

이동 경계를 갖는 얇은 아치의 동적 모델과 지배방정식

Dynamic Model and Governing Equations of a Shallow Arches with Moving Boundary

손 수 덕*
Shon, Sudeok

하 준 홍**
Ha, Junhong

이 승 재***
Lee, Seungjae

Abstract

In this paper, the physical model and governing equations of a shallow arch with a moving boundary were studied. A model with a moving boundary can be easily found in a long span retractable roof, and it corresponds to a problem of a non-cylindrical domain in which the boundary moves with time. In particular, a motion equation of a shallow arch having a moving boundary is expressed in the form of an integral-differential equation. This is expressed by the time-varying integration interval of the integral coefficient term in the arch equation with an un-movable boundary. Also, the change in internal force due to the moving boundary is also considered. Therefore, in this study, the governing equation was derived by transforming the equation of the non-cylindrical domain into the cylindrical domain to solve this problem. A governing equation for vertical vibration was derived from the transformed equation, where a sinusoidal function was used as the orthonormal basis. Terms that consider the effect of the moving boundary over time in the original equation were added in the equation of the transformed cylindrical problem. In addition, a solution was obtained using a numerical analysis technique in a symmetric mode arch system, and the result effectively reflected the effect of the moving boundary.

Keywords : *Moving Boundary, Shallow arch, Dynamic model, Non-cylindrical domain, Cylindrical domain, Orthonormal basis, Integral-differential equation, Orthonormal basis*

1. 서론

장 스팬의 지붕(long span roof)은 아치나 셸(shell) 처럼 외부의 힘을 형태가 저항하도록 고안된 구조를 선호한다. 이것은 압축이나 인장과 같은 면내(in-plane)로 힘을 전달하는 구조 메커니즘으로 다른 메커니즘과 비교해서 더욱 가볍고, 효과적으로 설계할 수 있다. 이러한 힘의 흐름은 종종 자연(natural)으로부터 그 특징을 찾아내어 가장 자연스럽게 표현하려 하였고, 이것은 원(cycle) 형, 정현파(sinusoidal) 형 또는 구(spherical) 형 등의 형상으로 많이 나타나게 되었다. 이 중에서 포물선이나 정현파의 얇은 아치는 형상에서도 자연적인

아름다움을 담고 있을 뿐만 아니라 가볍게 긴 경간을 지탱하기에 구조적으로 적합하여서 과거에서부터 많은 연구자가 그 역학적 특징을 연구하였다. 얇은 아치의 동적 스냅(dynamic snapping)에 대한 연구는 처음으로 Hoff & Bruce (1954)¹⁾에 의해 시작되었고, 이후에 임계경계와 불안정 현상의 규명 등의 다양한 연구가 지금까지 많이 수행되었다.²⁾⁻⁶⁾ 이들의 연구 중에 얇은 아치에서 많이 다루는 적분 계수를 갖는 미분방정식⁷⁾은 Ball (1973)의 신장(extensible) 보에 관한 연구^{8),9)}에서 찾아볼 수 있다. 이 모델은 오일러-베르누이 보(Euler-Bernoulli beam)에서 확장된 모델로서 수직 방향의 변위로 인한 축 방향 변형을 고려한 것으로서 Woinowsky (1950)의 논문¹⁰⁾에 처음 등장한다. 이 모델들은 주로 축 방향 변형으로 인한 내력이 고려되었고, 고정된 경계 영역(domain)의 구간 $[0, L]$ 에서 물리적 모델을 형성하였다. 또한, 양단(both-side end)의 회전에 대한 경계조건을 힌지(hinge) 또는 고정(clamped)으로 나누어 정의하였다. 형성된 모델은 적당한 두께를 가진 비교적 얇은 아치와 보의 모델로 적합하였으며, 많은 연구자가 다양한

* 한국기술교육대학교 건축공학과 대우교수, 공학박사
Dept. of Architectural Eng., Koreatech University
** 교신저자, 한국기술교육대학교 교양학부 교수, 이학박사
School of Liberal Arts, Koreatech University
Tel: 041-640-8612, Fax: 041-640-7217
E-mail : hjh@koreatech.ac.kr
*** 한국기술교육대학교 건축공학과, 교수
Dept. of Architectural Eng., Koreatech University

조건을 추가하여 정해나 수치 근사해를 분석하였다. 그러나 이러한 모델들의 경계 영역(boundary domain)은 항상 고정된 것이고, 경계가 이동하는 것은 흔하지 않다.

이동 경계 문제(moving boundary problem)는 종종 슈테판 문제(Stefan problem)라고도 불리는데 실제적인 많은 문제에서 중요한 사례로 나타난다. 극지방 만년설(polar ice cap)이 녹는 문제, 진동에서 경계가 이동함으로 나타나는 역학적 문제, 늘어나는 봉 등의 문제에서 쉽게 찾아볼 수 있다. 그러나 이 문제들은 시간에 따라 대상의 영역이 변하는 비-원통형 영역(non-cylindrical domain)의 문제에 해당하고, 또 물리적 모델의 형성과 모델의 해를 구하기도 쉽지 않다.

일반적으로 이러한 모델은 공학적으로도 다루어지는데 경계의 수평 이동을 고려한 수직진동 시스템으로 종종 나타난다.¹¹⁾ 예로서 키르히호프-캐리어(Kirchhoff-Carrier) 모델에 기초한 이동 경계 탄성 막(elastic membrane)¹²⁾, 오일러-베르누이 이론에 기초한 축 방향 이동 경계의 보(axially moving beam)^{13),14)} 또는 시간에 따라 길이가 변하는 외팔보(cantilever)의 진동¹⁵⁾ 등이 있다. 이들은 대부분 적분형 계수를 갖는 미분 방정식의 형태를 갖추고 있고, 오일러-베르누이 보 또는 키르히호프의 이론에 기초한 모델이므로 중립축의 법선(normal)은 변형 후에도 일정한 것으로 가정한다. 이 모델들에서 이동에 대한 질량 분포의 변화는 주로 고려하지 않고, 이동 축 방향의 속도에 대한 영향은 선형 점탄성 재료(Kelvin-Voigt model)로 모델링 하였다. 또한, 이동 경계의 탄성 막이나 보의 연구에서는 이동 경계로 인한 속도의 영향이 고려되지 않았고, 다만 내부 축력이 시간에 따라 변하는 경계가 고려되었다. 특히, 이들의 연구에서 비-원통형 영역은 원통형(cylindrical) 영역으로 변환하여 문제에 접근하였으며, 시스템의 수학적 연구와 다양한 수치적 결과를 얻었다.

장 스펠 지붕은 대부분 하부 구조가 지지하며, 이 경계는 하부 구조의 상태에 따라 이와 동등한 역학적 기구를 추가하여 모형화할 수 있다. 이것은 지반에 고정된 건물과 비교해서 경계가 유연하므로 유사한 모델로 치환하는 것이다. 그러나 개폐/이동식 지붕은 경계가 이동하는 경우이다. 경계가 지붕의 축 방향으로 이동하여 직접적인 변형을 유발하는 때도 있고, 수직 방향으로의 이동에서 간접적으로 축 방향 변형에 큰 영향을 주는 지붕

의 예도 있다. 예를 들어 뭉치 막(bunching membrane) 개폐식 지붕¹⁶⁾은 경계의 이동이 축 방향 변형에 직접적이고, 양쪽 레일을 따라 움직이는 개폐식 지붕은 동기화한 이동 기구로 축 방향의 영향을 최소화하려고 한다. 지붕을 개폐하는 이유는 실내외 공간을 사람들이 동시에 누리하고자 하는 것이지만 안전을 위해서 지붕을 개폐하는 예도 있어서 이동 시나리오에 따른 지붕의 상태를 정확하게 예측하는 것은 매우 중요한 공학적 문제이다.¹⁷⁾

따라서 본 연구에서는 축 방향 이동 경계의 문제에 대해서 얇은 아치를 대상으로 물리적 모델과 지배방정식을 형성하는 과정에 대해서 다루도록 하였다. 본 논문에서 형성된 비-원통형 영역의 이동 경계 아치 모델을 원통형 영역의 문제로 변환하고, 정규 직교 기저(orthonormal basis)를 이용해 진동에 관한 지배방정식을 유도하였다. 이러한 모델링 과정은 기존의 연구와 같이 경계의 이동 속도로 인한 영향은 고려하지 않았으며, 경계의 이동으로 인한 축 방향 변형만이 고려되었다. 이것은 고정된 경계를 가진 얇은 아치 방정식에서 적분형 계수 항의 적분 구간이 이동 경계가 고려되어 시간에 따라 변하는 것과 이로 인한 내력의 변화가 더불어 고려된다. 또한 원통형 문제로 변환된 운동 방정식에서는 원래의 방정식에서 시간에 따른 이동 경계의 영향이 고려된 항들이 추가되어 나타난다. 마지막으로 논문의 구성은 2장에서 이동 경계를 갖는 얇은 아치의 모델링, 3장에서 원통형 문제로의 변환 및 수직진동에 대한 지배방정식의 도출과정을 각각 다루었다. 또한 대칭 모드 시스템을 대상으로 수치해석을 수행하였고, 해석 결과를 수록하였다.

2. 이동 경계를 갖는 얇은 아치

2.1 이동 경계를 갖는 아치의 운동 방정식

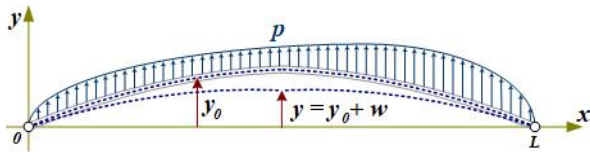
y 는 $\Omega = (0, L)$ 에서 정의된 얇은 아치의 변형 형상이라 할 때 y 의 약감쇠(weak damping) 운동 방정식은 식(1)과 같다.

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \tau \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} = f \quad (1)$$

여기서, ρ 는 밀도, E 는 탄성계수, A 는 아치의 단면적, I 는 단면 이차모멘트, y_0 와 y 는 각각 아치의 초기 형상과 수직 진동 형상이며, 변위 함수 w 와는 <Fig. 1>과 같이 $y = y_0 + w$ 의 관계로 나타난다. 또한, τ 와 f 는 식(2) 및 식(3)과 같다. 여기서, 경계조건은 양단에서 $y(0,t) = y(L,t) = 0$ 이며, 한지의 경우는 $y_{,xx}(0,t) = y_{,xx}(L,t) = 0$ 이 더 추가된다.

$$\tau = \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}^2 - \frac{\partial y_0}{\partial x}^2 \right) dx \quad (2)$$

$$f(x,t) = p + EI \frac{\partial^4 y_0}{\partial x^4} \quad (3)$$



<Fig. 1> Shallow arch with un-movable boundary and interval $[0, L]$

식(1)에서 τ 는 아치의 수직 변위에 대한 축 방향 내력이며, 식(2)와 같이 적분 형태를 가진다. 이 계수는 다음의 변형과 변위 관계를 통해서 쉽게 유도할 수 있다. 여기서, 아래첨자 $,x$ 는 x 에 대한 미분을 의미한다.

$$\epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_b = u_{,x} + y_{0,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 + \epsilon_b \quad (4)$$

식(4)에서 $u(x,t)$ 는 축 방향 변위 함수이고, ϵ_b 는 $-zw_{,xx}$ 로 휨 모멘트(bending moment)에 관한 항이다. 즉, ϵ_b 는 식(1)의 두 번째 항을 도출하게 되며, 축 방향 변형에 대해서는 ϵ_0 과의 관계로 정의할 수 있다. 이 관계식은 탄성영역에서 다음과 같이 내력(τ)과의 관계로 나타난다.

$$\tau = \tau_0 + E \int_A \epsilon_0 dA \quad (5)$$

초기 내력 τ_0 에 대해서는 상수이므로 유도과정에서는 생략하여 정리하기로 한다. 식(5)의 좌, 우변을 전 영역 Ω 에서 적분하면 다음과 같다.

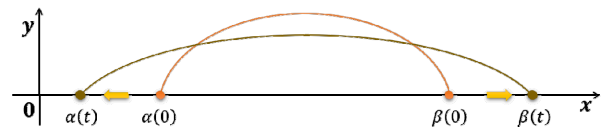
$$\int_{\Omega} \tau dx = EA \int_{\Omega} \left(u_{,x} + y_{0,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) dx \quad (6)$$

여기서, 아치의 축 방향 내력이 일정한 조건을 고려하면 식(6)은 다음과 같이 정리된다.

$$\tau = \frac{EA}{L} \int_{\Omega} \left(u_{,x} + y_{0,x} w_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) dx \quad (7)$$

위 식에서 첫 번째 적분 항 $\int_{\Omega} u_{,x} dx$ 는 u 가 경계에서 0이므로 소거된다. 따라서 나머지 두 항에 대해서 변위 함수 w 에 $y - y_0$ 를 대입하여 각각을 정리하면 식(2)를 구할 수 있게 된다.

다음으로 이동 경계 영역을 고려하자. 이 경계 영역은 $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R} : \alpha(t) < x < \beta(t), t \in [0, T_1]\}$ 로 정의하며, <Fig. 2>에서 보는 바와 같다. 여기서 Ω_0 는 $t = 0$ 에서의 Ω_t 이다.



<Fig. 2> Shallow arch under moving boundary domain Ω_0 and Ω_t

식(1)의 경우 오일러-베르누이 이론을 바탕으로 도출된 것이므로 A 와 I 는 여전히 일정하다고 가정할 수 있다. 따라서 이동 속도가 낮아서 시스템에 미치는 영향이 적다고 가정하여 고려하지 않으면 Ω_t 의 영역에서도 여전히 유효한 방정식이 된다. 단지 식(7)의 τ 항에서 첫 번째 축 방향 변위가 경계에서 더 이상 0이 아니므로 생략할 수 없고, 이동 경계로 인한 적분 영역이 바뀌게 된다. 이러한 사항을 고려하여 식(7)을 Ω_t 에 관해서 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\tau = \frac{EA}{\theta(t)} \int_{\Omega_t} u_{,x} dx + \frac{EA}{2\theta(t)} \int_{\Omega_t} (y_{,x}^2 - y_{0,x}^2) dx \quad (8)$$

여기서, $\theta(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ 이다. 식(8)의 첫 번째 항에 관한 적분을 수행하기 위해서는 축 방향 변위 함수 u 의 가정이 필요하다. 즉, 이동 경계점 $\alpha(t)$ 와 $\beta(t)$ 에

서의 변위는 Ω_0 의 구간에서 이동된 경계의 변화 값으로 정의할 수 있고, 이러한 각각의 경계 치를 이용해서 함수 u 를 선형으로 가정하면 다음과 같은 함수를 구할 수 있다.

$$u = \frac{\theta(t) - \theta_0}{\theta(t)} x + c \quad (9)$$

여기서 $\theta_0 = \beta(0) - \alpha(0)$ 이다. 식(9)를 이용하여 첫 번째 항을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega_t} u_{,x} dx = \left[\frac{\theta(t) - \theta_0}{\theta(t)} \right]_{\alpha(t)}^{\beta(t)} = \theta(t) - \theta_0 \quad (10)$$

따라서, 식(10)을 식(8)에 대입하고, 식(5)의 초기 내력 τ_0 를 포함하여 정리하면 시간 $t \in (0, T_1)$ 의 이동 경계 영역 $x \in \Omega_t$ 에서의 운동 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다. 여기서 $\theta(t)$ 는 θ 로 표현하였고 초기 내력 τ_0 도 함께 고려하였다.

$$\rho A y_{,tt} + EI y_{,xxxx} - \tau y_{,xx} + c y_{,t} = f \quad (11)$$

여기서,

$$\tau = \tau_0 + \frac{EA(\theta - \theta_0)}{\theta} + \frac{EA}{2\theta} \int_{\Omega_t} (y_{,x}^2 - y_{0,x}^2) dx$$

$$f(x, t) = p + EI y_{0,xxxx}$$

2.2 운동 방정식의 영역 변환

2.1절에서 설명한 바와 같이 식(11)과 같은 이동 경계를 갖는 운동 방정식은 시간에 따라 변하므로 시간 축에서 경계는 비-원통형으로 나타난다. 본 절에서는 이 문제를 원통형 영역으로 변환하는 과정을 다루도록 한다.

시간 $t \in (0, T_1)$ 에 의존적인 $\Omega_t = (\alpha(t), \beta(t))$ 와 $Q_t = (\alpha(t), \beta(t)) \times (0, T_1)$ 를 고려하자. 여기서, 이동 경계의 영역은 $\Omega_t \subset \Omega = (0, L)$ 관계에 있다고 정의하자. 식(11)에서 y 와 x 대신 파라미터 v 와 ξ 를 이용해서 나타내도록 하며, 식(12)와 같다. 여기서 사용된 ξ 는 $\xi \in (\alpha(t), \beta(t)) \subset (0, L), t \in (0, T_1)$ 로 정의한다. 이

것은 이동 경계 $\alpha(t)$ 와 $\beta(t)$ 를 전체 구간 $(0, L)$ 에 대한 부분집합으로 나타낸 것이다.

$$\rho A v_{,tt} + EI v_{,\xi\xi\xi\xi} - \left\{ \tau_0 + \frac{EA(\theta - \theta_0)}{\theta} + \frac{EA}{2\theta} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} (v_{,\xi}^2 - v_{0,\xi}^2) d\xi \right\} v_{,\xi\xi} + c v_{,t} = g \quad (12)$$

여기서, x 와 ξ 및 y 와 v 의 관계는 다음과 같고, $\alpha(t)$ 와 $\beta(t)$ 는 각각 α 와 β 로 표현하였다.

$$x = \frac{\xi - \alpha}{\theta} L, \quad \theta x = (\xi - \alpha)L, \quad (13)$$

$$dx = \frac{L}{\theta} d\xi, \quad f(x, t) = g\left(\frac{\theta}{L}x + \alpha, t\right)$$

따라서 위 식의 관계와 같이 시간에 대해 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi - \alpha}{\theta} L \right) = - \frac{\dot{\alpha}L + x\dot{\theta}}{\theta} \quad (14)$$

$$v(\xi, t) = y(x, t), \quad t \in [0, T_1]$$

$$v_0(\xi, 0) = y_0(x, 0)$$

여기서, 위 첨자 $\dot{\alpha}, \dot{\theta}$ 는 시간 t 에 관해 미분한 항임을 의미한다. 이상의 관계를 이용하여 시간과 공간에 대한 각각의 v 항을 다시 정리할 수 있다.

식(13)과 식(14)의 관계에 따라서 식(12)에 나타난 v 의 시간 t 과 공간 ξ 에 대한 미분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$v_{,t} = y_{,t} - \frac{\dot{\alpha}L + x\dot{\theta}}{\theta} y_{,x}$$

$$v_{,tt} = y_{,tt} - \frac{2(\dot{\alpha}L + x\dot{\theta})}{\theta} y_{,xt} + \frac{(\dot{\alpha}L + x\dot{\theta})^2}{\theta^2} y_{,xx} - \frac{\ddot{\alpha}L\theta - (\dot{\alpha}L + x\dot{\theta})\dot{\theta} + x\theta\ddot{\theta}}{\theta^3} y_x \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 v_{,\xi} &= \frac{\partial}{\partial \xi} y = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{L}{\theta} y_x \\
 v_{0,\xi} &= \frac{L}{\theta} y_{0,x} \\
 v_{,\xi\xi} &= \left(\frac{L}{\theta}\right)^2 y_{,xx} \\
 v_{,\xi\xi\xi} &= \left(\frac{L}{\theta}\right)^3 y_{,xxx}
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 \omega_0 &= \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{I}{A}}, \\
 \alpha_t &= \alpha \left(\frac{t}{\omega_0}\right), \quad \beta_t = \beta \left(\frac{t}{\omega_0}\right)
 \end{aligned} \tag{19}$$

식(13)~식(16)을 식(12)의 방정식에 각각 대입하여 정리하면 다음 식(17)과 같은 방정식을 최종적으로 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \rho A y_{,tt} + EI \left(\frac{L}{\theta}\right)^4 y_{,xxxx} - \left[\left\{ \tau_0 + \frac{EA(\theta - \theta_0)}{\theta} \right\} \left(\frac{L}{\theta}\right)^2 + \frac{EA}{2L} \left(\frac{L}{\theta}\right)^4 \int_0^L (y_{,x}^2 - y_{0,x}^2) dx \right] y_{,xx} \\
 + \frac{\rho A (\dot{\alpha}L + x\dot{\theta})^2}{\theta^2} y_{,xx} - \left[\frac{\rho A \{ \ddot{\alpha}L\theta - (\dot{\alpha}L + x\dot{\theta})\dot{\theta} + x\theta\ddot{\theta} \}}{\theta^3} + c(\dot{\alpha}L + x\dot{\theta})\theta \right] y_{,x} \\
 - \frac{\rho A 2(\dot{\alpha}L + x\dot{\theta})}{\theta} y_{,xt} + cy_{,t} = f(x, t)
 \end{aligned} \tag{17}$$

식(12)는 시간에 따라 이동하는 경계 영역을 변환하여 표현한 것이다. 이 식에서 적분 구간은 더 이상 시간에 의존적이지 않고, 이동 경계로 인해 나타난 관계 항들이 더 추가되었다. 이 항들은 경계의 시간에 따른 변화의 효과들이 다양하게 표현되었음을 알 수 있다.

위의 운동 방정식을 보다 일반적인 형태로 표현하기 위해서 무차원(non-dimensional) 파라미터를 이용해서 다시 나타내도록 한다. 적용되는 파라미터는 다음과 같고, 표기의 편의를 위해서 중복된 기호를 이용하였다. 따라서 지금부터 표현되는 방정식의 변수들은 무차원 파라미터에서 표기된 기호를 기준으로 정의되었다.

$$\begin{aligned}
 x \leftarrow \frac{x}{L}, \quad y \leftarrow \frac{y}{\kappa}, \quad y_0 \leftarrow \frac{y_0}{\kappa}, \quad t \leftarrow \omega_0 t, \\
 \gamma \leftarrow \frac{c}{\rho A \omega_0}, \quad \tilde{f} \leftarrow \frac{f}{EI \kappa}, \quad \sigma_0 \leftarrow \frac{\tau_0}{EA \kappa^2}, \\
 \sigma_1 \leftarrow \kappa^{-2}, \quad \theta \leftarrow \theta \left(\frac{t}{\omega_0}\right) = \beta_t - \alpha_t
 \end{aligned} \tag{18}$$

여기서,

식(18)과 식(19)의 파라미터를 이용하면 식(17)을 무차원 방정식으로 표현할 수 있으며, 다음 식(20)과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 y_{,tt} + a_1(t) y_{,xxxx} - [a_2(t) \\
 + a_3(t) \int_0^1 (y_{,x}^2 - y_{0,x}^2) dx] y_{,xx} + a_4(x, t) y_{,x} \\
 + a_5(x, t) y_{,xx} + a_6(x, t) y_{,xt} + \gamma y_{,t} = \tilde{f}(x, t)
 \end{aligned} \tag{20}$$

여기서,

$$\begin{aligned}
 a_1(t) &= \frac{1}{\theta^4}, \quad a_2(t) = a(t) \frac{1}{\theta^2}, \\
 a_3(t) &= b(t) \frac{1}{\theta^3}, \quad a_4(x, t) = a_4^1 x + a_4^2, \\
 a_5(x, t) &= a_5^1 x^2 + a_5^2 x + a_5^3,
 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 a_6(x, t) &= a_6^1 x + a_6^2 \\
 a(t) &= \sigma_0 + \sigma_1 \frac{\theta - \theta_0}{\theta}, \quad b(t) = \frac{1}{2\theta}
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 a_4^1 &= \frac{\theta^2 - \theta\ddot{\theta}}{\theta^3} - \frac{\gamma\dot{\theta}}{\theta}, \quad a_4^2 = \frac{\dot{\alpha}\dot{\theta} - \ddot{\alpha}\theta}{\theta^3} - \frac{\gamma\dot{\alpha}}{\theta}, \\
 a_5^1 &= \frac{\dot{\theta}^2}{\theta^2}, \quad a_5^2 = \frac{2\dot{\alpha}\dot{\theta}}{\theta^2}, \quad a_5^3 = \frac{\dot{\alpha}^2}{\theta^2}, \\
 a_6^1 &= -\frac{2\dot{\theta}}{\theta}, \quad a_6^2 = -\frac{2\dot{\alpha}}{\theta}
 \end{aligned} \tag{23}$$

따라서 변환된 방정식인 식(20)~식(23)을 이용하면 이동 경계를 갖는 얇은 아치의 물리적인 거동을 관찰할 수 있다. 여기서 방정식은 양단의 경계조건이 힌지(hinge)인 경우 모든 $t \geq 0$ 에 대해 다음 식을 만족한다.

$$y(0, t) = y(1, t) = y_{,xx}(0, t) = y_{,xx}(1, t) = 0 \tag{24}$$

위의 경계조건에서 회전이 고정인 경우는 $y_{,xx}$ 경계조건 대신 $y_{,x}(0,t) = y_{,x}(1,t) = 0$ 가 추가된다.

3. 정규직교기저와 지배방정식

식(20)~식(24)의 초기-경계치 문제 살펴보자. 우선, 정규 직교 기저(orthonormal basis)인 유한 집합 $V_m = \{\varphi_j = \sqrt{2} \sin(j\pi x) : j \in \mathbb{N}\}$ 에 속한 초기치 y_0, y_1 과 함수 $f(t)$ 를 다음과 같이 가정한다.

$$y_0 = \sum_{j=1}^m Y_{0j} \varphi_j, \quad y_1 = \sum_{j=1}^m Y_{1j} \varphi_j$$

$$\tilde{f} = \sum_{j=1}^m F_j(t) \varphi_j \tag{25}$$

$$\ddot{Y}_i + a_6^1(t) \sum_{j=1}^m (x\varphi_i, \nabla \varphi_j) \dot{Y}_j + a_6^2(t) \sum_{j=1}^m (\varphi_i, \nabla \varphi_j) \dot{Y}_j + \gamma \dot{Y}_i + a_1(t)(i\pi)^4 Y_i + a_2(t)(i\pi)^2 Y_i$$

$$+ a_3(t) \left\{ \sum_{k=1}^m (k\pi)^2 (Y_k^2 - Y_{0k}^2) \right\} (i\pi)^2 Y_i + a_4^1(t) \sum_{j=1}^m (x\varphi_i, \nabla \varphi_j) Y_j + a_4^2(t) \sum_{j=1}^m (\varphi_i, \nabla \varphi_j) Y_j$$

$$+ a_5^1(t) \sum_{j=1}^m (x^2 \varphi_i, \Delta \varphi_j) Y_j + a_5^2(t) \sum_{j=1}^m (x\varphi_i, \Delta \varphi_j) Y_j + a_5^3(t) \sum_{j=1}^m (\varphi_i, \Delta \varphi_j) Y_j \tag{29}$$

따라서 해 y 는 다음과 같이 얻어진다. 여기서, $Y_j(t), j = 1, 2, \dots, m$ 는 Y_j 로 표현하도록 한다.

$$y = y_m = \sum_{j=1}^m Y_j(t) \varphi_j \tag{26}$$

식(20)의 계수 중에서 $a_4(x,t), a_5(x,t), a_6(x,t)$ 은 t 와 x 에 관한 함수이다. 이러한 계수에 대해 t 에 관한 함수로 분할된 $a_4^1(t), a_4^2(t), a_5^1(t), a_5^2(t), a_5^3(t), a_6^1(t), a_6^2(t)$ 를 이용하면 다음 식(27)과 같은 방정식으로 표현할 수 있다.

$$y_{,tt} + \gamma y_{,t} + a_1(t)y_{,xxxx} - a_2(t)y_{,xx}$$

$$- a_3(t) \left(\int_0^1 (y_{,x}^2 - y_{0,x}^2) dx \right) y_{,xx}$$

$$+ (a_4^1(t)x + a_4^2(t))y_{,x}$$

$$+ (a_5^1(t)x^2 + a_5^2(t)x + a_5^3(t))(x,t)y_{,xx}$$

$$+ (a_6^1(t)x + a_6^2(t))y_{,xt} = \tilde{f}(x,t) \quad \text{in } Q \tag{27}$$

여기서, 네 번째 항의 괄호 안의 적분은 식(25)와 식(26)의 y_0 와 y 를 이용하여 각 항에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻을 수 있다.

$$\int_0^1 (y_{,x}^2 - y_{0,x}^2) dx = \sum_{j=1}^m (k\pi)^2 (Y_k^2 - Y_{0k}^2) \tag{28}$$

이제 식(27)의 양 변에 $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, m$ 을 곱하여 적분하도록 한다. 함수의 직교성을 이용해 각 항을 정리하면 식(29)와 같은 m 개의 얇은 아치에 대한 지배방정식을 구할 수 있으며, 초기조건은 식(3)과 같다.

$$Y_i(0) = Y_{0i}, \quad \dot{Y}_i(0) = Y_{1i} \tag{30}$$

식(29)에서 (f,g) 는 함수 f 와 g 의 내적이며, 이 방정식을 이용해서 1차 대칭 모드에 대한 지배방정식을 유도하면 식(31)과 같이 얻어진다.

$$\ddot{Y} + \frac{\dot{\theta}}{\theta} \dot{Y} + \gamma \dot{Y} + \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^4 Y + \left(\sigma_0 + \sigma_1 \frac{\theta - \theta_0}{\theta} \right) \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 Y + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^4 (Y^3 - Y_0^2 Y)$$

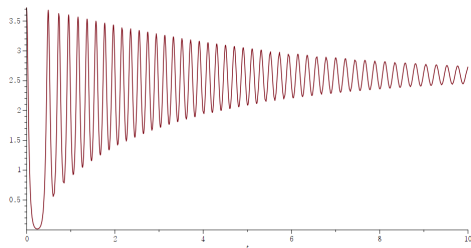
$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma \dot{\theta}}{\theta} - \frac{\dot{\theta}^2 - \theta \ddot{\theta}}{\theta^3} \right) Y + \left(\frac{\dot{\theta}}{\theta} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{3} \right) Y - \dot{\alpha} \dot{\theta} \left(\frac{\pi}{\theta} \right)^2 Y - \left(\frac{\dot{\alpha} \pi}{\theta} \right)^2 Y = F \tag{31}$$

여기서 Y_1 와 F_1 은 Y 와 F 로 표현하였다. 수치해석을 통해 식(31)을 이용한 아치 모델의 해를 얻도록 한다. 물리적 변수는 다음과 같이 가정하며, 수학 전용 프로그램 Maple을 이용해서 해석하였다.

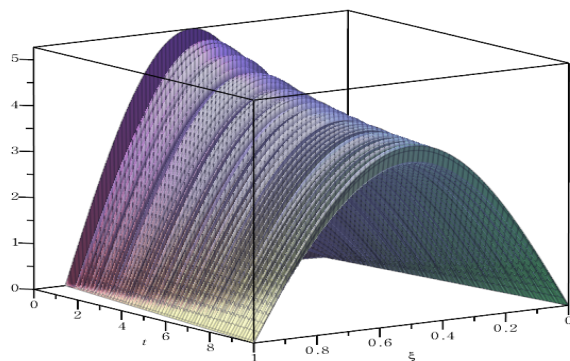
$$\alpha(t) = 0.1 - 0.01t, \quad \beta(t) = 0.9 + 0.01t, \quad (32)$$

$$\gamma = 0.5, \quad \sigma_0 = \sigma_1 = 0, \quad Y_0 = 3, \quad F = 0$$

식(30)과 초기치 $Y(0) = 3.7274, \dot{Y}(0) = 0$ 의 경우의 결과를 <Fig. 3>과 <Fig. 4>에 나타내었다.

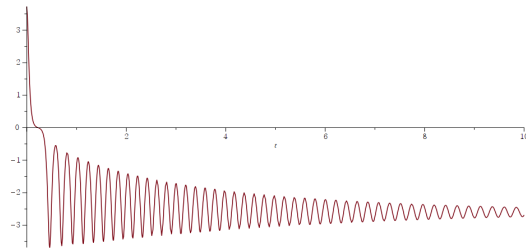


<Fig. 3> Response of shallow arch with movable boundary ($Y(0) = 3.7274, \dot{Y}(0) = 0$)



<Fig. 4> 3D arch shape with movable boundary ($Y(0) = 3.7274, \dot{Y}(0) = 0$)

<Fig. 3, 4>의 결과에서 이동의 영향을 잘 설명해 주고 있으며, <Fig. 4>에서 이동 경계 함수와 같이 변하는 것을 볼 수 있다. 아치는 일정한 영역에서 작은 변화에도 스냅핑(snapping)이 일어난다. 이러한 것을 알아보기 위해 $Y(0) = 3.7275$ 의 경우를 <Fig. 5>에 나타내었다. 그림에서와 같이 작은 변화에도 <Fig. 3>과 큰 차이가 있음을 알 수 있다.



<Fig. 5> Response of shallow arch with movable boundary ($Y(0) = 3.7275, \dot{Y}(0) = 0$)

4. 결론

본 논문에서는 이동 경계를 갖는 얇은 아치의 동적 모델을 연구하였다. 축 방향 변형에 대한 항의 유도과정과 함께 시간에 따라 경계가 변하는 비-원통형 영역의 문제를 원통형 영역의 문제로 방정식을 변환하였다. 원통형 문제로의 변환은 이동 경계로 인한 영향이 고려되어 나타나므로 적분 항은 시간 의존적이지 않게 나타난다. 이러한 변환 과정을 통해서 지배방정식이 유도되었다. 유도된 방정식에서는 경계의 이동으로 인한 영향이 감쇠 항으로 변형되어 추가되었으며, 이 방정식을 통해 구한 결과를 원래의 경계로 다시 변환하면 이동 경계의 영향을 분석할 수 있다. 본 연구에서는 저차 대칭 모드 시스템에 대해서 해석을 수행하였고, 이 시스템에 대한 유효한 결과를 얻을 수 있었다.

감사의 글

이 논문은 2019년도 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (NRF-2019R1F1A1058327) 및 (NRF-2019R1A2C2010693)

References

1. Hoff, N.J. & Bruce, V.G., "Dynamic analysis of the buckling of laterally loaded flat arches," *Journal of Mathematics and Physics*, Vol.32, pp.276-288, 1954, doi: 10.1002/sapm1953321276
2. Simitsep, G.J., "The Shallow Arch. In: *Dynamic Stability of Suddenly Loaded Structures*," Springer, New York, NY. pp.

- 117-153, 1990.
3. Ha, J., Gutman, S., Shon, S. & Lee, S., "Stability of shallow arches under constant load," *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.58, pp.120-127, 2014, doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2013.08.004
 4. Gutman, S. & Ha, J., "Shallow arches with weak and strong damping," *Journal of the Korean Mathematical society*, Vol.54(3), pp.945-966, 2017, doi: 10.4134/JKMS.j160317
 5. Gutman, S., Ha, J. and Shon, S.D., "Estimation algorithm for physical parameters in a shallow arch," *Journal of the Korean Mathematical Society*, Vol.58(3), pp.723-740, 2020, doi: 10.4134/JKMS.j200226
 6. Shon, S. & Ha, J., "Dynamic instability and instantaneous frequency of a shallow arch with asymmetric initial conditions," *Journal of Korean Association for Spatial Structures*, Vol.20(2), pp.77-85, 2020, doi: 10.9712/KASS.2020.20.2.77
 7. Emmrich, E. & Thalhaammer, M., "A class of integro-differential equations incorporating nonlinear and nonlocal damping with applications in nonlinear elastodynamics: Existence via time discretization," *Nonlinearity*, Vol.24(9), pp.2523-2546, 2011.
 8. Ball, J.M., "Initial-boundary value problems for an extensible beam," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.42, No.1, pp61-90, 1973, doi: 10.1016/0022-247X(73)90121-2
 9. Ball, J.M., "Stability theory for an extensible beam," *Journal of Differential Equations*, Vol.14(3), pp.399-418, 1973, doi: 10.1016/0022-0396(73)90056-9
 10. Woinowsky-Krieger, S., "The effect of an axial force on the vibration of hinged bars," *Journal of applied Mechanics*, Vol.17, pp.35-36, 1950, doi: 10.1115/1.4010053
 11. Pham, P.T. & Hong, K.S., "Dynamic models of axially moving systems: A review," *Nonlinear dynamics*, Vol.100, pp.315-349, 2020, doi: 10.1007/s11071-020-05491-z
 12. Ferrel, J.L. & Medeiros, L.A., "Vibrations of elastic membranes with moving boundaries," *Nonlinear Analysis*, Vol.45(3), pp.63-382, 2001, doi: 10.1016/S0362-546X(99)00349-1
 13. Clark, H.R., Rincon, M.A. & Rodrigues, R.D., "Beam equation with weak-internal damping in domain with moving boundary," *Applied Numerical Mathematics*, Vol.47, pp.139-157, 2003, doi: 10.1016/S0168-9274(03)00066-7
 14. Chen L.Q. & Yang, X.D., "Steady-state response of axially moving viscoelastic beams with pulsating speed: comparison of two nonlinear models," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.42, pp.37-50, 2005, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2004.07.003
 15. Wang, L.H., Hu, Z.D., Zhong, Z. & Ju, J.W., "Hamiltonian dynamic analysis of an axially translating beam featuring time-variant velocity," *Acta Mechanica*, Vol.206, pp.149-161, 2009, doi: 10.1007/s00707-008-0104-9
 16. Ha, H., Shon, S. & Lee, S., "Adjustment of Initial Shape for Spoked Wheel Cable Structures Considering Retractable Membrane's Tension," *Journal of Korean Association for Spatial Structures*, Vol.19(1), pp.109-116, 2019, doi: 10.9712/KASS.2019.19.1.109
 17. Ishii, K., "Structural Design of Retractable Roof Structures (Advances in Architecture)", WIT Press, 2000.
- Received : March 22, 2022
 - Revised : March 26, 2022
 - Accepted : March 27, 2022