East Asian Math. J.
Vol. 38 (2022), No. 4, pp. 379-396
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2022.025

몫으로서의 분수와 분배전략

A Study on the Fraction as Quotient and Equal Sharing Strategies in Elementary Mathematics

이 호 수 · 최 근 배[1)]

ABSTRACT. In this paper, we investigate distribution strategies in the Egyptian fraction, and through this, we examine the distribution strategies of (fraction)÷(fraction) and then provide some educational implications. The (natural number)÷(natural number) of the sharing situation has the meaning of 'share' per unit, which can be seen as a situation where the unit ratio is determined. These concepts can also naturally be extended to the case of (fraction)÷(fraction) by some problem posing situations. That is to say, the case of (fraction)÷(fraction) can be deduced the case (natural number)÷(natural number) by the re-statement of the problem.

Ⅰ. 서론

일반적으로 분수 개념은 다섯 가지의 하위 구조를 지니고 있다. 이 다섯 가지의 하위 구조는 '전체-부분(Part-Whole)', '비(Ratio) 또는 비율', '측정(Measure)', '몫(Quotient)' 그리고 '연산자(Operator)'이다(Behr, Lesh, Post & Silver, 1983; Lamon, 2006). '전체-부분으로서의 분수'는 분수를 이해하는 가장 선행되는 개념으로 분수와 관련된 용어나 개념이 이로부터 파생된다(최근배, 2017). 그러나 '전체-부분으로서의 분수'에서는 전체가 항상 부분보다 큰 상황만을 다룰 수밖에 없으므로 단지 진분수 상황만을 다룰 수 있다. 반면, '몫으로서의 분수'는 피제수와 제수

Received July 6, 2022; Revised August 3; Accepted August 26, 2022.
이 논문은 2021학년도 제주대학교 교원성과지원사업에 의하여 연구되었음
2010 Mathematics Subject Classification: 97D20, 97D40
Key Words: fraction as quotient, natural number division, problem posing, determination of unit rate
1) Corresponding author.

의 크기를 다양하게 제시할 수 있어서 진분수, 가분수, 대분수를 모두 학습하기에 쉽다(방정숙, 이지영, 2014). 한편, '전체-부분으로서의 분수' 개념은 전체에 대한 부분의 상대적인 크기를 보여주는 것으로, 아직 '수(number)'로서의 의미가 없다(서동엽, 2005, pp. 233-234 참고)[2]. 단지 전체를 등분할하고 이 중 몇 개가 선택된 상태를 보여주는 기호에 불과할 뿐이다. 반면, '몫으로서의 분수'는 분수 나눗셈 상황의 결과(Kieren, 1993)로 볼 수 있으며, 이는 분수를 수로 인식할 기회를 제공한다(Toluk, 1999; Kim, 2009, Kim, 2012a에서 재인용). 특히, '몫으로서의 분수'는 이집트 분수 개념과 관련되며 또한 일상생활에서 흔히 나타나는 균등 분배(equal sharing) 상황과 연관된 주제로, 학생들의 등분할 활동을 통해 (자연수)÷(자연수)의 계산 결과를 분수로 나타낼 수 있고, '몫으로서의 분수'를 모두 학습한 이후에도 등분할 활동을 통해 그 답의 타당성을 설명할 수 있다(Kim, 2012a).

2015 개정 수학과 교육과정에 따른 국정교과서에서는 '몫으로서의 분수' 개념은 6학년 1학기 1단원 '분수의 나눗셈'에 도입되어 있다. 이것은 주어진 분수를 (자연수)÷(자연수)로 보고, 나눗셈의 등분제 상황, 즉 분배의 상황으로 해석하는 것이다.

일반적으로 이집트 분수는 서로 다른 유한개의 단위분수의 합을 의미한다. 유한개의 단위분수의 합으로 표현하는 방법은 여러 가지가 있다[3]. 이 논문에서는 피보나찌의 Greedy Algorithm(최대한 나눠주기 전략)의 방법과 최대한 나눠주기 전략의 방법을 약간 수정한 분할 조작이 좀 더 편리한 분배전략을 살펴보고, 이를 바탕으로 몫으로의 분수와 관련된 분배전략을 고찰하고 교육적 논의 점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 몫으로서의 분수

주어진 분수를 '몫'으로 해석하는 것은 분수를 '전체-부분'으로서의 해석과 마찬가지로 분할과 관계된다. 그러나 '전체-부분으로서의 분수'와는 달리 '몫으로서의 분수'는 두 개의 다른 측정 공간이 고려되는 경우가 흔하다. 이를테면, 표현 $\frac{a}{b}$은 a를 b개의 그룹으로 균등 분배할 때 한 그룹의 크기를 나타내며, a와 b는 서로 다른 대상들의 형태일 수 있다(Toluk, 1999). 여기서 a는 분할되는 대상이다. 이 경

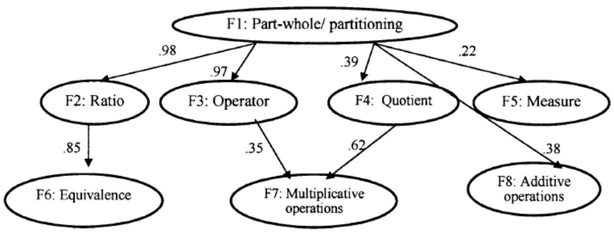
---

2) 전체(단위)가 같지 않은 두 분수의 연산은 의미가 없다는 것이다.
3) https://r-knott.surrey.ac.uk/Fractions/egyptian.html

우 $\frac{a}{b}$는 전체에 대한 부분('전체-부분' 상황)의 크기라기보다는 나눗셈 상황의 몫을 나타낸 것이다. 따라서 몫을 구하는 상황은 나눗셈 상황이고 $\frac{a}{b}$라는 표현은 때때로 $a \div b$로 사용된다.

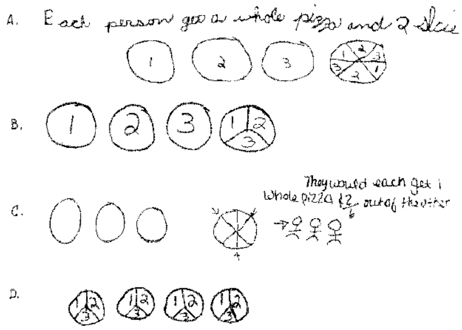
한편, '몫으로의 분수' 개념을 획득하기 위해, 학생들은 균등 분배에 필요한 등분할 방법을 개발하는 것 외에도 분수를 나눗셈식으로 식별하고 이 연산식에서 피제수와 제수의 역할을 깨달을 수 있어야 한다(Lamon, 2006; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007에서 재인용). 간단한 예를 들어 보자. 학생들이 3개의 피자가 네 사람에게 균등 분배되었다는 말을 듣게 되면, 학생들은 각 피자가 4분의 1로 나누어지고 각 사람은 4분의 1조각 3개의 몫을 받는다는 것을 식별할 수 있어야 한다. 이와 관련된 학생들의 오류를 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 몫을 분수로 나타내는 상황에서 분자와 분모를 혼동하는 경우가 있다(권성룡, 2003; Kim, 2012b). 둘째, 문제 상황에서 전체와 단위를 제대로 인식 못 하는 경우가 있다(권성룡, 2003; 이지영, 방정숙, 2014). 끝으로, 문제 상황을 그림으로 나타내고 이를 통해 몫을 찾는 데 어려움이 있는 학생들이 있다.

[그림 II-1]은 분수의 다섯 가지 개념의 경로 모델로 분수의 하위 구성 요소 5개 사이에 발견된 연관성을 보여준다.



[그림 II-1] 분수의 5개 개념의 경로 모델(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, p. 306)

여기서, 분수의 '전체-부분'적 해석과 분할 과정이 분수에 대한 나머지 4가지 해석에 대한 이해를 발전시키기 위한 기초를 구성한다는 가정을 뒷받침함을 알 수 있다. 실제로, [그림 II-1]은 '전체-부분으로서의 분수' 개념이 다른 경우(비, 연산자)에 비해서 '몫으로서의 분수' 개념의 설명력이 낮음을 보여준다(15.21%, 회귀 계수의 제곱). 따라서 학생들의 분수 학습에 있어서 '몫으로서의 분수'와 관련된 활동이 매우 필요하다.



[그림 II-2] 4÷3과 관련된 학생들의 분배 전략(Lamon, 2006, p. 141)

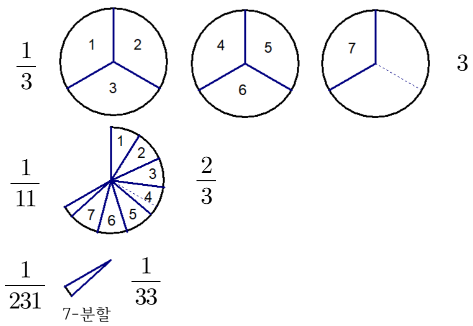
학생들이 ‘몫으로서의 분수’ 개념을 구성하도록 돕기 위해 일반적으로 사용되는 활동에는 피자와 같은 연속 양의 ‘같은 양 공유(equal sharing)’을 찾는 문제가 포함된다. [그림 II-2]는 3명이 피자 4판을 공평하게 나눌 때 각 사람이 가질 수 있는 몫을 찾는 문제에 대한 학생들의 분할과 관련된 다양한 반응을 보여준다. [그림 II-2]에서 균등 분배를 하기 위한 조각의 수를 가장 적게 만드는, 즉 가장 효율적인 분할에 순위를 정하면, ‘D → A → C → B’의 순서다(Lamon, 2006, p.142). 여기서 분할 D는 나중에 논의될 <전략 1>이며, 분할 B는 <전략 2>이다([그림 II-5] 참조).

2. 이집트 분수

고대 이집트인들은 분수를 서로 다른 단위분수의 합으로 표현하였다.[4] 표현하는 방법은 여러 가지가 있다. 여러 가지 방법 중 하나인 피보나찌의 Greedy Algorithm을 소개하면 다음과 같다. 이 방법은 분수를 (자연수)÷(자연수)의 상황으로 인식하고 ‘최대한 나눠주기’ 전략이다. 여기서 ‘최대한 나눠주기’는 분배하는 시점에서 가장 큰 조각을 준다는 의미이다. 예를 들어, 분수 $\frac{3}{7}$은 $3 \div 7$로 보고 등분제 상황의 몫을 구하는 문제로 생각하였다. [그림 II-3]은 ‘최대한 나눠주기’ 전략을 사용하여 주어진 사과 3개를 7명이 먹을 때 1인당 몫을 구하는 상황이다.

먼저, 사과 3개를 각각 이등분하면 조각의 개수가 6개밖에 안 되기 때문에 적어도 사과 3개를 각각 3등분(최대한 나눠주기)을 해야 한다. 따라서 이 상황에서의 1인당 몫은 $\frac{1}{3}$이 된다.

4) https://en.wikipedia.org/wiki/Egyptian_fraction



[그림 II-3] 이집트 분수의 분배전략: $3 \div 7 = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231} = \frac{3}{7}$

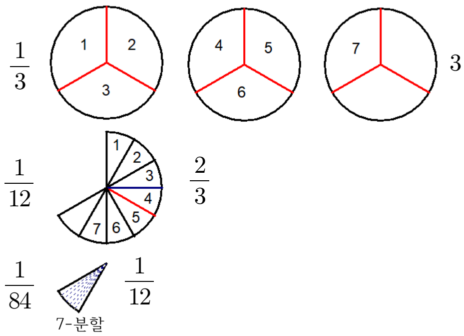
둘째, 남은 사과 $\frac{2}{3}$를 7명에게 최대한 많이 가지게 등분할 나누어 준다. 즉, $\frac{2}{3} - \frac{7}{x} \geq 0$을 만족하는 최소의 x를 찾는다. 실제로, $x = 11$이다.[5] 따라서 7명 각각은 $\frac{1}{11}$의 몫을 받는다. 끝으로, 남은 사과 $\frac{1}{33}$을 7명에게 똑같이 나누어 준다. 따라서 7명 각각은 $\frac{1}{231}$의 몫을 받는다. 결론적으로, 1인당 몫은

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

이 된다.

한편, 조작 활동의 측면에서 본다며, [그림 II-3]에 주어진 조작 활동보다는 [그림 II-4]의 활동이 학생들이 사용하기에 더 쉽다. 실제로, 먼저 사과 3개를 각각 3등분을 하여 7명에게 분배하고, 그 후 남은 $\frac{1}{3}$각각을 4등분하여 분배하고, 끝으로 남은 조각을 7등분하여 분배한다. 여기서, [그림 II-3]에서 $\frac{2}{3}$전체를 7명에게 분배하기 위해 나누는 방법보다 $\frac{1}{3}$각각을 4등분하여 분배하는 방법이 학생들의 조작 활동의 측면에서 훨씬 쉽다.

5) $\frac{2}{3}$를 $\frac{1}{3}$이 2개인 양으로 보고, $\frac{1}{3}$ 각각을 4등분 하는 분할을 통한 몫 $\frac{1}{12}$을 생각하는 것이 초등학생 수준의 조작 활동([그림 II-4] 참고) 관점에서 훨씬 쉽지만 '최대한 나눠주기' 전략과는 맞지 않는다. 즉, $\frac{1}{11} > \frac{1}{12}$



[그림 II-4] 조작 활동이 쉬운 분배전략: $3 \div 7 = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{84} = \frac{3}{7}$

이집트 분수의 최대한 나눠주기 분배전략을 일반적으로 생각해보면 다음과 같다. 두 양의 정수 a, b에 대해서, $\frac{a}{b} = a \div b$는 a개의 사과를 b명에게 최대한 많이 분배하는 전략이다. 따라서 식 $a \times k \geq b$를 만족하는 최소의 양의 정수 k를 찾아야 한다. 즉,

$$k = \min\{n | a \times n \geq b\}$$

결국 k는 $\lceil b/a \rceil$임을 알 수 있다. 여기서 $\lceil x \rceil$는 x를 넘는 최소 정수를 나타낸다.[6] 이로부터, 다음의 식 (1)을 얻는다.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{k} + \frac{ak-b}{bk}, \quad 0 \leq ak - b < a \tag{1}$$

여기서, $\frac{1}{k}$은 사과 a개 각각을 k분할을 통해 b명에게 분배할 수 있는 최대량이다.

3. 교과서 분석

현행 우리나라 수학과 교육과정에서는 분수의 나눗셈을 6학년 1학기와 2학기 각 한 단원씩 도입하여 학습한다. 1학기에는 제수가 자연수인 경우, 2학기에는 제수가 분수인 경우를 학습한다. [표 II-1]은 몫과 관련된 주요 차시 및 전략을 보여준다.

---

6) 천정함수(ceiling function): $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}$

	단원명	몫과 관련된 주요차시 및 전략
6학년 1학기	분수의 나눗셈	· (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내어 볼까요(1) - 전략: 피제수 각각을 제수로 나눔; $3\div 7=(1\div 7)\times 3=\frac{1}{7}\times 3$ · (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내어 볼까요(2) - 전략: 최대한 나누어 주기; $5\div 4=1+\frac{1}{4}$ - 전략: 피제수 각각을 제수로 나누기: $5\div 4=(1\div 4)\times 5=\frac{1}{4}\times 5$ · (분수)÷(자연수)를 알아볼까요 - 전략: $\frac{6}{8}\div 3=\frac{6\div 3}{8}=\frac{2}{8}$, $\frac{3}{4}\div 2=\frac{6}{8}\div 2=\frac{6\div 2}{8}=\frac{3}{8}$ · (분수)÷(자연수)를 분수의 곱셈으로 나타내어 볼까요 - 전략: $\frac{2}{3}\div 4=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}$; $\frac{2}{3}\div 4$의 몫은 $\frac{2}{3}$를 4등분한 것 중 하나
6학년 2학기	분수의 나눗셈	· (분수)÷(분수)를 알아볼까요(1) - 전략: 포함제 전략; 측정 또는 덜어내기, $\frac{6}{7}\div\frac{2}{7}=6\div 2$ · (분수)÷(분수)를 알아볼까요(2) - 전략: 포함제 전략; 측정 또는 덜어내기, $\frac{5}{7}\div\frac{2}{7}=5\div 2$ · (분수)÷(분수)를 알아볼까요(3) - 전략: 나눗셈 상황과 배; $\frac{3}{4}$는 $\frac{3}{8}$의 몇 배인가? $\frac{3}{4}\div\frac{3}{8}$ - 전략: 동분모화 전략 · (자연수)÷(분수)를 알아볼까요 - 전략: 단위비율 결정상황; $6\div\frac{3}{4}=(6\div 3)\times 4$ · (분수)÷(분수)를 (분수)×(분수)로 나타내어 볼까요 - 전략: 단위비율 결정상황; $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}=(\frac{4}{5}\div 2)\times 3=\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times 3$

[표 II-1] 분수의 나눗셈

분수의 나눗셈에서 사용하고 있는 주요 전략을 요약하면 다음과 같다.

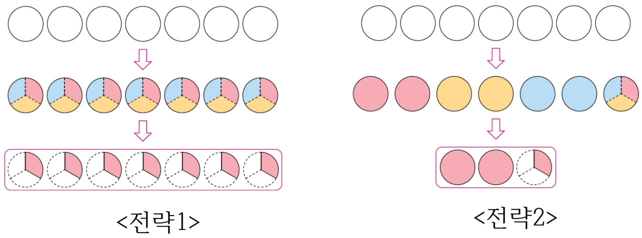
1) (자연수)÷(자연수)의 몫을 분수로 나타내기

일반적으로 (자연수)÷(자연수)는 정수 범위에서는 나머지가 생길 수 있지만, 유리수의 범위에서는 나머지가 없다. 단지, 몫만 존재한다.

우리나라 교과서에서는 몫을 구하는 전략을 두 가지로 설명한다. 예를 들어, 빵 7개를 3명에게 똑같이 나누어 줄 때 1명이 가지는 몫을 구하는 상황(분배상황)에서

<전략1> 몫은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=(1\div 3)\times 7$ 이고,

<전략2> 몫은 $2+\frac{1}{3}$이다([그림 II-5] 참조).



[그림 II-5] (자연수)÷(자연수)의 몫 구하기 전략(교육부, 2015b, pp. 126-127)

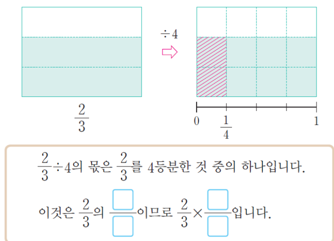
2) (분수)÷(자연수)의 몫의 해석과 분수로 나타내기

자연수에서의 나눗셈 의미가 개념적 변화 없이 피제수가 분수인 경우로 자연스럽게 수의 범위를 일반화한다. 여기서 개념적 변화가 없다는 의미는 ‘주어진 대상(피제수)를 몇 등분(묶음)한 것 중 하나의 크기(수)’로 주어진 대상이 자연수이든 분수이든 상관없이 해석된다는 것이다.

한편, 이러한 해석을 바탕으로 분수로 나타내는 방법은 다음과 같다. 먼저, 피제수로 주어진 분수를 단위분수가 몇 개인가로 해석하고, 이를 제수만큼 개수의 등묶음한 후 1묶음의 수를 구한다. 여기서 묶음의 활동에 필요하다며 동치분수를 사용한다. 연속적인 모델(예, 수직선)을 사용하는 경우는 묶음을 분할로 해석하면 된다. 우리나라 교과서에서는 <전략 1>만을 사용한다([그림 IV-2]와 [그림 IV-3] 참조).

3) (분수)÷(자연수)를 곱으로 나타내기

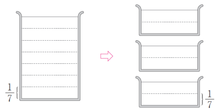
(분수)÷(자연수)의 몫을 (분수)를 (자연수)만큼 등분한 것 중 하나로 해석하고, 이것은 (분수)의 1/(자연수)이므로, (분수)× 1/(자연수)로 나타낼 수 있다. 즉, 분수의 연산자적인 해석으로 볼 수 있다. 구체적인 예는 [그림 II-6]과 같다.



[그림 II-6] 몫의 연산자적인 해석에 따른 역수 곱하기(교육부 2015b, p. 130)

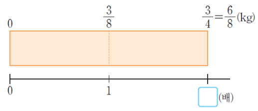
4) (분수)÷(분수)의 몫을 분수로 나타내기

먼저, 동분모이면서 단위가 같은 경우에는 [그림 II-7]와 같이 포함제 해석을 한다.



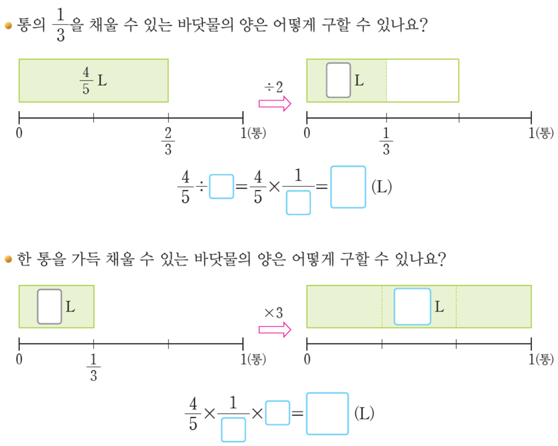
[그림 II-7] $\frac{5}{7} \div \frac{2}{7}$의 포함제 해석(교육부 2015c, p. 12)

둘째, 이분모이면서 단위가 같은 경우 미리 배운 동분모화로 변환하는 방법을 사용하여 계산한다. 여기서 교과서에 제공되는 활동은 배의 상황을 나눗셈의 상황으로 변환하는 문장제로 이중수직선 또는 테이프와 수직선이 혼합된 모델([그림 II-8])이 사용된다.



[그림 II-8] $\frac{3}{4} \div \frac{3}{8}$의 포함제(배) 해석(교육부 2015c, p. 14)

5) 단위비율 결정상황



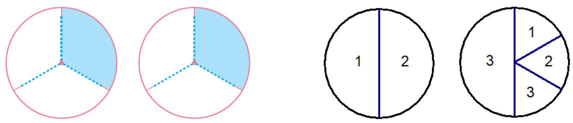
[그림 II-9] $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$의 단위비율 결정상황(교육부 2015d, p. 132)

단위가 다른 나눗셈 상황인 (자연수)÷(분수) 또는 (분수)÷(분수)인 경우에 이를 단위비율을 결정하는 상황으로 유추 해석하고 계산한다([그림 II-9] 참조).

III. 분배전략 분석 및 논의

우리나라 교과서에서는 (자연수)÷(자연수)의 몫을 구하는 전략의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

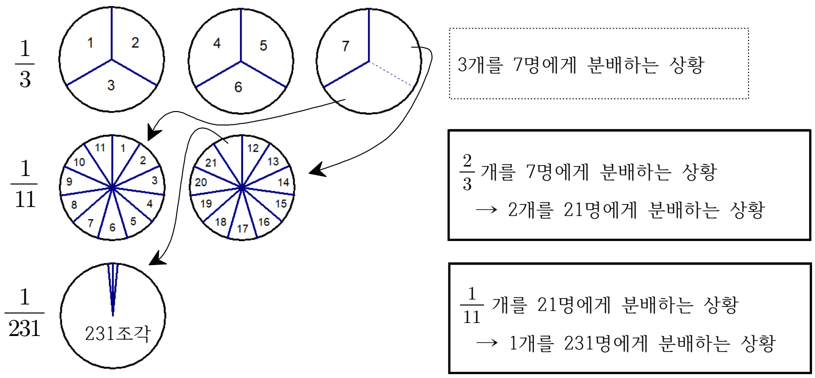
몫의 크기가 1보다 작은 경우는 [그림 II-5]에 있는 <전략1>만을 사용하고, 몫의 크기가 1보다 큰 경우는 [그림 II-5]에 있는 <전략1>과 <전략2> 모두를 사용한다. 여기서, <전략2>는 고대 이집트인의 분배전략과 관계(최대한 나눠주기 분배전략)되며, 몫의 크기가 1보다 작은 경우에도 조작 활동의 측면에서 사용할 수 있다. [그림 III-1]은 $2\div3$의 몫을 구할 때 사용할 수 있는 두 가지의 전략을 보여주고 있다.



<전략1> <전략2>

[그림 III-1] <전략1> (교육부, 2015b, p.135)와 <전략2>(고대 이집트, 최대한 나눠주기 분배전략)

식 (1)의 $\frac{ak-b}{bk}$를 분배의 관점에서 해석해보자. 먼저, 사과 a개를 b명에게 k분할을 통해 분배하고 남은 양은 $a-\frac{b}{k}=\frac{ak-b}{k}$이다. 이제, 이 양을 b명에게 분할을 통해 분배하는 양은 $\frac{ak-b}{k}\div b$이다. 끝으로, $\frac{ak-b}{k}\div b$은 사과 $(ak-b)$개를 bk명에게 균등하게 분배할 수 있는 양과 같다. 예를 들어, [그림 III-2]와 같이 '사과 $\frac{2}{3}$를 7명에게 균등하게 분배할 수 있는 양([그림 II-3] 참조)'은 '사과 2개를 21명 각자에게 균등하게 분배할 수 있는 양'이다. 또한 '사과 $\frac{1}{11}$를 21명에게 균등하게 분배할 수 있는 양'은 '사과 1개를 231명 각자에게 균등하게 분배할 수 있는 양'과 같다.



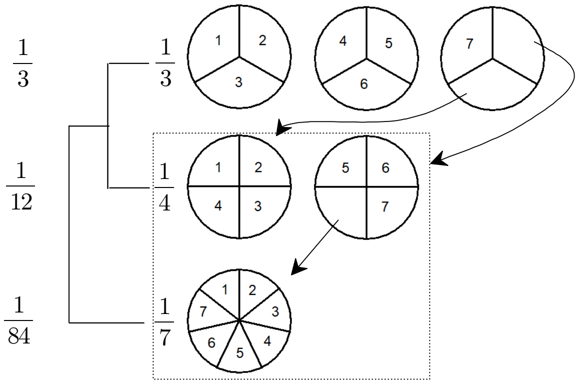
[그림 III-2] 이집트 분수의 효율적 분배전략: $\frac{3}{7}=3\div 7$

결론적으로, 분배의 관점에서 [그림 II-3]은 $\frac{ak-b}{bk}$를 $\frac{ak-b}{k}\div b$로 해석한 것이고, [그림 III-2]는 $(ak-b)\div bk$로 해석한 것으로 볼 수 있다. 분할 조작의 관점에서 후자의 해석이 때에 따라서 좀 더 쉬운 접근일 수 있지만, 분배해야 할 사람의 수가 b명에서 bk명으로 바뀐다는 점에서 초등학생의 경우에는 혼돈을 초래할 수 있다.

반면, 조작 활동이 좀 더 편한 방법으로 분배하는 전략을 생각해보자.

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{k}+\left(\frac{ak-b}{b}\right)\frac{1}{k},\quad 0\le ak-b<a \qquad (2)$$

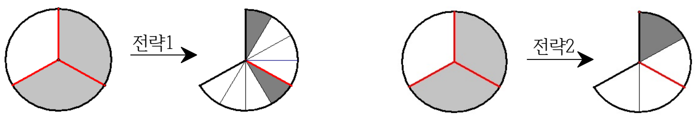
식 (2)는 $\frac{ak-b}{bk}$를 분배의 관점에서 $\{(ak-b)\div b\}\times\frac{1}{k}$로 해석한 것이다. 즉, 사과 $(ak-b)$개를 b명에게 균등 분배한 양에 이전 분할에서 얻은 양을 곱하는 방법이다. 예를 들어, [그림 III-3]에서 $\frac{2}{3}\div 7=(2\div 7)\times\frac{1}{3}$이고 $\frac{1}{4}\div 7=(1\div 7)\times\frac{1}{4}$이고, [그림 II-4]와 같은 방법의 분할이다. 이와 같은 방법은 학생들의 조작 활동이 비교적 쉬울 뿐만 아니라([그림 II-4]의 방법과 같은 활동이라는 측면에서) 알고리즘화하기가 쉽다.



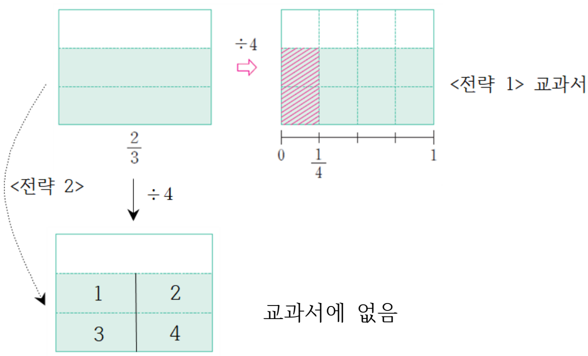
[그림 III-3] 알고리즘화하기 쉬운 분배 전략(점선부분)

IV. 결론 및 논의

등분제 상황(sharing situation)의 (자연수)÷(자연수)는 1단위당 '몫'의 의미를 지니며, 이는 단위비율을 결정하는 상황으로 볼 수도 있으며 또한 이러한 개념은 자연스럽게 (분수)÷(자연수)의 경우로 확장될 수 있다(교육부, 2015d, p.130). [그림 IV-1]은 분배의 상황에서 사용되는 <전략 1>과 <전략 2>를 보여준다.



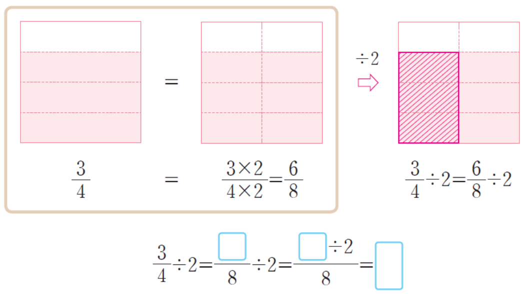
[그림 IV-1] $\frac{2}{3} \div 4$의 균등 분배



[그림 IV-2] 두 가지의 분배전략

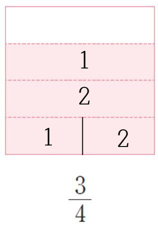
[그림 IV-2]는 현행 초등학교 교과서에서 볼 수 있는 <전략 1>의 분배 방법과 교과서에는 없지만 사용할 수 있는 <전략 2>의 분배 방법을 보여준다.

[그림 IV-3]은 피제수의 분자와 제수가 배수 관계가 아닌 경우 우리 교과서에서 사용하는 전략인 <전략 1>을 보여준다.



[그림 IV-3] <전략 1>의 조작 활동(교육부, 2015a. p. 15)

실제로, $\frac{3}{4}\div2$의 '몫'을 구하는 <전략 2>의 관점에서의 조작 활동은 [그림 IV-4]와 같다.

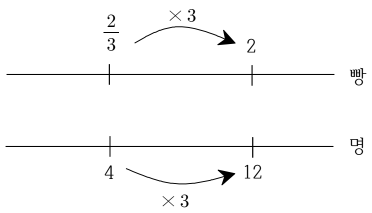


[그림 IV-4] <전략 2>의 조작 활동: $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$[7]

한편, 우리의 교육과정에서는 다루고 있지 않지만, [그림 III-2]와 같이 최대한 나눠주기 분배전략을 참조하여, (분수)÷(자연수)의 1단위당 몫을 구하는 상황을 (자연수)÷(자연수)의 상황으로 변환하는 방법을 생각해볼 수 있다. 예를 들어, '빵 $\frac{2}{3}$ 조각을 4명이 나누어 먹는 경우'를 '빵 2개를 12명이 나누어 먹는 경우'로 해석하여 (자연수)÷(자연수)의 상황으로 귀착할 수 있다. 이때 사용할 수 있는 유용한 모델은 [그림 IV-5]와 같은 이중수직선이다.

---

7) 최대한 나눠주기 전략의 분수 표현은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$이지만, 조작이 용이하지 않다.



[그림 IV-5] 이중수직선 모델

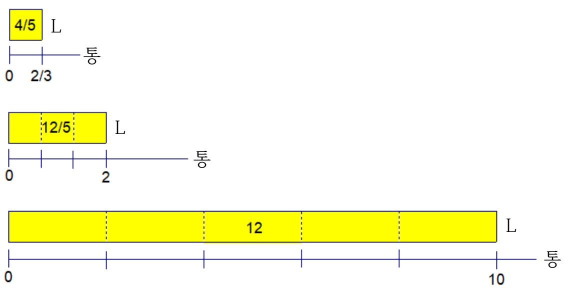
끝으로, (분수)÷(분수)의 상황은 [그림 IV-3]과 같이 (분수)÷(자연수) 또는 (자연수)÷(자연수)의 상황으로 변환하여 해석할 수 있다. 예를 들어 설명해보자.

· (문제 상황) $\frac{4}{5}$L의 물을 빈 통에 담아 보니 통의 $\frac{2}{3}$가 찼습니다. 한 통을 가득 채울 수 있는 물의 양은 몇 L인가요?

· (문제의 제기[8]): 2통에 담을 수 있는 물의 양은 얼마인가요? 따라서 한 통을 가득 채울 수 있는 물의 양은? $\frac{12}{5} \div 2$

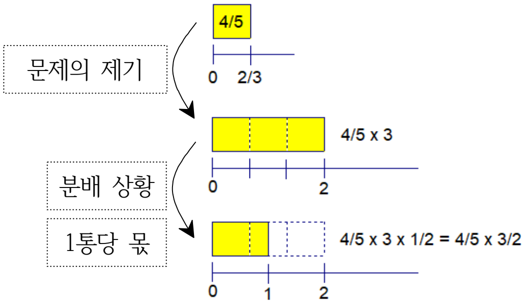
· (문제의 제기): (자연수)÷(자연수)로 변환; 물 12L는 담기 위해서 필요한 빈 통의 개수는? 따라서 한 통을 가득 채울 수 있는 물의 양은? $12 \div 10$

이러한 과정의 조작 활동은 [그림 IV-6]과 같다.



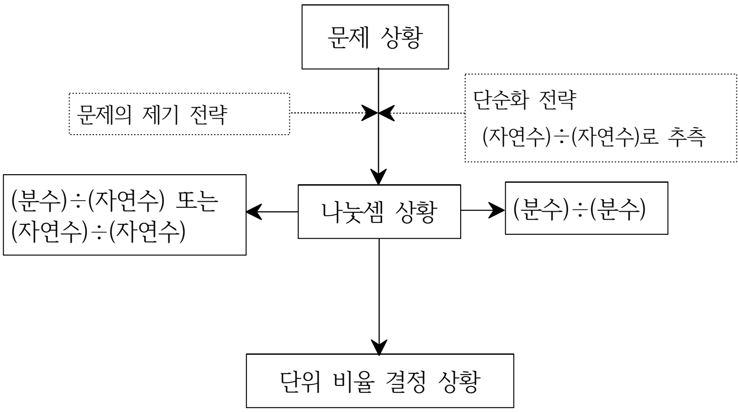
[그림 IV-6] 1통의 물의 양 구하기: $12 \div 10$

8) 문제 제기(problem posing)는 문제 해결과 관련된 것으로, 새로운 문제의 만들기와 주어진 문제의 재구성을 모두 의미하며, 문제 해결 전, 도중 또는 이후에 문제 제기가 발생할 수 있다 (Silver, 1994, p. 19). 또한 문제 제기(problem posing)는 Brown & Walter (1983)의 사전효과(the prior effect)와 관련된다.



[그림 IV-7] 한 통을 가득 채울 수 있는 물의 양: $\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}$

위와 같은 단위비율 결정 상황의 문제에서, 초등학생들은 이 상황이 왜 나눗셈 상황인지 이해하는 데 어려움을 겪을 수 있다. 위의 문제 상황에서 '$\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$는 한 통을 가득 채울 수 있는 물의 양'이라는 사실을 쉽게 이해하기 어렵다. 우리나라의 교과서에서는 이 상황을 지도하기 위해서 먼저,'단순화하기 전략[9]'을 사용하여 위에 주어진 문제 상황을 $\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}$가 되는 것을 유도한다. 그 후 [그림 II-9]과 같이 뒤집어 곱하는 원리를 설명한다. 반면, [그림 IV-7]은 같이 문제를 제기전략을 사용하여, (분수)÷(자연수)로 변환한 후, 뒤집어 곱하는 원리를 설명한다. [그림 IV-7]은 [그림 II-9]보다 분배의 상황(등분제)에 따른 1통에 담긴 양을 설명하기에 좀 더 용이 하다. 이를 정리하면 [그림 IV-8]과 같다.

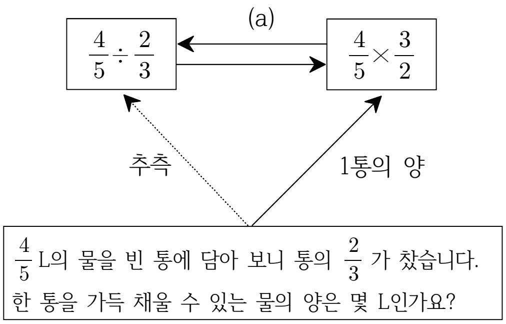


[그림 IV-8] 문제 제기 전략과 단순화 전략(교과서)의 비교

9) 6L의 물을 빈 통에 담아 보니 2통에 가득 찼습니다. 한 통을 가득 채울 수 있는 물의 양은 몇 L인가요? 6÷2

그러나 근본적인 문제인 ‘한 통을 가득 채울 수 있는 물의 양은 $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$ 이다.’라는 사실을 해결한 것은 아니다. 즉, 우리 교과서에서는 단순화하기 전략으로 추측한다.

실제로, [그림 II-9]와 [그림 IV-7]은 ‘한 통을 가득 채울 수 있는 물의 양은 $\frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$ 이다.’를 보인 것에 불과하다. 이를 도식화하면 [그림 IV-9]와 같다.



[그림 IV-9] 1통의 양은 뒤집어 곱하기

이제, [그림 IV-9]의 ‘(a) 부분을 어떻게 설명할 것인가’의 문제가 남아 있다. 하나의 방법은 곱셈과 덧셈은 역연산의 관계가 있다는 사실을 이용하는 것이다[10]. 즉,

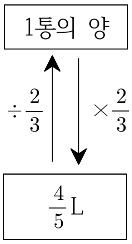
· $\frac{4}{5}$L는 $\frac{2}{3}$통이다.

· $\frac{4}{5}$=(1통의 양)$\times\frac{2}{3}$

· (곱셈과 나눗셈은 역연산 관계)

$$\frac{4}{5} \div \frac{2}{3} = (1\text{통의 양}) \times \frac{2}{3} \div \frac{2}{3} = (1\text{통의 양}) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$$

10) 곱셈과 덧셈은 역연산의 관계와 관련된 교육 과정상의 내용은 자연수끼리 곱셈과 나눗셈의 관계를 설명할 때 도입된다. 그러나 분수의 경우에는 다루고 있지 않다는 점에서 깊은 논의가 필요하다.



[그림 IV-10] 곱셈과 나눗셈의 역연산 관계의 활동적 도식(우정호, 2006, pp. 372-373 참고)

참고문헌

[1] 권성룡(2003). 초등학생의 분수이해에 관한 연구. **학교수학**, **5(2)**, 259-273.

[2] 교육부(2015a). **수학 6-1**, 서울; 천재교육.

[3] 교육부(2015b). **수학 6-1 교사용 지도서**, 서울; 천재교육.

[4] 교육부(2015c). **수학 6-2**, 서울; 천재교육.

[5] 교육부(2015d). **수학 6-2 교사용 지도서**, 서울; 천재교육.

[6] 서동엽(2005). 분수의 역사발생적 지도 방안. **수학교육학연구, 15(3)**, 233-249.

[7] 우정호. (2006). **수학의 교육적 기초**. 서울대학교 출판부: 서울.

[8] 이지영, 방정숙. (2014). 몫으로서의 분수에 관한 초등학교 수학과 교과용도서 분석. **수학교육학연구, 24(2)**, 165-180.

[9] 최근배. (2017). 두 조작의 합성으로서의 유리수 곱의 이론적 배경 고찰. **East Asian Math. J. 33(2)**, 199-216.

[10] Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

[11] Brown, S. I. & Walter, M. I. (1983). *The art of problem posing*. Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.

[12] Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on theoretical to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316.

[13] Kieren, T. E.(1993). ‘Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding’, in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), *Rational Numbers*: An Integration of Research, Lawrence Erlbaum Associates, NJ,

pp. 49-84.

[14] Kim, A. (2009). *The development of four fifth grade students' understanding and skill representing fractions as quotients*. Unpublished doctoral dissertation, Arizona State University

[15] Kim, A. Y. (2012a). The construction of children's partitioning strategy on the equal sharing situation. **학교수학, 14(1)**, 29-43.

[16] Kim, A. Y. (2012b). The type of fractional quotient and consequential development of children's quotient subconcept of rational numbers. **수학교육학연구, 22(1)**, 53-68

[17] Lamon, S. J. (2006). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding; Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.* Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Mahwah, New Jersey.

[18] Silver, E. A. (1994). *For the Learning of Mathematics* **14 (**1), 19-28. FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada.

[19] Toluk, Z. (1999). *Children's conceptualizations of the quotient subconstruct of rational numbers*. Unpublished doctoral dissertation, Arizona State University, Tempe, AZ

Hosoo Lee
Department of Mathematics Education, Teachers College
(Elementary Education Research Institute)
Jeju National University
Jeju 63294, Korea
E-mail: hosoo@jejunu.ac.kr

Keunbae Choi
Department of Mathematics Education, Teachers College
Jeju National University
Jeju 63294, Korea
E-mail: kbchoe@jejunu.ac.kr