 학생들이 수직선을 이용하여 분수를 나타내거나 분수의 덧셈과 뺄셈 연산을 수행하는데 어려움을 겪는다는 것을 의미한다. 70% 이상의 정답률인 문항에 제시되는 수직선을 살펴보면 수직선의 단위 구간과 등분할이 비교적 명확하게 드러나기 때문에 학생들이 분수의 위치와 크기를 파악하기 용이하였을 것이라 추측된다. 반면, 단위 구간이 분할되지 않거나, 단위가 제시되지 않는 등 학생들이 수직선을 보다 구조화해야하는 노력이 필요한 문항의 경우, 동일한 유형의 문항이라도 구조화된 수직선이 제시되는 문항의 정답률에 비하여 낮은 정답률을 드러냈다. 특히, 정답률이 가장 낮은 3번 문항은 세로선이 동일한 간격으로 제시되지 않아 수직선의 화살표가 가리키는 위치에 알맞은 분수를 고르기 위해서 단순히 단위 구간의 칸의 개수를 세어서는 안된다는 점을 고려했을 때, 이와 같은 낮은 정답률은 학생들이 수직선에서 분수의 등분할의 개념을 이해하지 못한다는 것을 시사한다.

분수 나타내기와 1 나타내기 유형과 관련된 문항의 정답률을 살펴보면, 5번과 9번을 제외하고 60% 이상의 정답률을 보이며 다른 유형에 비하여 정답률이 높은 편이라는 것을 알 수 있다. 또한 5~7번 문항의 경우, 모두 반구조화된 수직선이 제시되지만 수직선에 0만 제시된 6, 7번 문항의 정답률에 비하여, 수직선에 0, 1, 2, 3이 제시된 5번 문항의 정답률이 낮게 나타났다는 점도 주목할 필요가 있다. 또한 0과 분수가 제시된 수직선에서 1의 위치를 찾는 8, 9번 문항의 정답률이 분수 나타내기 유형에 관한 대부분의 문항에 비해 정답률이 낮다는 점은, 학생들이 분수의 의미를 바탕으로 수직선에서 1의 위치를 찾는 것에 어려움을 느낀다는 것을 드러낸다.

다음으로 분수의 크기 비교하기 유형의 경우 10, 11번 문항의 정답률에 비하여 12, 13번 문항의 정답률은 50% 이하로 낮게 나타났다. 12번과 13번 문항의 경우 반구조화된 수직선이 제시된다는 점을 고려한다면, 이러한 결과는 수직선 표현에서 학생들이 직접 단위를 지정하여 분수에 맞게 등분할하는 활동이 쉽지 않다는 것을 의미한다. 특히, 단위분수를 반구조화된 수직선에 나타낸 뒤 크기를 비교하는 13번 문항의 정답률이 31%라는 점을 통하여 수직선에 단위분수를 나타내고 크기를 비교하는 활동을 학생들이 어려워한다는 것을 알 수 있다.

분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 문항을 살펴보면 16번을 제외하고 모두 50% 이하의 정답률을 나타냈다. 특히, 분수의 덧셈에 관한 16, 17번과 분수의 뺄셈에 관한 21, 22번 문항의 경우 2015 개정 초등학교 수학 교과서에 제시되어 학생들이 이미 다루어본 수직선 형태라는 점을 고려했을 때 이와 같은 낮은 정답률은 주목할 필요가 있다. 즉, 이러한 결과는 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 이해와 문제 해결을 돕기 위한 수직선 표현

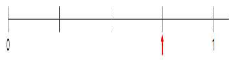
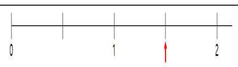
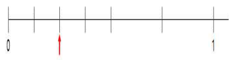
이, 오히려 일부 학생들에게는 어려움으로 작용할 수도 있을 것이라 추측할 수 있다.

2. 문항 유형에 따른 학생들의 이해 분석

가. 분수 개념 유형에서의 이해 분석

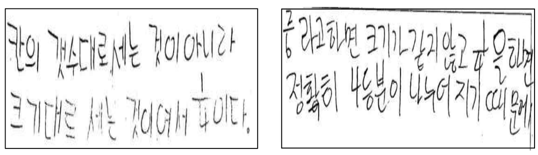
분수 개념 유형 가운데 수직선의 위치에 알맞은 분수 쓰기 유형의 문항에 대한 학생들의 정답률은 [표 5]와 같다. 1번 문항의 정답률이 71%인데 비하여 2번과 3번 문항의 경우 정답률이 각각 44%와 8%로 정답률보다 오답률이 더 높게 나타났다. 1번과 2번 문항을 살펴보면 검사지에서 세로선 사이의 간격이 동일해 보이지만 1번 문항의 경우 0부터 1까지가 4등분되었기 때문에 한 칸의 크기가 $\frac{1}{4}$이고 2번 문항의 경우 2등분되었기 때문에 $\frac{1}{2}$이라는 차이가 있다. 따라서 학생들이 수직선에서 화살표가 가리키는 위치에 알맞은 분수를 알아내기 위해서는 0부터 1까지의 단위 구간과 단위 구간이 어떻게 등분할되었는지 이해하여 한 칸의 크기를 구할 수 있어야 하고, 이와 더불어 0부터의 거리를 고려할 수 있어야 한다. 본 연구 결과 드러난 2번 문항의 낮은 정답률은 학생들이 수직선에서 단위를 인식하는데 어려움을 겪고 있을 것이라 추측할 수 있는데, 이는 수직선의 단위 구간을 제시된 수직선 전체로 인식하기 때문일 것이라 해석된다.

[표 5] 수직선의 위치에 알맞은 분수 쓰기 유형의 문항에 대한 정답률 명(%)

문항 번호	문항 내용	정답	오답	무응답
1		53 (71)	22 (29)	0 (0)
2		33 (44)	41 (55)	1 (1)
3		6 (8)	68 (91)	1 (1)

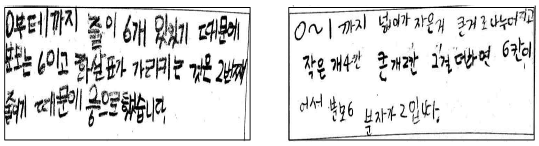
학생들의 어려움을 보다 상세히 이해하고자, 1번과 2번 문항에 대한 학생들의 오답 반응을 살펴보았다. 1번 문항에 대한 오답은 $\frac{3}{0}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{10}$이 있었고, 2번 문항의 오답은 $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $1\frac{1}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$이 있었다. 또한 오답 가운데 1번 문항의 경우 $\frac{3}{0}$, $\frac{0}{3}$과 같이 분모나 분자가 0인 분수를 제시한 반응이, 2번 문항의 경우 $\frac{1}{2}$과 $\frac{3}{4}$의 반응이 다수 드러났다. 1번 문항에서 일부 학생들이 제시한 $\frac{3}{0}$이나 $\frac{0}{3}$의 반응은 '0에서부터 3칸'과 같이 0으로부터의 거리로 해석하고 분수 형태로 나타냈거나 분수의 의미를 이해하지 못한 채 학생 임의로 분수 형태를 표현한 것이라 해석된다. 한편, 2번 문항에서는 수직선의 한 칸의 크기가 $\frac{1}{2}$이라는 것을 이해하였지만 0으로부터의 거리를 고려하지 못했거나, 수직선의 단위 구간을 고려하지 못하고 1번 문항과 같이 해결하여 오답 반응을 제시하였을 것이라 생각된다. 또한 1번과 2번 문항에 대한 오답 반응이 매우 다양하다는 점은 학생들이 수직선에서 분수를 어떻게 표현할 수 있는지에 대해 명확히 이해하지 못한 채 저마다의 방법으로 수직선을 해석하였을 것이라 추측된다.

3번 문항은 전체 문항 가운데 가장 낮은 정답률을 보이는 문항으로, 수직선의 화살표가 가리키는 위치에 알맞은 분수를 <보기>의 $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{1}{4}$, 2, $\frac{2}{4}$ 가운데 고르고 이유를 설명하는 문항이다. 전체 75명의 학생 가운데 6명 학생만이 정답으로 분류되었으며, [그림 7]은 정답에 해당하는 학생들이 왜 그렇게 생각했는지에 대해 서술한 반응의 예이다. 학생들의 반응을 살펴보면 칸의 개수가 아니라 칸의 크기에 따라 분수를 선택하거나 정확히 4등분으로 나누어 떨어지기 때문이라고 설명하였는데, 이러한 학생들은 수직선에서의 분수의 등분할 개념에 대한 이해가 형성되어 있다고 할 수 있다.



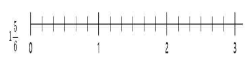
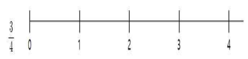
[그림 7] 3번 문항의 정답 반응의 예

한편, 3번 문항의 오답을 살펴보면 일부 학생들은 $\frac{1}{4}$을 답으로 선택하였지만 왜 그렇게 생각했는지에 대한 설명이 없거나 ‘$\frac{1}{4}$ 다음엔 빼기로 문제를 내면 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$ 그 다음 1일 것 같아서’라는 적절하지 않은 이유를 제시하였다. 오답 반응 가운데 $\frac{2}{6}$를 선택한 학생들이 많았는데 그 이유를 살펴보면 [그림 8]과 같다. 학생들이 설명한 이유 가운데 0부터 1 사이의 세로선 간격이 동일하지 않다는 점을 인식했음에도 $\frac{2}{6}$를 답으로 선택하였다는 것을 알 수 있는데, 이는 분수의 등분할에 대한 이해가 부족하다는 것을 보여준다.



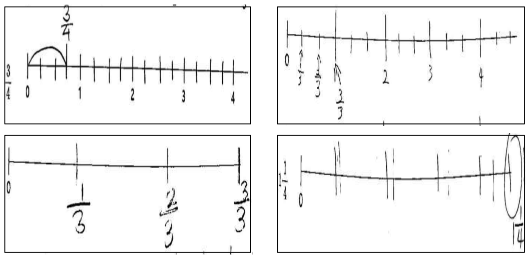
[그림 8] 3번 문항의 오답 반응의 예

[표 6] 수직선에 분수 나타내기 유형의 문항에 대한 정답률 명(%)

문항 번호	문항 내용	정답	오답	무응답
4		61 (81)	12 (16)	2 (3)
5		35 (47)	38 (50)	2 (3)
6		54 (72)	21 (28)	0 (0)
7		49 (66)	25 (33)	1 (1)

다음으로, 수직선에 분수 나타내기 유형의 문항에 관한 반응을 살펴보면([표 6] 참조), 4번 문항에 대한 정답률이 가장 높고, 다음으로 6번, 7번, 5번 문항의 순서이다. 4번 문항은 0, 1, 2, 3의 위치와 각 단위 구간이 6등분되어 제시되기 때문에 학생들이 $1\frac{5}{6}$의 위치를 나타내는데 큰 어려움을 겪지 않았을 것이라 예상된다. 반면, 5~7번 문항의 경우 교과서에서 다루어 본 수직선의 형태가 아니고 학생들이 직접 단위분수를 반복하거나 단위 구간을 정한 뒤 등분할하여 제시된 분수를 나타내어야 하기 때문에 어려움을 겪었을 것이다.

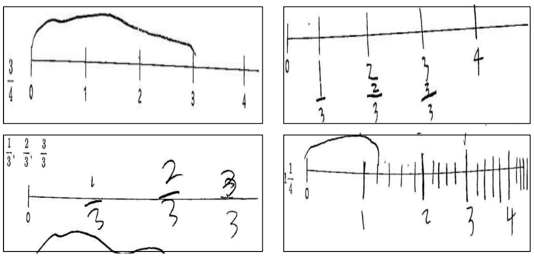
[그림 9]는 5~7번 문항에 대한 학생들의 정답 반응의 예이다. 학생들은 5번 문항에서 $\frac{3}{4}$을 수직선에 나타내기 위해 0과 1 사이에 세로선을 3개 그은 다음 0으로부터 3번째 세로선의 위치를 $\frac{3}{4}$이라 지정할 수 있었다. 6번과 7번 문항에서는 $\frac{1}{3}$이나 $\frac{1}{4}$의 크기를 반복하거나, 1의 위치를 먼저 정한 다음 0과 1 사이를 등분할하는 방법으로 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$이나 $1\frac{1}{4}$을 나타내는 것을 확인할 수 있었다.



[그림 9] 분수 나타내기 유형의 문항에 대한 정답 반응의 예

한편, 5~7번 문항에 대한 오답 반응의 예를 살펴보면 [그림 10]과 같다. 우선, 정답률이 가장 낮은 5번 문항의 오답 반응을 살펴보면 많은 학생들이 수직선의 3의 위치에 분수 $\frac{3}{4}$을 나타냈는데, 이는 학생들이 분수 $\frac{3}{4}$의 의미를 이산량과 관련지어 ‘4 중에 3’과 같이 생각하거나 분수를 하나의 수가 아닌 분자와 분모의 각각의 수로 이루어졌다고 이해하기 때문일 것이라 유추할 수 있다. 이와 같은 반응은 0만 표시된 수직선을 제시하고 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$을 나타내게 한 문항에서도 유사

하였는데, 즉 자연수 1, 2, 3을 쓰고 각 자연수에 분수 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$을 대응시켜 나타내었다. 이 밖에도 학생들은 수직선의 한 점에 분수를 대응시키지 못하고 수직선을 분수의 가로선처럼 사용하여 분수를 표현하거나, $1\frac{1}{4}$을 나타내기 위하여 0과 1 사이에 세로선을 4개 긋는 것과 같이 단위 구간을 등분할하는데 오류를 드러냈다.



[그림 10] 분수 나타내기 유형의 문항에 대한 오답 반응의 예

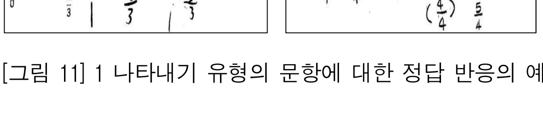
1 나타내기 유형의 문항에 대한 정답률을 살펴보면 [표 7]과 같이, 8번 문항의 정답률이 64%, 9번 문항의 정답률이 56%로 8번 문항의 정답률이 9번 문항에 비하여 더 높다는 것을 알 수 있다. 8번 문항의 경우 $1=\frac{3}{3}$을 고려하여 제시된 0과 $\frac{1}{3}$ 사이의 간격을 2번 더 반복하여 1의 위치를 찾으면 된다. 이에 비해 9번 문항의 경우 $1\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$의 관계와 $\frac{5}{4}$는 $\frac{1}{4}$이 5라는 것을 이해하고 0과 $1\frac{1}{4}$까지의 거리를 5등분하여 1의 위치를 찾아야 하는데, 문항별 정답률을 비교해보면 학생들에게 이러한 사고 과정이 쉽지 않다는 것을 알 수 있다. 또한 9번 문항의 정답률을 앞서 살펴본 7번 문항과 비교했을 때([표 6] 참조), 학생들이 $1\frac{1}{4}$을 나타내는 문항보다 0과 $1\frac{1}{4}$을 고려하여 1을 나타내는 문항을 더 어려워할 것이라 추측할 수 있다.

[표 7] 1 나타내기 유형의 문항에 대한 정답률

명(%)

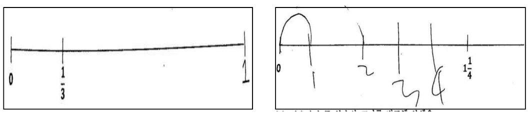
문항 번호	문항 내용	정답	오답	무응답
8		48 (64)	27 (36)	0 (0)
9		42 (56)	28 (37)	5 (7)

정답으로 분류된 반응을 살펴보면, 8번 문항의 경우 대부분의 학생들은 0부터 $\frac{1}{3}$까지의 거리를 기준으로 $\frac{2}{3}$의 위치를 함께 나타내면서 1의 위치를 나타내었다([그림 11] 참조). 일부 학생들의 경우 수직선에 $\frac{2}{3}$의 위치를 표시하지 않고 1의 위치만을 표시했는데 이는 문항의 지시 사항에 $\frac{2}{3}$를 나타내도록 하지 않았기 때문에 학생들이 머릿속으로 $\frac{2}{3}$의 위치를 정한 뒤 1의 위치를 표시했을 것이라 추측된다. 9번 문항도 마찬가지로 0부터 $1\frac{1}{4}$까지의 거리를 5등분하고 $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$ 또는 1을 함께 나타내면서 1의 위치를 표시하였으며, 정답 반응 중 일부는 1의 위치만 표시하였다. 교과서에는 보통 0과 1의 위치가 표시된 수직선이 제시된다는 점을 고려해보면, 1의 위치를 표시하는 과제에 대한 학생들의 정답률이 다른 문항 유형에 비해 높은 편이 아니더라도, 연구 결과 드러난 이와 같은 학생들의 반응은 학생들이 분수의 의미를 바탕으로 수직선을 다룰 수 있는 가능성이 있다는 것을 보여준다는 측면에서 긍정적으로 해석할 수 있다.



[그림 11] 1 나타내기 유형의 문항에 대한 정답 반응의 예

한편, 8번과 9번 문항에 대한 오답 반응을 살펴보면, [그림 12]의 왼쪽과 같이 제시된 0과 분수를 고려하지 않은 채 무조건 수직선의 끝에 1을 표시한 반응이 있었다. 특히, 9번 문항의 경우 1이 $1\frac{1}{4}$보다 작은 수임에도 불구하고 이러한 오답 반응이 제시되었는데, 이는 학생들이 수직선을 이해하지 못하고 제시된 수직선 전체를 무조건 1로 인식하고 있다는 것을 드러낸다. 다른 오답 반응을 살펴보면, [그림 12]의 오른쪽과 같이 분수가 아닌 자연수만을 수직선에 대응시키거나, 수의 크기를 고려하지 않고 0과 $1\frac{1}{4}$ 사이에서 0에 더 가깝게 1을 나타내거나, 세로선의 개수나 간격을 고려하지 않고 많은 세로선을 표시한 다음 1을 대응시키는 경우 등이 있었는데, 이러한 반응은 학생들의 분수 및 수직선에 대한 이해가 불완전하다는 것을 시사한다.

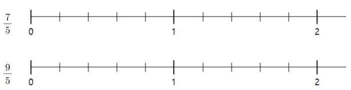
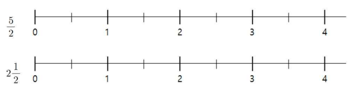
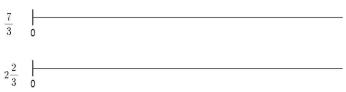


[그림 12] 1 나타내기 유형의 문항에 대한 오답 반응의 예

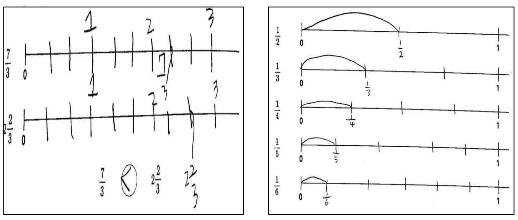
분수의 크기 비교 유형의 문항에 대한 정답률을 살펴보면, 10번 문항의 정답률이 가장 높고, 다음으로 11번, 12번, 13번 문항의 순서이다([표 8] 참조). 오답 반응은 식은 맞았지만 수직선 표현이 틀린 '수직선 오답', 수직선 표현은 맞았지만 식이 틀린 '식 오답', 수직선 표현과 식이 모두 틀린 '수직선과 식 오답'의 유형으로 구분하여 분석하였다. 오답의 정답률을 유형별로 살펴보면, '수직선 오답'이나 '수직선과 식 오답'의 비율이 '식 오답'의 비율에 비하여 전반적으로 높게 드러나는데 이는 학생들 스스로 수직선에 분수를 나타내어 크기를 비교하는 것이 쉽지 않다는 것을 시사한다. 특히, 12번 문항의 경우 정답과 수직선 오답의 비율을 합치면 86%인데, 이는 전체의 86%의 학생들이 $\frac{7}{3}$과 $2\frac{2}{3}$의 크기를 식으로 비교할 수 있지만 이 중 절반 정도의 학생들만이 수직선과 함께 두 분수의 크기를 비교할 수 있다는 것을 드러낸다. 또한 13번 문항의 경우 46%의 학생들이 식으로 단위분수의 크기를 비교할 수 있고 31%의 학생들만이 수직선 표현과 함께 단위분수의 크기를 비교할 수 있다는 것을 알 수 있다.

[그림 13]은 분수 크기 비교하기 유형의 문항에서 정답으로 분류된 반응의 예시이다. 12번 문항에서는 수직선의 왼쪽 맨 끝에 0만 제시되기 때문에 학생들

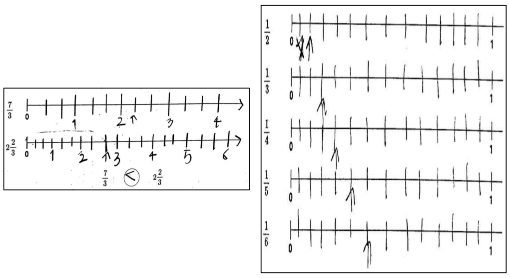
[표 8] 분수의 크기 비교 유형의 문항에 대한 정답률 명(%)

문항 번호	문항 내용 (10~12) 수직선을 이용하여 두 분수의 크기를 비교해 보세요.)		정답	오답			무응답
				수직선 오답	식 오답	수직선과 식 오답	
10		$\frac{7}{5}$ ○ $\frac{9}{5}$	59 (79)	16 (21)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
11		$\frac{5}{2}$ ○ $2\frac{1}{2}$	47 (63)	10 (13)	2 (3)	16 (21)	0 (0)
12		$\frac{7}{3}$ ○ $2\frac{2}{3}$	34 (46)	30 (40)	1 (1)	9 (12)	1 (1)
13		단위분수의 크기를 비교해 보세요. ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$)	23 (31)	11 (15)	11 (15)	29 (38)	1 (1)

스스로 수직선을 구성해야 하는데, [그림 13]의 왼쪽과 같이 $\frac{7}{3}$과 $2\frac{2}{3}$를 각각 나타내는 2개의 수직선의 단위 구간의 간격을 동일하게 설정하고 단위 구간 사이를 3 등분한 다음 $\frac{7}{3}$과 $2\frac{2}{3}$를 각각 나타내었다. 13번 문항의 경우 [그림 13]의 오른쪽과 같이 각 단위분수에 맞게 0과 1 사이를 등분한 다음 각각의 단위분수를 표시하였다.



[그림 13] 분수 크기 비교하기 문항의 정답 반응의 예



[그림 14] 분수 크기 비교하기 문항의 오답 반응의 예

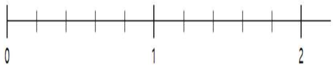
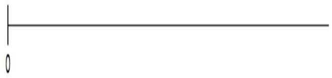
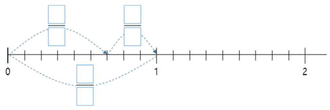
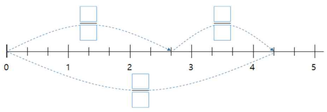
분수 크기 비교하기 유형의 문항에 대한 오답 반응의 예를 살펴보면, 12번 문항에 대해 [그림 14]의 왼쪽처럼 $\frac{7}{3}$과 $2\frac{2}{3}$를 각각 나타내고 두 분수의 크기를 비교하였다. 비록 각각의 분수는 수직선에 바르게 제시되었다고 할 수 있으나 두 분수의 크기를 비교하는 상황에서는 단위 구간의 간격을 같게 하여 분수의 크기를 비교해야 한다. 따라서 이러한 반응을 통하여 학생들이 수직선 표현을 식과 연결하지 못한다는 것을 알 수 있다. 13번 문항은 분수 크기 비교하기 유형 가운데 정답률이 가장 낮은 문항으로 학생들은 [그림 14]의 오른쪽과 같이 수직선에 단위분수를 나타낸 오답 반응을 드러냈다. 이는 단위분수의 크기를 비교할 때 분수의 분모와 분자를 별개로 생각하여 분모끼리만 비교하였을 가능성을 암시한다. 본 연구에서 제시한 수직선의 형태와 차이가 있지만 학생들은 교과서에서 이미 수직선을 통해 단위분수의 크기를 비교하는 활동을 경험해 보았다는 사실을 염두에 둔다면 이와 같은 결과는 주목할 필요가 있다.

나. 분수의 덧셈과 뺄셈 유형에서의 이해 분석

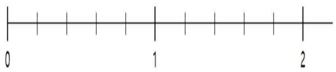
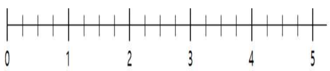
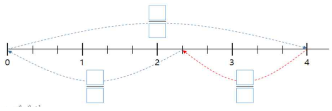
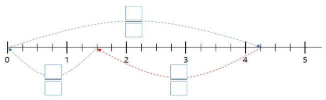
분수의 덧셈과 뺄셈 유형의 문항에 대한 학생들의 정답률은 [표 9], [표 10]과 같다. 전반적으로 수직선에서의 분수의 덧셈과 뺄셈 문항에 대한 정답률은 16번 문항을 제외하고 50% 이하로 드러났는데, 이러한 결과는 학생들의 절반 이상이 수직선을 이용한 분수의 덧셈과 뺄셈을 어려워하고 있다는 것을 드러낸다. 14~15번과 18~20번은 제시된 분수의 덧셈식이나 뺄셈식을 수직선에 나타내고 결과값을 구하는 문항이며, 16~17번과 21~22번 문항은 수직선의 □ 안에 알맞은 수를 써 넣고 알맞은 식을 쓰는 문항이다. 14~15번과 16~17번의 정답률을 비교해보면 분수의 덧셈의 경우 제시된 분수의 덧셈식을 수직선에 나타내고 계산하는 문항에 비하여, 수직선의 □를 채우고 알맞은 분수의 덧셈식을 쓰는 문항의 정답률이 높게 나타났다. 반면 분수의 뺄셈의 경우 전반적으로 정답률이 낮게 드러났다. 한편, 15번과 20번은 0만 표시된 수직선이 제시되어 학생들이 문제에 맞는 수직선을 구성해야하는데, 해당 문제에서 '수직선 오답'이 각각 59%, 41%로 가장 높은 비율을 차지하고 있다는 점은 학생들이 분수의 덧셈과 뺄셈을 수직선에 표현하는데 어려움을 겪고 있다는 것을 드러낸다.

분수의 덧셈 유형에 대한 반응을 살펴보면, 우선 14번과 15번은 수직선에 분수의 덧셈식을 나타내고 계산하는 문항으로 학생들은 [그림 15]와 같이 $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$와 $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$의 분수의 덧셈식을 수직선에 나타내고 계산할 수 있었다. 특히, 15번 문항은 반구조화된 수직선에 $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$를 나타내고 계산해야한다는 점을 염두에 둔다면, 학생들은 단위를 지정하고 분수식에 맞게 단위 구간을 등분할 수 있다는 것을 알 수 있다. 16번과

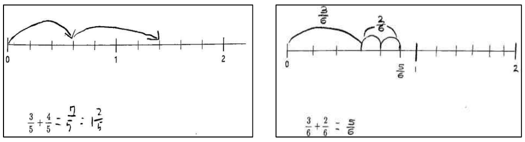
[표 9] 분수의 덧셈 유형의 문항에 대한 정답률 명(%)

문항 번호 (식)	문항 내용	정답	오답			무응답
			수직선 오답	계산결과 오답	수직선, 계산결과 오답	
14 ($\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$)		28 (37)	41 (55)	0 (0)	5 (7)	1 (1)
15 ($\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$)		28 (37)	44 (59)	0 (0)	2 (3)	1 (1)
16 ($\frac{6}{9}+\frac{3}{9}$)		47 (63)	0 (0)	3 (4)	23 (30)	2 (3)
17 ($\frac{8}{3}+\frac{5}{3}$)		37 (49)	0 (0)	3 (4)	32 (43)	3 (4)

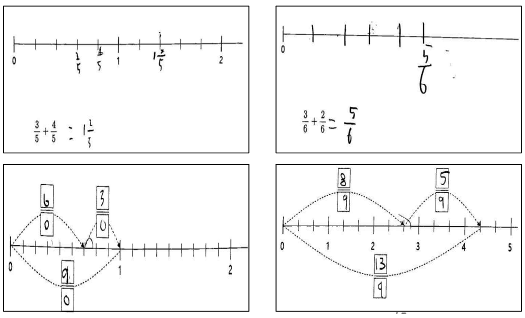
[표 10] 분수의 빼셈 유형의 문항에 대한 정답률 명(%)

문항 번호 (식)	문항 내용	정답	오답			무응답
			수직선 오답	계산결과 오답	수직선, 계산결과 오답	
18 ($2-\frac{3}{5}$)		33 (44)	20 (26)	2 (3)	17 (23)	3 (4)
19 ($4\frac{1}{4}-2\frac{3}{4}$)		25 (33)	25 (33)	2 (3)	21 (28)	2 (3)
20 ($1-\frac{3}{7}$)		27 (36)	31 (41)	0 (0)	15 (20)	2 (3)
21 ($\frac{12}{3}-\frac{5}{3}$)		25 (33)	0 (0)	14 (19)	35 (47)	1 (1)
22 ($\frac{17}{4}-\frac{11}{4}$)		27 (36)	1 (1)	12 (16)	33 (44)	2 (3)

17번 문항은 수직선의 각 화살표가 나타내는 분수와 분수의 덧셈과 뺄셈을 이해해야하는 문항으로, 14번과 15번에 비하여 정답률이 높게 나타났다. 하지만 수직선과 계산 결과 오답의 비율이 각각 30%, 43%라는 점은 학생들이 수직선에 제시된 분수를 파악하여 식으로 나타내는데 어려움이 있다는 것을 시사한다. 특히, 이러한 문항은 교과서에서 분수의 덧셈을 할 때 이미 다루어본 수직선 유형이라는 점을 고려한다면 학생들이 수직선에 제시된 분수의 덧셈을 해석하는 것이 쉽지 않다는 것을 분명히 알 수 있다.



[그림 15] 분수의 덧셈 문항의 정답 반응의 예

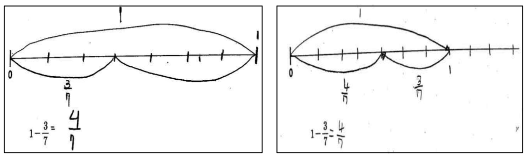


[그림 16] 분수의 덧셈 문항의 오답 반응의 예

한편, 분수의 덧셈 유형에서의 오답 반응의 예를 살펴보면, [그림 16]의 위쪽 그림과 같이 덧셈식에 포함된 각각의 분수를 나타낼 수 있으나 분수의 덧셈 상황을 수직선에 표현할 수 없거나 결과값만을 표현하는 오류를 드러냈다. 또한 16번과 17번 문항에서는 [그림 16]의 아래쪽과 같이 분자에 해당하는 값은 옳지만 분모에 해당하는 값을 오답으로 제시한 경우가 많았다. 오답을 살펴보면 분모의 값을 0, 1, 9, 6 등 임의로 정하였고, 이러한 결과는 학생들이 수직선에서 단위와 등분할을 통한 분수의 개념을 이해하는데 어려움을 느낀다는 것을 의미한다. 즉, 교과서 분석에서 살펴본 바와 같이 교과서에서는 분수의 덧셈에 관한 수직선 표현에서 분모의 값은 제시하고 분자의 값을 구하도록 하는데, 본 연구 결과를 통해 드러난 학생들의 수직선에서 분수의 덧셈의 오류 반응을 고려한다면 수직선 표현에서 분수의 덧셈과 뺄셈을 다룰 때 분수의 의미와 연산의 의미를 강조할 필요가 있음을 알 수 있다.

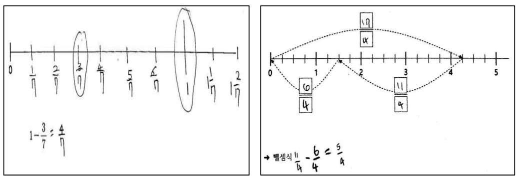
다음으로, 분수의 뺄셈 유형에 관한 정답률을 살펴보면 18번 문항이 44%로 분수의 뺄셈 문항의 정답률 가운데 가장 높고 나머지 19~22번 문항의 경우 30%대에 그치고 있다. 특히 분수의 덧셈 유형과 다르게 분수의 뺄셈의 모든 문항의 정답률이 낮게 드러났다는 점은 학생들이 분수의 덧셈에 비하여 분수의 뺄셈을 수직선에 표현하고 해석하는데 어려움을 겪는다는 것을 암시한다. 분수의 덧셈을 수직선에 나타낼 때는 분수식에 포함된 두 분수의 양을 같은 방향으로 연속하여 나타내는 반면, 분수의 뺄셈의 경우 빼어지는 분수와 몫을 나타내는 방식이 분수의 덧셈과 차이가 있다. 앞서 분수 개념에 관한 연구 결과에서 알 수 있듯이 학생들이 수직선에서 분수를 나타내는 것이 쉽지 않다는 점을 고려한다면, 분수의 뺄셈을 수직선에 표현하기 위해서는 분수와 뺄셈 연산과 결과값까지 나타내어야 하기 때문에 학생들에게 어려움이 가중될 것이라 추측된다.

분수의 뺄셈 문항의 정답 반응의 예를 살펴보면 [그림 17]과 같다. 뺄셈식의 경우 수직선에서 빼어지는 수만큼을 처음 수와 반대 방향으로 나타내거나, 처음 수와 빼어지는 수를 비교하면서 수직선에 뺄셈식을 표현할 수 있는데, [그림 17]은 20번 문항인 $1-\frac{3}{7}$ 을 수직선에 표현한 정답 반응의 예이다. 두 표현을 살펴보면 $\frac{3}{7}$ 과 $\frac{4}{7}$ 의 위치가 다르게 나타났지만, 뺄셈의 여러 가지 의미와 덧셈과 뺄셈의 관계를 고려한다면 두 반응 모두 $1-\frac{3}{7}$ 을 표현했다고 해석해볼 수 있다.



[그림 17] 분수의 뺄셈 문항의 정답 반응의 예

분수의 뺄셈 유형의 문항에 대한 오답을 살펴보면, 18~20번 문항의 경우 '수직선 오답' 및 '수직선과 계산 결과 오답'의 비율을 합했을 때 49%, 61%, 61%이고, 21~22번 문항의 경우 '계산 결과 오답' 및 '수직선과 계산 결과 오답'의 비율을 합하면 각각 66%, 60%이다. 이러한 결과는 학생들이 분수의 뺄셈식을 수직선에 표현하고, 제시된 수직선을 해석하여 알맞은 분수의 뺄셈식으로 나타내는데 어려움을 겪는다는 것을 드러낸다. [그림 18]은 분수의 뺄셈식에 관한 문항에서의 오답 반응의 예로 뺄셈식에 제시된 분수 각각을 수직선에 나타낼 수 있지만 뺄셈식은 표현할 수 없거나, 수직선의 빈 칸을 채울 수 있으나 수직선을 뺄셈식으로 나타내지 못한다는 것을 알 수 있다. 이와 같은 학생들의 오답 반응은 수직선에서 분수 및 분수의 뺄셈을 표현하고 해석하는데 어려움이 있다는 것을 반영한다.



[그림 18] 분수의 뺄셈 문항의 오답 반응의 예

V. 결론 및 논의

본 연구에서는 우리나라 초등학교 4학년 학생들의 수직선 표현에서의 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 이해가 어느 정도인지 살펴보았다. 연구 결과를 통한 결론 및 논의를 제시하면 다음과 같다.

첫째, 본 연구 결과 드러난 수직선 문항에 대한 반응을 살펴보면 전반적으로 정답률이 높지 않으며 전체 22개의 문항 가운데 정답률이 50% 이하인 문항이 13개로 확인되었다. 이는 학생들이 수직선을 활용하여 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 문항을 해결하는 데에 어려움이 있다는 것을 시사한다. 특히 본 연구에서 제시한 검사지에 포함된 일부 문항들은 교과서에서 학생들이 이미 다루어 본 문항들이라는 점을 고려한다면, 이와 같은 연구 결과는 학생들이 교과서에서 수직선을 다룰 때 수직선 표현에서의 분수의 의미와 분수의 덧셈과 뺄셈의 의미를 제대로 이해하지 못할 가능성이 있다는 것을 배제할 수 없다.

수직선 표현은 추상적인 수 체계를 직선에 은유적으로 나타내어 학생들의 이해를 도울 수 있는 시각적 표현이지만(Herbst, 1997), 수직선이 교수·학습 과정에서 학생들에게 유용하게 쓰이기 위해서는 수직선의 개념적 특성을 이해하는 과정이 수반되어야 한다(Skoumpourdi, 2010). Gray와 Doritou(2008)는 학생들이 수직선에서 수를 다룰 줄 아는 것이 수직선에 담긴 수학적 의미를 모두 이해했다고 할 수 없으므로 수직선의 내용과 형식에 대한 명확한 지도가 필요하다고 설명한다. 이러한 측면에서 본 연구 결과를 통하여 드러난 학생들의 수직선 이해 실태는 초등학교 수학 수업에서 수직선 표현과 수직선 표현에 드러난 분수의 개념 및 덧셈과 뺄셈의 의미를 좀 더 자세하고 명확하게 다루어 줄 필요가 있다는 것을 시사한다.

둘째, 본 연구 결과 학생들은 수직선을 다양한 방식으로 해석하여 사용하고 있다는 것을 알 수 있다. 즉, 본 연구에서 제시한 문항에 대한 학생들의 반응을 살펴보면 문항마다 다양한 오답 반응을 확인할 수 있으며, 이는 교사의 예상보다 학생들이 수직선을 다양하게 해석한다는 것을 드러낸다. 예를 들어, 본 연구의 문항 가운데 수직선의 화살표가 가리키는 위치에 알맞은 분수를 쓰는 1번 문항에 대한 반응을 살펴보면 정답인 $\frac{3}{4}$ 이외에 $\frac{3}{0}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{10}$ 등의 오답 반응을 제시하였다. 이는 수직선에서의 학생들의 분수 이해 실태를 살펴본 선행연구에서 제시한 수직선의 세로선을 잘못 해석하는 오류(Izsák et al., 2008)나 한 칸의 간격을 무조건 1로 생각하는 오류(Lemmo et al., 2015) 등과 비교했을 때보다 다양한 반응이라고 할 수 있다. 특히, $\frac{3}{0}$, $\frac{0}{3}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{3}$과 같은 오답 반응은 0으로부터 3번째나 1씩 3번 등으로 수직선에서 분수를 해석하고 있다고 추측할 수 있다.

이와 같은 연구 결과와 관련하여 Izsák 외(2008)는 분수 $\frac{n}{m}$을 'm중에 n'과 같이 범자연수의 쌍으로만 해석하는 학생들을 지적하면서 이러한 해석은 일부 상황에는 적절하지만 연속량이나 분수의 연산에는 적절하지 않다고 설명한다. Lamon(1999)은 학생들이 분수를 하나의 수로 이해하지 못하는 오개념을 극복하기 위한

대안으로 수직선에서 분수를 나타내는 활동을 제안하는데, 이는 분수를 하나의 수로 인식하고 자연수와의 관계를 이해하는데 도움이 될 수 있다고 설명한다. 이와 같이 수직선은 분수 학습에서 중요한 표현이지만 학생들은 분수의 다른 표현보다 수직선을 어려워하며 (김양권, 홍진곤, 2017; Kara & Incikabi, 2018) 수직선에 분수를 나타내기 위해서는 단위, 분할, 동치에 대한 이해가 수반되어야 한다(Cramer et al., 2019). 교과서 흐름상 학생들이 수직선 모델을 접하기 전에 이미 다른 분수 모델을 다루어보았기 때문에 수직선 모델을 도입하는 것은 기존의 친숙한 모델과의 연결을 만듦으로써 학생들이 분수 개념을 보다 심화하고 수직선 모델에서의 분수 개념을 탐구할 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것이다(Cramer et al., 2008). 따라서 분수 학습에서 활용되는 여러 표현 가운데 넓이 모델이나 집합 모델과는 다른 수직선 표현의 특징을 고려하여, 학생들이 수직선에서 분수 개념 및 연산을 성공적으로 수행할 수 있는 노력이 추가적으로 필요하다.

셋째, 본 연구 결과 구조화된 수직선에 비하여 반구조화된 수직선이 제시되는 문항에서의 정답률이 전반적으로 낮게 드러났다. 물론 교과서에서 다루는 수직선의 형태가 구조화된 수직선이기 때문에 학생들은 반구조화된 수직선을 다루어 본 경험이 거의 없었으며, 구조화된 수직선에 비하여 반구조화된 수직선에 제시된 정보가 적어 학생들이 어려움을 겪을 것이라는 점을 고려했을 때 이러한 연구 결과는 그리 놀라운 일이 아니다. 하지만 본 연구에서 반구조화된 수직선이 제시된 문항을 성공적으로 수행한 학생들의 반응을 살펴보면, 단위 구간이 등분할되지 않았음에도 수직선의 화살표가 가리키는 위치에 알맞은 분수를 찾을 수 있고, 제시된 분수를 고려하여 1의 위치를 나타낼 수 있고, 단위 구간을 정하여 분수를 나타내거나 비교 또는 덧셈 및 뺄셈을 할 수 있는 가능성을 보여준다.

실제 여러 연구에서 학생들에게 구조화된 수직선 이외에 다양한 형태의 수직선을 제공함으로써 분수 학습에 대한 이해를 발전시키고 심화시킬 수 있는 기회를 제공할 수 있다고 보고한다. 예를 들어, 학생들에게 빈 수직선을 제시하거나(예, Saxe et al., 2007; Van den Heuvel-Panhuizen, 2008), 수직선에서 단위 재구성하기(reconstructing the unit) 과제 등을 제공함으로써(Cramer et al., 2019) 분수 개념의 핵심적인 아이디어에 대한 이해를 살펴볼 수 있었다. 비록 본 연구 결과를 통하여 학생들의 수직선에서의 분수 개념 및 연산에 대한 이해가 미진하다는 것을 알 수 있었지만, 이는 학생들이 분수 개념 및 연산에서의 어려움이나 도전을 파악할 수 있는 기회가 될 수 있으며 이때 수직선은 분수 개념 및 연산에 대한 이해를 살펴볼 수 있는 중요한 표현이라는 것을 알 수 있다. 한편, 교과서에서 분수 개념 및 연산을 다룰 때 제시되는 수직선은 단위 구간이 등분할 되고 분수의 값이 대부분 명확히 드러난다는 점을 고려한다면, 이와 같이 수직선이 분수 학습에서 효과적으로 쓰이기 위하여 기존의 교과서를 지도할 때 수직선에서 분수 개념을 좀 더 심도있게 살펴보거나 교과서에 제시되는 수직선의 형태를 다양하게 다루어보는 것을 고려할 수 있다.

마지막으로, 본 연구에서 드러난 학생들의 분수의 덧셈과 뺄셈에 관한 수직선 반응을 통하여, 학생들에게 분수의 덧셈과 뺄셈을 수직선으로 표현하거나 해석하는 것이 쉽지 않다는 것을 알 수 있다. 일부 문항의 경우 교과서에서 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산원리를 이해하기 위하여 제시되는 수직선 형태와 동일한 수직선임에도 불구하고, 학생들은 수직선의 빈 칸에 알맞은 분수를 써 넣지 못하거나 수직선 표현에 알맞은 분수식을 제시하는데 어려움을 드러냈다. 특히, 본 연구 결과에서 확인한 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 오류 반응으로, 수직선에 표현된 수의 크기가 1 이상이 됨에도 불구하고 단위를 인식하지 못하여 1 이하의 수로 나타낸 반응이나 '$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$'에서 $\frac{4}{5}$를 $\frac{3}{5}$으로부터 나타내지 못하고 0으로부터의 거리에 해당하는 점에 표현하는 반응을 고려한다면, 분수의 덧셈과 뺄셈을 수직선으로 표현하고 해석하는 방법을 학생들에게 지도할 필요가 있다고 사료된다.

이 때 Van den Heuvel-Panhuizen(2008)이 제시한 수직선 모델 유형 가운데 길이-방향(Directed-length) 수직선을 생각해볼 수 있을 것이다([표 1] 참조). 길이-방향 수직선은 수의 크기와 방향을 화살표로 제시하고 측정으로서 수 개념을 탐색하기 적합한 수직선 형태이므로, 학생들이 분수의 덧셈과 뺄셈의 계산원리를 학습할 때 이용할 수 있을 것이다. 물론, 수업에서 수직선 표현은 분수의 덧셈과 뺄셈을 학습하는데 활용할 수 있는 하나의 표현이므로 수직선 자체가 학습의 목

표가 되어서는 안 될 것이다. 다만, 본 연구 결과에서 알 수 있는 학생들의 어려움을 통하여, 학생들이 분수의 덧셈과 뺄셈에서 수직선을 효과적으로 활용할 수 있는 지도 방안에 대하여 심도 있게 고려할 필요가 있을 것이다.

본 연구에서는 초등학교 4학년 학생들의 수직선에서의 분수 개념 및 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 이해가 어느 정도인지 분석하였다. 연구 결과 드러난 학생들의 이해 실태가 긍정적으로만 해석될 수 없지만 본 연구 결과에서 알 수 있는 학생들의 가능성과 어려움은 교사 및 교사 교육자들에게 시사점을 제공할 수 있을 것이다. 따라서 본 연구를 통하여 알 수 있는 초등학생들의 이해를 통하여 학생들의 분수 개념과 분수의 덧셈과 뺄셈에 대한 이해 및 수직선 표현에 대한 이해를 발달시킬 수 있는 방향을 모색하는데 도움이 되길 바란다.

참 고 문 헌

교육부(2020a). 수학 2-1. 서울: 비상교육.

교육부(2020b). 수학 3-1. 서울: 비상교육.

교육부(2020c). 수학 4-2. 서울: 비상교육.

교육부(2020d). 수학 3-2. 서울: 비상교육.

김양권, 홍진곤(2016). 수 개념 학습에서 수직선의 도입과 활용. 한국초등수학교육학회지, 20(3), 431-456.

김양권, 홍진곤(2017). 초등학생의 수직선 이해와 사용의 어려움. 수학교육논문집, 31(1), 85-101.

박예은(2017). 역사발생적 원리에 따른 수직선 의미와 지도방안 고찰. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

유진영, 신재홍(2020). 단위 조정에 따른 초등학생의 분수 개념 이해 분석. 초등수학교육, 23(2), 87-116.

이상미(2010). 초등학교 4, 5, 6학년 학생들의 수직선 이해 실태 조사. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

Bobis, J., & Bobis, E. (2005). The empty number line: Making children's thinking visible. *Making mathematics vital*, 66-72.

Bobis, J., & Bobis, E. (2005). The empty number line: Making children's thinking visible. In M. Coupland, J. Anderson, & T. Spencer (Eds.), *Making mathematics vital: Proceedings of the 20th biennial conference of the Australian Association of Mathematics Teachers* (pp. 66-72). Sydney: AAMT.

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 19(3)*, 215-232.

Cramer, K., Ahrendt, S., Monson, D., Wyberg, T., & Miller, C. (2017). Making sense of third-grade students' misunderstandings of the number line. *Investigations in Mathematics Learning, 9(1)*, 19-37.

Cramer, K., Monson, D., Ahrendt, S., Wyberg, T., Pettis, C., & Fagerlund, C. (2019). Reconstructing the unit on the number line: Tasks to extend fourth graders' fraction understandings. *Investigations in Mathematics Learning, 11(3)*, 180-194.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics Teaching in the Middle School, 13(8)*, 490-496.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 3-26). Columbus, OH: Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Freeman, D. W., & Jorgensen, T. A. (2015). Moving beyond brownies and pizza. *Teaching Children Mathematics, 21(7)*, 412-420.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25(5)*, 443-471.

Gray, E., & Doritou, M. (2008). The number line: Ambiguity and interpretation. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A.

Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, pp. 97 - 104). Mexico: Cinvestav-UMSNH.

Hamdan, N., & Gunderson, E. A. (2017). The number line is a critical spatial-numerical representation: Evidence from a fraction intervention. *Developmental Psychology, 53(3)*, 587.

Hannula, M. S. (2003). Locating fraction on a number line. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 2003 joint meeting of the PME and PMENA* (pp. 17-24). Hawaii: University of Hawaii.

Herbst, P. (1997). The number-line metaphor in the discourse of a textbook series. *For the Learning of Mathematics, 17(3)*, 36-45.

Izsák, A., Tillema, E., & Tunc-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 39(1)*, 33-62.

Kara, F., & Incikabi, L. (2018). Sixth grade students' skills of using multiple representations in addition and subtraction operations in fractions. *International Electronic Journal of Elementary Education, 10(4)*, 463-474.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, NY: Basic Books.

Lamon, S. J. (1999). Teaching fractions and ratios for understanding: Essential knowledge and instructional strategies for teachers. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. L. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco & F. Curcio (Eds.), *The roles of representations in school mathematics* (pp. 146 - 165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lee, M. Y., Choy, B. H., & Mizzi, A. (2021). Exploring the introduction of fractions in Germany, Singapore, and South Korea mathematics textbooks. *Korean Society of Mathematical Education, 24*(2), 111-130.

Lemmo, A., Branchetti, L., Ferretti, F., Maffia, A., & Martignone, F. (2015). Students' difficulties dealing with number line: A qualitative analysis of a question from national standardized assessment. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics), 25(2)*, 149-156.

Saxe, G. B. (2004). Practices of quantification from a sociocultural perspective. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Cognitive developmental change: Theories, models and measurement* (pp. 241 - 263). New York, NY: Cambridge University Press.

Saxe, G. B., Diakow, R., & Gearhart, M. (2013). Towards curricular coherence in integers and fractions: A study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. *ZDM Mathematics Education, 45*, 343-364.

Saxe, G. B., Shaughnessy, M. M., Shannon, A., Langer-Osuna, J. M., Chinn, R., & Gearhart, M. (2007). Learning about fractions as points on a number line. In W. G. Martin, M. E. Strutchens, & P. C. Elliott (Eds.), *The learning of mathematics: 69th yearbook* (pp. 221 - 238). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Skoumpourdi, C. (2010). The number line: An auxiliary means or an obstacle? *International Journal for Mathematics Teaching and Learning.*

Teppo, A., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2014). Visual representations as objects of analysis: The number line as an example. *ZDM Mathematics Education, 46(1)*, 45-58.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2008). Learning from "Didactikids": An impetus for revisiting the empty number line. *Mathematics Education Research Journal, 20(3)*, 6-31.

An Analysis of Elementary Students' Understanding of Number Line: Focused on Concept of Fractions and Addition and Subtraction of Fractions

Kim, Jeongwon
Sintanjin Elementary School
E-mail: nymph019@hanmail.net

With the importance of number line in learning fractions, this study investigated how 4th grade students understand fractions and its operations in number line. The questionnaire consisted 22 items which were related to representing fractions, comparing the size of fractions, and operating addition and subtraction of fractions. Both structured number line and sub-structured number line were presented in the items. As results of the study, the overall success rates were not high and even some items showed higher incorrect answer rates than the success rates. Also, the students showed a difficulty in solving non-structured number line tasks. It was also noticeable that students showed several types of incorrect answers, which means that students had incomplete understanding of both fractions and number line. This paper is expected to shed light on elementary students' understanding of fractions and number line and to provide implications of how to deal with number line in teaching and learning fractions in the elementary school.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Number line, fraction, addition and subtraction of fraction, students' understadning