韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2022.36.3.439
제 36집 제 3호, 2022. 9. 439-467

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 36, No. 3, Sep. 2022. 439-467

수학 정보과학 융합을 위한 창의적 문제해결 활동 개발: 영재 학생을 대상으로 한 모자 게임을 중심으로

서 지 영 (서울대학교 대학원, 학생)
윤 상 균 (서울대학교, 교수)†

미래 사회에는 지식뿐만 아니라 창의성과 협동심, 융합적 사고 등을 포함하는 다양한 역량이 필요하다. 본 연구는 중요한 수학 교과 역량인 수학 문제해결력, 의사소통 능력 등의 함양을 기대하며 수학 정보과학 융합을 위한 프로그램을 개발하였다. 선행지식이 크게 요구되지 않고, 일상언어와 쉽게 접할 수 있는 도구만으로 동기유발이 가능하며 다자간 협력이 필수적인 창의적 문제해결 활동 기반 프로그램이다. 활동의 참가자 수가 증가함에 따라 수학의 유용성과 엄밀성을 경험할 수 있으며, 이론적 원리는 유한체 위에서의 행렬 이론을 바탕으로 한다. 또한 정보과학에서 주요 주제 중 하나인 오류정정코드와의 관련성을 강조할 수 있도록 구성하였다. 본 프로그램의 실세계 맥락이 수학적 의사소통 능력의 함양과 수학의 가치 경험 기회 제공에 도움이 되기를 바라고, 코딩을 수반하지 않는다는 점에서 교사들의 접근성이 높기를 기대한다.

Ⅰ. 서론

최근 인공지능, 데이터 과학, 로봇공학 등의 분야에서 기술혁신에 의한 사회, 문화, 제도, 인간의 삶의 형태 등에 다양한 변화가 나타나고 있다. 변화의 속도가 기존에 비해 빠르고 광범위하며 분야 간 융합이 이루어진다는 특징이 있다(Schwab, 2017). 이러한 흐름 속에서 2018년 과학·수학·정보 교육 진흥법이 시행되었다(교육부, 2017). 융합형 인재 양성이 목적이며 두 교과 이상의 융합을 통한 창의적 인재 양성을 기본방향 중 하나로 삼고 있다. 문제해결 역량을 갖춘 창의·융합형 인재의 중요성과 이를 위한 수학 교과의 중요성은 이미 여러 차례 강조된 바 있다(나귀수 외, 2018; 교육부, 2020b; 교육부, 2020c).

미래 사회에서 요구하는 인재상은 지식뿐만 아니라 창의성과 인성 등을 아우르는 융합적 역량과 다양한 변화에 적절히 대응할 수 있는 역량 등을 필요로 한다(류성림 외, 2018). 이를 위한 교육적 노력으로 STEAM 교육, 창의적 문제해결력 교육, 소프트웨어 교육 등이 있다(임철일, 2019). 창의적 문제해결이란 “문제해결의 상황에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 활용해 새로운 해결 방안이나 산출물을 만들어내는 종합적인 과정을 통한 문제해결 방법”을 뜻한다(박만구, 2009). 미래 시대 학교의 학습공동체로서의 역할과 체험 중심의 학습의 중요성 또한 김진숙 (2016)에서 강조된 바 있다.

2015 개정 수학과 교육과정의 목표 중 하나는 ‘수학적으로 추론하고 의사소통하며 창의·융합적 사고와 정보처리 능력을 바탕으로 합리적으로 문제를 해결하는 것’이다. 또한 창의·융합 능력을 신장시키기 위한 교수학습으로 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하게 산출할 수 있는 수학적 과제의 중요성과 수학의 지식과 기능을 다른 교과나 실생활에 적용하는 것을 강조하고 있다. 최근 미래 첨단기술의 주요 기저로서의 수학교육에 대한 사회적

* 접수일(2022년 8월 1일), 심사(수정)일(2022년 9월 1일), 게재확정일(2022년 9월 13일)
* MSC2000분류 : 97D50
* 주제어 : 모자 게임, 오류정정코드, 정보과학, 문제해결, 수학적 의사소통, 수학적 모델링
† 교신저자 : s.youn@snu.ac.kr

수요 증가와 과학·수학·정보 교육 진흥법 시행을 배경으로 교육부 (2020a)는 수학교육 강화를 통한 국가경쟁력 제고와 국가·사회 발전을 위한 안을 마련하였다. 특히 활동과 탐구 중심의 수학교육, 협력 수업, 실생활과 관련되는 수학적 모델링 그리고 수학·정보 융합 교육 등이 강조되었다. 실제로 수학 정보간 융합 교육의 중요성과 실천 방안 등에 대해 다양한 연구들(신기철, 서보억, 2019; 이상구 외, 2020; 정진환, 조한혁, 2020; 강한별 외, 2021; 김성원, 이영준, 2021)이 이루어져 오는 등 그 필요성이 대두되고 있다. 통신이론, 정보이론 혹은 양자정보 이론에서의 수학의 역할과 중요성 또한(Shannon, 1948; Shannon & Weaver, 1949; Wilde, 2013; Holevo, 2019)에서 강조된 바 있다. 본 연구의 목적은 교육과정에서 제시하고 있는 필수 역량들을 균형적으로 함양하기 위한 수학·정보과학간 융합 교육의 구체적 실천 방안으로서의 문제해결 활동 프로그램을 개발하는 것이다. 수학적 사고의 역할과 중요성이 강조되며, 동시에 정보이론의 핵심 내용 일부가 중등 수학교육 내에서 온전히 다루어질 수 있도록 구성하였다.

정보과학은 정보의 수집, 저장, 분석, 조작 등에 관한 문제를 다루는 다양한 학제간 연구가 이루어지는 분야이다. 정보과학을 교육적 관점에서 논의할 때 코딩이 중요한 요소임이 분명하나 항상 수반되어야 하는 것은 아니다. 본 연구에서는 선행지식과 코딩 관련 지식이 크게 요구되지 않으며 일상적 언어와 쉽게 접할 수 있는 도구만을 사용하여 동기유발 가능한 수학 정보과학 융합을 위한 창의적 문제해결 활동을 개발하였다. 카드 게임으로 구성된 이 활동은 다자간 협력이 필수적이며 활동의 참가자 수가 증가함에 따라 집단 내 상호작용이 촉진되어 발산적 사고와 수렴적 사고의 반복을 통해 집단창의성이 발현될 수 있도록 설계되었다. 특히 프로그램 도입부에 해당하는 3-모자 게임과 4-모자 게임 활동은 집단 내 상호보완적 상호작용이 활발히 이루어지도록 구성하였고, 3-모자 게임에서의 최적 전략이 4-모자 게임에 동일 적용 불가한 상황을 바탕으로 한 갈등 기반 상호작용을 통해 수학의 엄밀함과 유용성을 경험할 수 있도록 구성되어 있다. 또한 정보과학 분야의 주요 주제 중 하나인 오류정정코드와의 관련성을 살필 수 있도록 설계하였고, 학생들이 수학의 유용성과 가치를 살펴봄과 동시에 추론, 문제해결, 의사소통, 모델링, 창의융합 기회를 충분히 제공할 수 있도록 프로그램을 구성하였다. 각각 미래 사회정서적 역량과 미래 수학적 역량으로 나귀수 외 (2018)에서 강조된 바 있다.

본 연구는 캐나다 Queen's University의 수학 비전공자들을 위한 선형대수학(MATH 111) 강좌의 교육 내용 일부(Taylor, 2018)를 바탕으로 대한민국 중등학교의 교육환경에 적합한 형태로의 개발연구를 수행하였다. S대 과학영재교육원 중학생들, S대 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들을 대상으로 저자들이 2년간 직접 지도한 내용을 바탕으로 프로그램의 연구와 적용 및 보완을 2020년~2021년간 반복적으로 수행하여 5단계 '1. 기본활동 - 2. 수학적 정당화 - 3. 수학적 모델링과 일반화 - 4. 심화활동 - 5. 응용활동'으로 구성된 10차시 분량의 프로그램을 개발하였다. 3명 혹은 4명이 참가하는 카드 게임으로 구성하여 집단 내 상호보완적 상호작용, 갈등 기반 상호작용, 메타인지적 상호작용이 발현될 수 있도록 1단계를 구성하였으며, 수학적 정당화를 통해 체험적 근거의 수학화를 경험할 수 있도록 2단계를 구성하였다. 또한 모델 유도 관점에서의 수학적 모델링(최경아, 2017)을 바탕으로 일반화된 상황인 7명, 15명 등의 카드 게임에서의 최적 전략을 이해 및 적용할 수 있고 메타인지적 상호작용이 촉진될 수 있도록 3단계와 4단계를 구성하였으며, 학습한 원리를 기초적 오류정정코드 개발에 응용할 수 있도록 5단계를 구성하였다. 3단계와 4단계, 5단계는 각각 수학적 모델링 과정에서 공통적으로 나타나는 '실세계 탐구 → 수학적 모델 수립 → 수학적 결론 → 모델 적용' (정혜윤 외, 2018) 구조를 만족하도록 개발하였다. 실수 혹은 복소수 기반 행렬 이론이 아니기에 추상적이라 여길 수 있는 유한체 $\mathbb{Z}_2$위에서의 기초 행렬 이론이 실세계 현상의 수학적 모델링에 직접적으로 응용가능함을 제시하여 수학의 유용성과 가치를 경험하고, 학문 수학과 학교 수학의 연계를 강화하는 역할을 할 수 있도록 설계하였다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. 모자 게임(hat game)

본 연구에서 개발한 문제해결 활동은 Ebert의 박사학위논문(Ebert, 1998) 이후 많은 관심을 받은 모자 게임(hat game)을 바탕으로 한다. k-모자 게임이란 k명의 참가자에게 흰색 혹은 검은색의 모자가 각각 50% 확률로 주어지고, 본인을 제외한 $k-1$명의 모자 색은 확인할 수 있지만, 본인의 모자 색은 알 수 없는 상황을 가정한다. $k=1$인 경우는 한 명의 참가자가 본인의 모자 색을 맞추는 가장 단순한 경우이므로 특별한 전략이 존재하지 않고, 따라서 최대승률이 50%임을 어렵지 않게 알 수 있다. 한편 $k=3$인 경우를 살펴보자면 세 참가자 A, B, C에게 아래의 <표 Ⅱ-1>과 같은 상황이 주어질 수 있다.

<표 Ⅱ-1> 3-모자 게임 예시

A	B	C
흰색 모자	검은색 모자	흰색 모자

이때 A는 아래의 <표 Ⅱ-2>에서와 같이 본인의 모자 색은 알 수 없지만, B가 검은색 모자이고 C가 흰색 모자임을 알 수 있다.

<표 Ⅱ-2> A의 상황

A	B	C
?	검은색 모자	흰색 모자

비슷하게 B는 아래의 <표 Ⅱ-3>에서와 같이 본인의 모자 색을 알 수 없지만, A가 흰색 모자이고 C가 흰색 모자임을 알 수 있다.

<표 Ⅱ-3> B의 상황

A	B	C
흰색 모자	?	흰색 모자

각 참가자들은 본인의 모자 색을 맞추어야 하는데 흰색 모자를 주장할 수도 있고, 검은색 모자를 주장할 수도 있다. 혹은 특정 모자 색을 선택하지 않고 통과를 선택할 수도 있는데 이때

· 세 명 모두 통과를 선택하거나
· 한 명이라도 오답을 주장하는 경우에는

게임에서 지는 것으로 판정하고, 그 외의 경우에는 이기는 것으로 판정한다. 예를 들어 아래의 <표 Ⅱ-4>에서와 같이 A와 B가 흰색 모자를 주장하고 C가 통과를 선택한다면

<표 Ⅱ-4> 3-모자 게임 예시 상황 속 참가자들의 추정

	A	B	C
주어진 상황	흰색 모자	검은색 모자	흰색 모자
참가자들의 추정	흰색 모자 (정답)	흰색 모자 (오답)	통과

B가 오답을 주장하였으므로 게임에서 진 것으로 판정한다. 한편 아래의 <표 Ⅱ-5>에서와 같이 A와 C가 흰색 모자를 주장하고 B가 통과를 선택한다면 맞는 주장만 2개이므로 이기는 경우이다.

<표 Ⅱ-5> 3-모자 게임 다른 예시

	A	B	C
주어진 상황	흰색 모자	검은색 모자	흰색 모자
참가자들의 추정	흰색 모자 (정답)	통과	흰색 모자 (정답)

이때 게임 진행 중에는 참가자들이 서로 의사소통을 하거나 정보를 주고받는 행위가 허용되지 않는다. 또한 추정이 동시에 이루어져야 하므로 참가자들은 사전에 공동전략을 합의한 채로 게임에 임하여야 한다. 이때 어떠한 공동전략을 적절히 택하여야 최대승률을 달성할 수 있는지가 핵심 문제이다. 이 게임은 The New York Times, Die Zeit 그리고 abcNews 등에도 2001년 소개된 바 있으며(Robinson, 2001; Blum, 2001; Poulos, 2001), 선수지식을 크게 요구하지 않고 일상적 언어만으로도 이해 가능하며 쉽게 접할 수 있는 도구만으로 구성되었다는 점이 중요한 특징이다.

일반적인 k에 대한 문제는 코딩 이론, 컴퓨터과학, 정보이론, 조합론, 그래프 이론 등과 관련되며(Chandra et al., 1983; Birk & Kol, 2006; Bar-Yossef et al., 2006; Lubetzky & Stav, 2007; Alon et al., 2008; Gadouleau, 2018), 실제로 다양한 관점에서의 연구들이 이루어졌다(Butler, 2008; Feige, 2010; Krzywkowski, 2010; Krzywkowski, 2011; Ma et al., 2011; Tantipongpipat, 2014; Cox et al., 2015; Szczechla, 2017). 특히 k가 적당히 작은 경우들에 대하여 최대승률이 아래와 같이 알려져 있다(Östergård & Blass 2001; Krzywkowski, 2010).

<표 Ⅱ-6> k에 따른 최대승률

k	2	3	4	5	6	7	8	9
최대승률(%)	50	75	75	78.13	81.25	87.5	87.5	87.89

한편 k-모자 게임에서 참가자들이 택할 수 있는 공동전략의 수는 $3^{k \cdot 2^{k-1}}$이므로 전수 조사를 하여 최적 전략을 파악해보려는 접근 또한 가능한데, 이때 k가 증가함에 따라 공동전략의 수가 대단히 빠른 속도로 증가함을 알 수 있다. $k=6$인 경우만 하더라도 이미 공동전략의 수가 $4.048 \cdot 10^{91}$이상이고 $k=7$인 경우에는 $5.627 \cdot 10^{213}$이상이다.

조합론, 그래프 이론 등을 아우르는 이산수학, 그리고 코딩 이론 등에 기반한 영재 교육과 창의성 교육에 대하여 다양한 연구(류성림, 2001; 최근배, 안선영, 2005; 박진형, 김동원, 2017; 정인우, 조한혁, 2020)가 이루어져 온 반면, 정보이론을 바탕으로 한 수학교육 프로그램에 대한 연구는 부족한 실정이다. 마찬가지로 모자 게임 또한 코딩 이론, 조합론, 그래프 이론 관점으로의 연구가 다양하게 이루어져 왔고 대학수학교육에의 적용 사례(Taylor, 2018)가 제시된 바 있으나, 중등 교육 내에서의 교육적 효과에 대한 연구는 미비한 상황이다.

나. 수학 문제해결력

2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학 교과 역량으로서 수학 문제해결을 “해결 방법을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을 선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력”이라 정의한다. 하위 요소로는 ‘문제 이해 및 전략 탐색’, ‘계획실행 및 반성’, ‘협력적 문제해결’, ‘수학적 모델링’, ‘문제 만들기’를 제시한다(교육부, 2015). 이 중 협력적 문제해결은 문제해결자 간의 상호 협력을

통해 협력적으로 문제를 해결하는 활동을 뜻한다. 협력적 문제해결 활동을 위해 수학 교실에서 의사소통과 토론의 가치가 더욱 부각되었으며 학습자들이 서로 문제해결 방법을 공유하고 토론하는 과정이 중요하게 되었다(이대현, 2019). 김혜미와 한선영 (2018)에 따르면 수학 문제해결은 수학 학습이나 실생활에서 직면한 문제를 해결할 수 있는 전략과 기능 등을 적용하는 것으로 수학 교과에서는 창의적 탐구 능력을 활용하고, 반성을 통해 문제해결 결과 도출된 지식의 점검까지 포함하는 개념이다.

수학 문제해결 역량은 이미 오래전부터 수학교육의 중요한 목적으로 강조되었다(김혜미, 한선영, 2018). PISA는 문제해결 능력을 평가영역의 하나로 지정하며 수학적 문제해결의 중요성을 강조했으며(OECD, 2009), 국내외 많은 선행연구(최윤석, 배종수, 2004; Surya & Putri, 2017; 박선영, 한선영, 2018; Hendriana et al., 2018; 한선영, 2019)에서 이미 수학 문제해결력은 중요한 목표로서 강조되어왔다.

다. 수학적 모델링과 집단창의성

수학적 모델링에 대한 다양한 정의와 관점들(Blum & Niss, 1991; Julie & Mudaly, 2007; Blum & Ferri, 2009)이 존재하나 실세계 현상을 수학적으로 이해하고 표현하며, 수학적 모델을 활용해 실세계 문제 상황을 설명한다는 공통점이 있다. 모델링 과정 또한 다양한 관점이 존재하며 여러 관점을 분석한 결과 국내외 선행연구자들은 '실세계 탐구 → 수학적 모델 수립 → 수학적 결론 → 모델 적용'으로 이루어지는 수학적 모델링 과정의 큰 틀을 따른다고 할 수 있다(정혜윤 외, 2018). 수학적 모델링 활동의 교수학습적 의미와 효과에 대해 여러 연구가 이루어져왔다(김선희, 2005; 고창수, 오영열, 2015; 박진형, 2017). 특히 박진형 (2017)에 따르면 적절한 온도와 농도를 만족하는 아이스 커피를 만들기 위한 얼음의 양을 구하는 과제를 해결하는 수학적 모델링 활동을 통해 유창성, 유연성, 정교성, 독창성과 같은 창의성의 요인들의 발현 가능성을 확인할 수 있고, 고창수와 오영열(2015)은 경찰서 위치 선정하기, 음식 재료 순서 정하기 등의 수학적 모델링 활동을 통해 추론능력, 의사소통 능력 및 문제해결능력이 향상될 수 있음을 확인하였다. 이와 같이 현실에서 주어진 문제 상황을 수학적으로 탐구하여 수학적 모델을 개발하고, 그 모델을 기반으로 현실의 문제 상황을 해석하는 수학적 모델링 과정을 통해 창의성과 다양한 수학적 역량을 함양할 수 있음을 알 수 있다. 또한 수학적 모델링 과제는 학생들끼리의 상호토론 및 대화를 통해 능동적으로 학습을 구성해 나가는 교수학습 형태를 장려한다(Asempapa, 2015).

창의성은 주어진 주제나 상황에 대한 독창적인 아이디어를 다루거나 문제해결을 위한 창의적인 방식을 개발하는 능력을 뜻한다. 이는 우리나라의 2015 개정 교육과정 이외에도 중국, 핀란드, 호주, 미국 등의 국가에서 현행 교육과정으로 강조되고 있는 역량이다(나귀수 외, 2018). 최근 집단창의성 관련 연구(Zhou & Luo, 2012; 조무정, 진석언, 2016; 성지현, 이종희, 2017; 정혜윤, 이경화, 2019)가 주목받고 있으며, 집단창의성 발현을 위한 교육 프로그램에 대한 연구의 필요성도 대두되고 있다. 정혜윤과 이경화(2019)는 집단창의성이란 '집단 내 구성원들에 의해 제시된 사고가 상호작용을 통해 공유되어 가는 과정 또는 그 과정에서 변환을 거쳐 창의적 시너지를 갖게 된 결과물'로 정의한다. 집단창의성의 발현을 위해서는 집단 내 상호작용이 중요한데, 이는 상호보완적 상호작용, 갈등 기반 상호작용, 메타인지적 상호작용으로 구분할 수 있다(Nemeth & Nemeth-Brown, 2003; Nijstad & Paulus, 2003). 상호보완적 상호작용이란 집단 구성원들이 다양한 사고를 공유하고 누적적으로 수집하는 과정이다. 갈등 기반 상호작용은 집단 내에서 사고가 불일치하거나 대치되는 견해로 인해 갈등이 유발되고 이를 해결하기 위한 과정이다. 마지막으로 메타인지적 상호작용은 앞선 두 상호작용에서 나타난 집단 내 사고를 검증 및 반성하는 등 비판적 사고를 하는 과정이다(정혜윤, 이경화, 2019).

2. 연구방법 및 절차

본 연구의 목표는 수학과 정보과학 융합 교육프로그램 개발연구를 수행하는 것이다. 모자 게임을 바탕으로

최적 전략과 최대승률을 협력하여 탐구해가는 창의적 문제해결 활동을 개발하고, 코딩 이론에 대한 기초 지식을 필요로 하지 않으면서도 오류정정코드와 같은 정보이론적 실세계 현상과 기초 수학의 관련성을 강조할 수 있도록 프로그램을 연구하고 중등학교 학생들을 대상으로 적용하여 보완을 반복하였다.

가. 개발연구

개발연구(developmental research)의 역사적 시초는 Freudenthal로 거슬러 올라간다(권오남, 주미경, 2005). Freudenthal (1973)은 수학 교과과정 개발에서 '연구-개발-보급'의 3단계로 이루어진 전통적인 모델은 현실적으로 비효율적임을 지적하며 연구과 개발이 지속적으로 피드백을 주고받는 유연한 교대 과정으로 구성된 개발연구 모델을 제안하였다. 정영옥 (2005)은 개발연구란, 일관적이고 효율적인 교과과정 개발을 위해 적절한 이론을 바탕으로 체계적으로 수업을 설계하고 평가하며 그 과정을 가능한 한 상세하고 솔직하게 기록하고 보고하는 연구라 정의한다. 또한 개발연구의 절차를 예비설계 단계, 교수실험 단계, 회고분석 단계의 순환과정으로 설명한다. 예비설계 단계는 현재의 상황을 분석, 탐색하는 단계로 교수학습과정이 수업에서 어떻게 구체화될 것인지에 대해 사고실험이 이루어지는 단계이다. 교수실험 단계는 이전 단계에서 이루어진 사고실험을 검증, 정련하는 단계이다. 회고분석 단계는 교수실험을 통해 수집된 자료 전체를 회고적으로 분석하는 단계이다. 본 연구에서는 수학과 정보를 융합한 교육프로그램 개발이 목적이므로 예비설계 단계에 집중하였다.

나. 연구설계

[그림 Ⅱ-1] 연구설계 과정

본 연구의 설계 과정은 선행연구와 2015 개정 교육과정 문헌 연구를 통해 수학과 정보 교과 융합프로그램 개발을 위한 이론적 검토를 실시하였으며 필수 요소들을 파악하였다. 또한 이를 바탕으로 실제 적용가능한 10차시의 교육학습과정안을 개발하였다.

<표 Ⅱ-7> 차시별 학습 주제

	학습 주제	프로그램 단계
1차시	3-카드 게임과 4-카드 게임	1단계 (기본활동)
2차시	3-카드 게임과 4-카드 게임의 최적 전략	2단계 (수학적 정당화)
3차시	벡터, 행렬, rank-nullity 정리를 포함한 행렬 이론	3단계 (수학적 모델링과 일반화)
4차시	7-카드 게임과 선형대수학	
5차시	n-카드 게임과 선형대수학	
6차시	7-카드 게임의 최적 전략	4단계 (심화활동)
7차시	n-카드 게임의 최적 전략	
8차시	길이 4 또는 11 메시지의 오류정정코드	5단계 (응용활동)
9차시	오류정정코드의 일반화	
10차시	오류정정코드의 응용	

이때 4차시~7차시(3단계~4단계)와 8~9차시(5단계)는 각각 학생들이 실세계 상황을 수학적으로 이해하고 주어진 문제, 즉 메시지 맞추기 게임과 오류정정문제를 해결하고 결론을 수학적으로 정당화할 수 있는 과정을 제공할 수 있도록 설계하였다. 이 과정은 선행연구들에서 제시된 다양한 수학적 모델링 과정(Swetz & Hartzler, 1991; Blum & Ferri, 2009; 정혜윤 외, 2018; 고상숙 외, 2020)을 참고하여 [그림 Ⅱ-2]와 같은 구조를 갖도록 구성하였다.

[그림 Ⅱ-2] 수학적 모델링 과정

10차시 계획을 바탕으로 2020년 S대 과학영재교육원 중학생들, S대 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들을 대상으로 개발한 프로그램을 실제 적용 및 평가하여 수정 보완을 반복하였다. 또한 수정된 교육프로그램을 2021년 S대 과학영재교육원 중학생들, S대 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들을 대상으로 적용하였으며, 이를 평가 및 보완하는 과정을 반복함으로써 예비설계를 위한 기초연구를 진행하였다. 2020년에 참여한 학생이 사전지식을 갖추어 2021년 재참여를 하는 경우는 없었다. 2020년부터 2021년까지 10차시(총 60시간)의 교육프로그램을 모두 이수한 학생들은 8명이며, 1~2차시 정도 요약된 형태의 일부 프로그램을 이수한 학생들은 약 60명 정도이다. 최종적으로 2년간 분석을 종합하여 프로그램의 수정 및 보완에 반영하고 시사점을 분석하였으며 후속 연구의 필요성을 도출하였다.

Ⅲ. 연구 결과 및 논의

1. 과제 개발 및 교수·학습과정

본 연구는 흰색 모자와 검은색 모자 모델을 [그림 Ⅲ-1]과 같이 앞면이 흰색이고 뒷면이 검은색인 카드 게임 문제로 변형하였다. 지금부터는 k-모자 게임 대신 k-카드 게임이라 부르도록 하겠다.

[그림 Ⅲ-1] 카드 게임에 사용된 카드

활동에 임하는 학생들이 수학의 유용성을 살펴볼 수 있으면서도 창의적, 협동적, 논리적, 융합적 사고 기회를 충분히 얻을 수 있도록 활동 프로그램을 구성하였다. 그 과정을 단계별로 살펴보자면 아래와 같다.

<표 Ⅲ-1> 프로그램의 5단계 구성

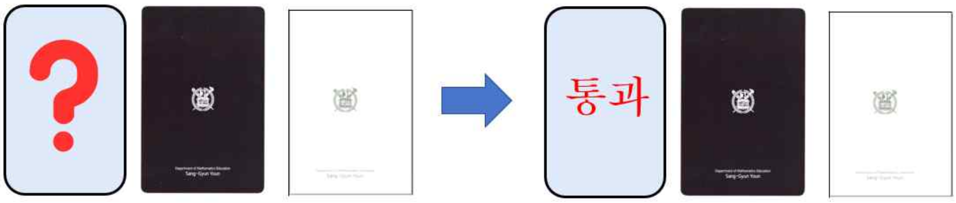
1. 기본활동	2. 수학적 정당화	3. 수학적 모델링과 일반화	4. 심화활동	5. 응용활동
창의적 및 협동적 사고	논리적 사고	논리적 사고	수학의 유용성 경험	융합적 사고

가. 기본활동 단계

기본활동 단계에서는 모든 학생들이 게임의 원리를 이해하고 체득할 수 있도록 카드 게임을 실시한다. 우선 교수자가 1-카드 게임 시범을 보인다. 카드를 머리 위에서 무작위로 회전시키다가 멈추고 학생들에게 보이는 면의 색이 흰색일지 검은색일지 추정하는데, 이를 반복하여 추정이 맞는 경우와 틀리는 경우 모두 발생할 수 있음을 학생들이 자연스럽게 받아들일 수 있도록 지도한다. 이는 1-카드 게임의 경우 참가자가 승리할 확률이 50%임을 학생들이 자연스럽게 받아들일 수 있도록 돕는 중요한 과정이다.

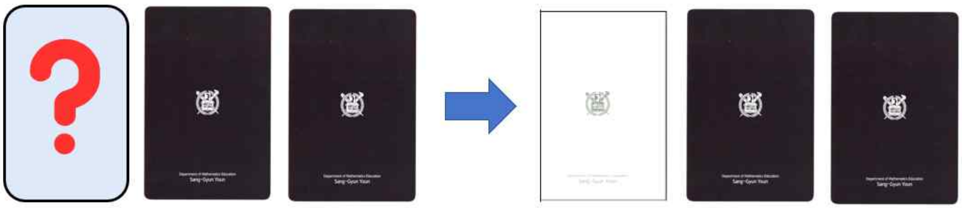
다음으로 학생들이 직접 참여하는 3-카드 게임을 실시한다. 참가자 역할의 학생 3명이 시범을 보이기 위해 카드를 한 장씩 머리 위에서 회전시키다가 동시에 멈춘다. 이때 본인의 카드 색을 확인할 수는 없지만, 본인을 제외한 나머지 참가자들의 카드 색은 확인할 수 있다. 이때 나머지 참가자들의 카드 색과 본인의 카드 색의 관계를 확률적 관점에서 추론해내는 것이 3-카드 게임의 핵심이다. 이후 3명의 참가자가 각자 본인의 카드 색이 흰색일지, 혹은 검은색일지 아니면 통과를 선택할지를 동시에 결정하도록 하고, 승리 혹은 패배 여부를 학생들이 직접 판단할 수 있도록 하여 게임 규칙의 이해를 돕는다. 이를 여러 차례 반복하여 임의로 주어지는 상황에서 각 참가자의 역할은 무엇인지 인지할 수 있도록, 그리고 세 참가자의 흰색, 검은색 혹은 통과 선택을 종합하여 승리 패배 여부를 판단하는 원리를 이해할 수 있도록 돕는다.

여러 차례 3-카드 게임을 반복한 후 ‘어떻게 하면 카드 게임의 승률을 높일 수 있을까?’라는 주제에 대한 조별 토의 시간을 부여한다. 자유로운 분위기를 조성하기 위해 3~4명의 학생들이 한 조가 되도록 구성하였고, 학생들이 직접 협력하여 최적 전략을 탐구해보도록 지도한다. 학생들은 게임의 규칙을 재확인하기 위해 게임을 조별로 다시 해보기도 하고 서로 게임의 규칙을 알려주기도 하는 등의 동료 멘토링을 통해 3-카드 게임에 대한 전반적 이해도가 크게 높아지는 경향을 보였다. 이 과정에서 학생들은 게임을 실제로 해보며 가진 생각과 감정 등을 바탕으로 다양한 발산적 사고를 하게 되는데, 다양한 의견이 자유롭게 표현될 수 있도록 교사가 허용적인 분위기를 조성하는 것이 중요하다. 몇몇 학생들이 ‘게임에 참여하는 인원수에 상관없이 항상 50% 승률을 가질 것이다.’라고 생각하는 경우가 종종 있었다. 이는 전확률과 조건부확률의 개념이 정립되지 않았기에 나타나는 현상인데, 이에 대하여는 학생들의 토의가 진행된 후 교수자가 수학적 개념 확립에 도움을 주었다. 학생들은 토의하는 과정에서 발산적 사고와 수렴적 사고를 순환하며, 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 되는데, 이러한 문제해결 과정의 중요성은 이경화 (2015)에서 강조된 바 있다. 토의를 마친 후에는 대부분의 학생들이 3-카드 게임에서 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 같을 경우 그와 다른 카드 색을 선택하고, 나머지 두 참가자의 카드 색이 서로 다를 경우 통과를 선택하는 것이 최적 전략임을 알아낸다. 예를 들어 아래 [그림 Ⅲ-2]에서와 같이 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 서로 다를 경우에는 통과를 선택하는 것이다.



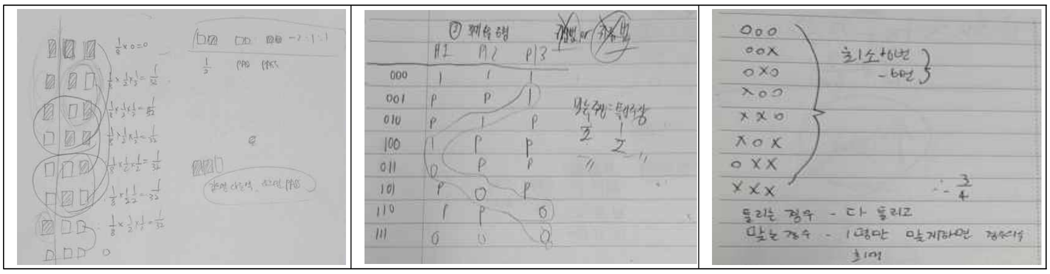
[그림 III-2] 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 서로 다른 경우

만약 [그림 Ⅲ-3]과 같이 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 검은색으로 같은 경우에는 그와 다른 색인 흰색이라고 추정한다.



[그림 III-3] 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 같은 경우

전확률과 조건부확률의 개념적 차이를 자연스럽게 받아들이는 과정으로서 위의 전략을 바탕으로 승률을 구하는 활동을 학생들이 토의하여 진행한다. 대부분의 학생들이 가능한 8가지 경우를 모두 노트에 나열하여 승률을 아래의 [그림 Ⅲ-4]와 같이 구하였다.



[그림 III-4] 승률에 대한 학생들의 추론

학생들의 표현방식은 흰 카드와 검은 카드 그리고 0과 1, O와 X 등으로 다양하였지만 본질적으로 동일한 결론에 이르렀으며, 이는 아래의 <표 Ⅲ-2>로 정리할 수 있다.

<표 III-2> 3-모자 게임의 모든 8가지 상황

주어지는 상황			참가자 1	참가자 2	참가자 3	결과
흰색	흰색	흰색	검은색(오답)	검은색(오답)	검은색(오답)	패
흰색	흰색	검은색	통과	통과	검은색(정답)	승
흰색	검은색	흰색	통과	검은색(정답)	통과	승
검은색	흰색	흰색	검은색(정답)	통과	통과	승
검은색	검은색	흰색	통과	통과	흰색(정답)	승
검은색	흰색	검은색	통과	흰색(정답)	통과	승
흰색	검은색	검은색	흰색(정답)	통과	통과	승
검은색	검은색	검은색	흰색(오답)	흰색(오답)	흰색(오답)	패

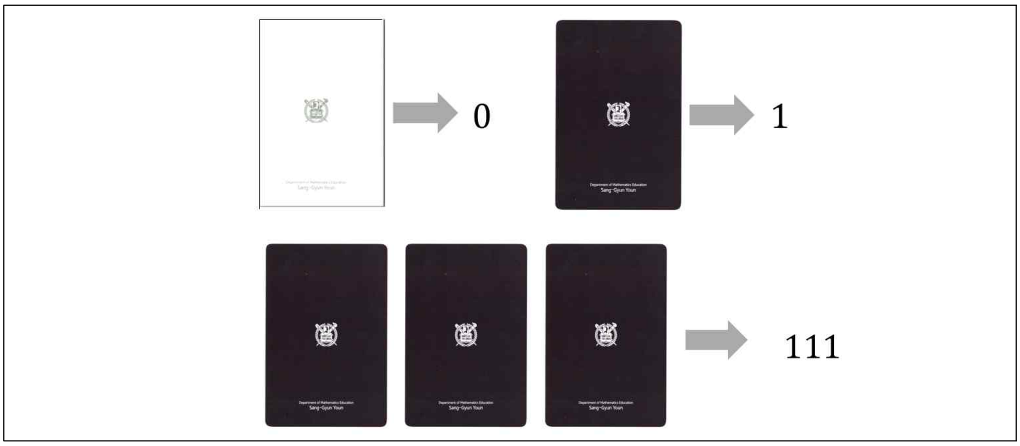
대부분의 학생들이 참가자 3명의 카드 색이 모두 동일한 경우에는 게임에서 지게 되고, 나머지 경우에는 승리하여 승률이 $\frac{6}{8}$, 즉 75%임을 확인하였다. 이때 승률을 더 높일 수 있는 방법이 있을지에 대해 보다 깊고 다양한 반응을 요구하는 확산적 발문(한정민, 박만구, 2010)을 하여 3-카드 게임의 메타인지적 활동으로서의 의미를 되새기고 학생들이 다양한 의견을 제시할 수 있도록 유도한다. 메타인지적 상호작용은 토의의 완성도를 높이고 문제해결의 가능성과 내용에 대한 이해력을 향상시키기 때문에 중요한 과정이다(정혜윤, 이경화, 2019). 또한 이는 추후 수학적 정당화 및 수학적 모델링과 일반화 단계의 활동들로 전환하기 위한 동기를 유발하는 필수적 과정 중 하나이며, 다양한 의견을 수렴한 후 75%가 최대승률이라는 사실을 제시하는데 이에 관한 엄밀한 논의는 수학적 정당화 단계로 미룬다. 정당화에 앞서 카드 게임의 참가자 수가 4명으로 증가하였을 경우, 즉 4-카드 게임에서 어떤 전략을 택해야 하며 또한 승률이 어떻게 될지에 대해 학생들이 함께 토론할 수 있도록 한다.

4-카드 게임의 경우 3-카드 게임보다 학생들이 다소 어려워하는 경향을 보였다. 이는 3-카드 게임의 경우 모든 참가자가 동일한 전략을 사용하는 대칭적 구조를 갖는데 이에 반해 4-카드 게임의 경우에는 모든 참가자가 동일한 전략을 사용할 경우 승률 50% 이하를 달성하는 데에 그치기 때문이다. 이때 학생들 스스로 문제를 이해하고 해결의 실마리를 도출할 수 있는 내적 도움을 제공할 필요가 있는데(이경화, 2015, p.93), 1-카드 게임의 승률이 50%, 3-카드 게임의 승률이 75%이고 n-카드 게임이 협동 활동임을 강조하였을 때, 참가자의 수가 증가하였으므로 4-카드 게임의 승률이 3-카드 게임의 승률인 75% 이상일 수 있음을 학생들이 어렵지 않게 짐작하였다. 또한 비대칭적 전략의 수립, 즉 전략 구성에 있어 참가자마다의 역할이 다를 수 있음을 강조하였을 때 상당수의 학생들은 한 참가자는 항상 통과를 택하고 나머지 세 참가자가 3-카드 게임에서의 전략을 반복하였을 때 승률 75%를 달성할 수 있음을 스스로 결론지을 수 있었다. 이때 참가자 수가 증가하였음에도 여전히 최대승률이 75%일지에 대한 개방적 발문을 통해 학생들의 자유로운 의견 개진을 도울 수 있으며, 실제로 학생들은 다양한 가능성을 제시하는 경향이 있다. 교수자는 학생들의 다양한 응답에 대해 '맞다, 틀리다'의 판단을 내리기보다는 응답의 근거를 설명할 수 있는 기회를 주어 학생이 프로그램에 더욱 흥미를 갖고 스스로 참여할 수 있도록 유도해야 한다(한정민, 박만구, 2010). 실제로 본 프로그램에서는 학생들이 칠판에 본인의 의견을 나타내어 다른 학생들에게 설명하는 과정이 이루어졌다. 이에 대한 수렴적 사고를 돕기 위해 아래의 수학적 정당화 단계를 구성하는 것이 적절하다.

나. 수학적 정당화 단계

앞서 기본활동 단계에서 3-카드 게임과 4-카드 게임에서의 최대승률을 75%로 추론한 바를 수학적으로 정당화하고, 절대적 결론을 확립 가능케 하는 수학의 유용성을 경험할 수 있도록 돕는 단계이다. 간단한 형태의 수학

적 모델링 과정으로 흰색 카드를 숫자 0 그리고 검은색 카드를 숫자 1로 표현하도록 한다. 예를 들어 3-카드 게임에서 모든 참가자에게 검은색 카드가 주어진 경우 이를 '111'로 나타낸다.



[그림 III-5] 3-카드 게임의 기초 수학적 모델링

이를 바탕으로 기본활동 단계에서 살펴본 3-카드 게임에서의 모든 경우의 수와 각 경우마다 참가자들의 전략이 무엇이었는지를 0과 1을 이용하여 어렵지 않게 모델링할 수 있고, 그 결과는 아래의 <표 Ⅲ-3>로 주어지고, [그림 Ⅲ-4]의 두 번째 추론에서의 표현 방법과 일치한다. 예를 들어 101이라면 참가자 1과 참가자 3에게 검은색 카드, 참가자 2에게 흰색 카드가 주어진 상황을 의미하고, 이때 참가자 1과 참가자 3은 통과를 택하고 참가자 2는 나머지 두 참가자 모두 검은색 카드이므로 본인은 흰색 카드를 택하게 된다.

<표 III-3> 3-카드 게임 최적 전략의 수학적 모델링

주어진 상황	참가자 1	참가자 2	참가자 3	결과
000	1 (오답)	1 (오답)	1 (오답)	패
001	통과	통과	1 (정답)	승
010	통과	1 (정답)	통과	승
100	1 (정답)	통과	통과	승
011	0 (정답)	통과	통과	승
101	통과	0 (정답)	통과	승
110	통과	통과	0 (정답)	승
111	0 (오답)	0 (오답)	0 (오답)	패

<표 Ⅲ-3>을 제시하여 8가지 경우를 살펴보았을 때, 최종적인 승률은 75%이지만, 각 열을 살펴보면 모든 참가자가 정답을 2번 그리고 오답을 2번 말하고 있음을 확인할 수 있다. 다만 오답들을 000과 111 두 가지 경우

에 몰아서 배치하고, 정답들이 나머지 여섯 가지 경우들에 효율적으로 분산되어 있는 것이 높은 승률을 얻기 위한 핵심적인 역할을 하였음을 학생들이 쉽게 확인할 수 있다. 이러한 사고 과정은 [그림 Ⅲ-4]의 두 번째 추론에서도 살펴볼 수 있다. 또한 어떠한 전략을 택하더라도 참가자 1은 참가자 2와 참가자 3의 정보를 바탕으로 판단하기 때문에, 만약 000에서 정답을 제출한다면, 100에서 오답을 제출할 것이고, 마찬가지로 111에서 정답을 제출한다면 011에서 오답을 제출할 것이다. 이러한 대칭성에 의해 각 참가자의 정답의 개수와 오답의 개수는 항상 동일해야 한다. 즉 j번째 참가자의 정답 개수를 a_j 그리고 오답 개수를 b_j라 하였을 때, $a_j = b_j$가 성립한다. 따라서 모든 참가자들의 정답 개수의 총합 A는 $a_1 + a_2 + a_3$로 주어지고, 모든 참가자들의 오답 개수의 총합 B는 $b_1 + b_2 + b_3$이므로 $A = B$임을 알 수 있다.

한편 게임에서 승리하는 경우의 수를 w 그리고 패배하는 경우의 수를 l이라고 하였을 때 $w + l = 8$이 성립하고, 각 승리하는 경우마다 적어도 하나의 정답이 존재해야 하므로 $w \le A$임을 알 수 있다. 또한 모든 오답들은 패배하는 경우에 속하며 동시에 3개의 오답이 배치 가능하므로 $B \le 3l$임을 알 수 있다. 이때 $A = B$이므로 $8 - l = w \le A = B \le 3l$이 성립한다. 따라서 $l \ge 2$이고 $w \le 6$이므로 임의의 전략에 대해 승률이 항상 75% 이하임을 정당화할 수 있다.

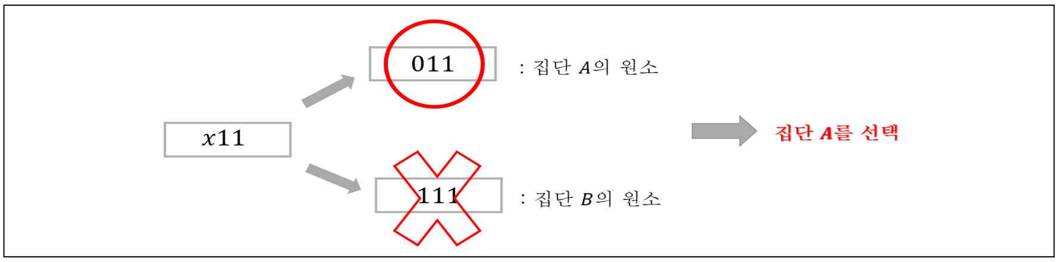
이 논의를 이해한 학생들은 4-카드 게임의 경우로 일반화 가능한지 여부를 알아보기 위해 같은 논리를 적용해보는 경향을 보이는데, 실제로 4-카드 게임의 경우에도 모든 정답의 개수 A와 모든 오답의 개수 B가 일치하고, 승리하는 경우의 수 w와 패배하는 경우의 수 l에 대해 $w + l = 16$, $w \le A$ 그리고 $B \le 4l$이 성립한다. 이를 연립하여 $16 - l = w \le A = B \le 4l$, 즉 $3.2 \le l$이 성립함을 알 수 있다. 따라서 $l \ge 4$이고 $w \le 12$이므로 임의의 전략에 대한 승률이 75% 이하임을 정당화할 수 있다. 이러한 과정을 통해 학생들은 기본활동 단계에서 추론한 전략이 실제로 최대승률임을 수학적으로 정당화하는 과정을 이해할 수 있고, 이를 바탕으로 수학의 유용함과 엄밀함을 경험할 수 있다.

다. 수학적 모델링과 일반화 단계

이 단계에서는 학생들이 이진법 연산, 보다 자세히는 $1 + 1 = 0$을 만족하는 $\mathbb{Z}_2$-모듈(module)에서의 벡터와 행렬 기본연산을 활용하여 게임의 참가자 수가 증가하는 n-카드 게임의 수학적 구조를 이해하는 것을 목표로 한다. 2015 개정 수학과 교육과정의 중등교육과정 내에서는 이진법, 벡터와 행렬을 다루지 않기 때문에 이와 관련한 기초 지식과 연산 등을 소개하는 과정이 필요하다. 또한 n-카드 게임의 최적 전략과 최대승률의 논의에 있어 추상 선형대수학 이론, 특히 유한체 $\mathbb{Z}_2$위에서의 차원 정리(dimension theorem 혹은 rank-nullity theorem)가 중요한 역할을 한다.

3-카드 게임에서 주어진 상황이 001, 010, 011, 100, 101, 110 중 하나인 경우 그리고 000와 111 중 하나인 경우가 대립하였는데 각각 집단 A 그리고 집단 B라 하였을 때 이를 0과 1로만 구성된 $H_3 = \begin{bmatrix} 0\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix}$의 선형대수적 특성으로 구별할 수 있다. 실제로 집단 A는 $\left\{ v \in \mathbb{Z}_2^3 : H_3 \cdot v \ne 0 \right\}$와 일치하고 집단 B는 $\left\{ v \in \mathbb{Z}_2^3 : H_3 \cdot v = 0 \right\}$, 즉 주어진 행렬 H_3의 핵(kernel)과 일치함을 알 수 있다. 또한 3-카드 게임의 최적 전략을 집단 A와 집단 B의 구분을 바탕으로 수학적으로 모델링할 수 있으며 이는 7-카드 게임, 15-카드 게임으로의 일반화를 가능케 하여 학생들이 수학의 유용성을 경험할 수 있도록 하는 핵심적인 과정이다.

3-카드 게임에서 첫 번째 참가자의 최적 전략은 두 가지 방법으로 구성되어 있다. 나머지 두 참가자의 카드가 같은 색일 경우, 예를 들어 $x11$의 상태가 주어졌다면 011로 결정하는 것이 학생들이 학습한 최적 전략이다. 이는 가능한 두 경우 011과 111 중 하나인 011을 택하는 것으로, 즉 [그림 Ⅲ-6]과 같이 집단 A와 집단 B 중 집단 A를 선택하는 것으로 이해할 수 있다.

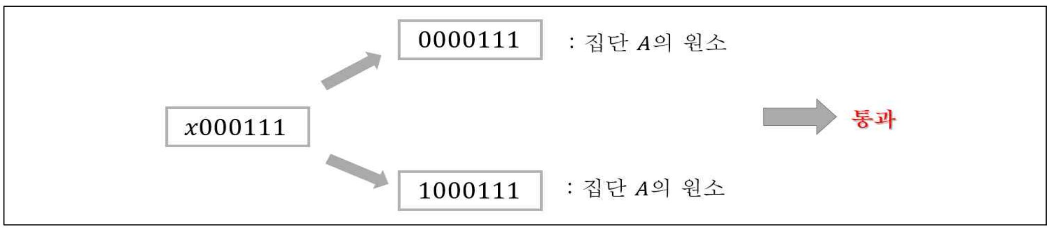


[그림 III-6] $x11$가 주어진 경우

한편 나머지 두 참가자의 카드가 다른 색일 경우, 예를 들어 $x01$의 상태가 주어졌다면 통과를 하는 것이 최적 전략이었다. 이는 두 가능한 경우 001과 101 중 어느 것도 택하지 않는 것인데, [그림 Ⅲ-7]과 같이 집단 A와 집단 A 중에는 임의로 선택하지 않는 것으로 이해할 수 있다.

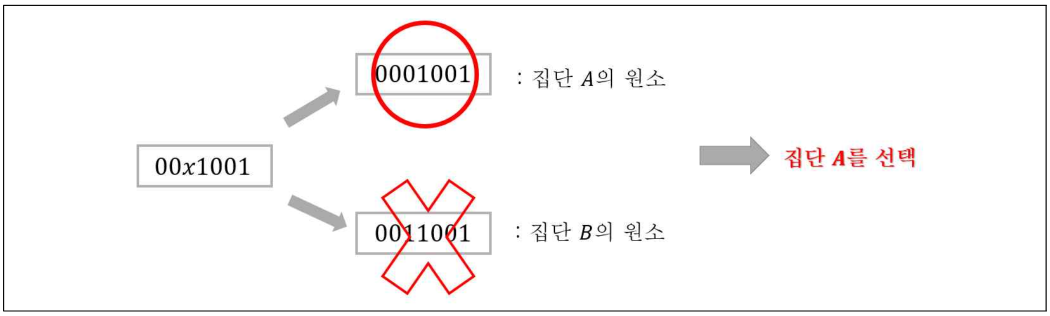
[그림 III-7] $x01$가 주어진 경우

이때 행렬 $H_3=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$의 각 열 01, 10, 11이 자연수 1, 2, 3을 이진수로 순서대로 표현하고 있음에 주목하고, 이를 일반화하여 자연수 1부터 7까지를 이진수로 나타낸 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111을 순서대로 열로 취한 $H_7=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}$를 소개한다. 또한 행렬 H_7을 이용하여 집단 $A=\left\{v\in\mathbb{Z}_2^7 : H_7\cdot v\neq 0\right\}$와 집단 $B=\left\{v\in\mathbb{Z}_2^7 : H_7\cdot v=0\right\}$를 구별하여 3-카드 게임의 최적 전략을 일반화할 수 있음을 지도한다. 실제로 7-카드 게임의 경우 첫 번째 참가자에게 $x000111$의 상태가 주어졌을 때 가능한 경우가 오직 두 가지 0000111과 1000111임을 학생들이 자연스럽게 이해하였으며 이진법 연산을 통해 두 경우 모두 집단 A에 속함을 확인할 수 있었다. 이때에는 3-카드 게임에서와 마찬가지로 통과를 택한다.



[그림 III-8] $x000111$가 주어진 경우

또한 세 번째 참가자에게 $00x1001$의 상태가 주어졌을 때 가능한 경우가 오직 두 가지 0001001과 0011001임을 학생들이 자연스럽게 이해하였으며 이진법 연산을 통해 각각 집단 A와 집단 B에 속함을 확인할 수 있었다. 이때에는 3-카드 게임에서와 마찬가지로 집단 A를 택하는 것을 전략으로 택한다.



[그림 III-9] $00x1001$가 주어진 경우

위의 전략에 따른 결과를 살펴보기 위해 학생들이 직접 7-카드 게임에 참여하도록 지도하는데, 이때 카드 색을 0과 1로 변환하는 과정을 생략하기 위해 한자리가 감추어진 길이 7의 메시지를 맞추는 '길이 7 메시지 맞추기 게임'으로 전환한다. 학생들은 교수자로부터 $x000111$ 혹은 $00x1001$과 같은 메시지를 전달받는다. 3-카드 게임에서의 최적 전략에 따른 결과 양상과 비슷하게 7-카드 게임에서 승리할 경우 단 한 명이 정답을 말하고 나머지 6명은 통과를 하게 되고, 패배할 경우 7명 모두 오답을 말하게 되는 것을 학생들이 직접 경험할 수 있도록 자연스럽게 유도하는 것이 중요하다. 이를 위해 교수자는 길이 7의 메시지들을 의도적으로 준비한다. 예를 들어 메시지 1000100을 준비하여 $x000100$을 첫 번째 참가자에게, $1x00100$을 두 번째 참가자에게, …, 일곱 번째 참가자에게 $100010x$를 전달하고, 각 참가자들은 $x=0$인 경우의 메시지와 $x=1$인 경우의 메시지가 집단 A에 속하는지 혹은 집단 B에 속하는지 여부를 확인하는 과정을 거친다. 이때 네 번째 참가자를 제외한 모든 참가자들은 두 메시지 모두 집단 A에 속하기 때문에 통과를 하게 된다. 네 번째 참가자의 경우에는 $x=0$일 경우의 메시지 1000100이 집단 A에 속하고 $x=1$일 경우의 메시지 1001100이 집단 B에 속하므로 집단 A의 메시지 1000100을 택하여 정답을 말하게 된다.

<표 III-4> 메시지 1000100를 보내는 경우

보낸 메시지 1000100	받은 메시지	$x=0$	$x=1$	답변	결과
참가자 1	$x000100$	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 2	$1x00100$	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 3	$10x0100$	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 4	$100x100$	집단 A	집단 B	1000100	정답
참가자 5	$1000x00$	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 6	$10001x0$	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 7	$100010x$	집단 A	집단 A	통과	·

한편 메시지 1001100을 교수자가 의도적으로 준비하여 k번째 참가자에게 k번째 자리를 가린 메시지를 전달하였을 때 두 번째 참가자는 $1x01100$을 받게 되는데, $x=0$일 경우의 메시지 1001100은 집단 B에 속하며 $x=1$일 경우의 1101100은 집단 A에 속하게 된다. 따라서 두 번째 참가자는 집단 A에 속하는 오답 1101100을 선택하게 되는데, 실제로는 모든 참가자들이 오답을 선택하게 됨을 살펴볼 수 있다. 더 나아가 7-메시지 맞추기 게임을 반복해가며 확인함으로써 전략에 따른 결과를 내면화할 수 있다.

<표 III-5> 메시지 1001100를 보내는 경우

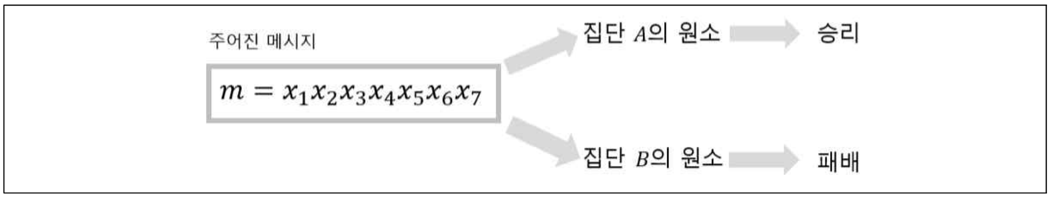
보낸 메시지 1001100	받은 메시지	$x=0$	$x=1$	답변	결과
참가자 1	$x001100$	집단 A	집단 B	0001100	오답
참가자 2	$1x01100$	집단 B	집단 A	1101100	오답
참가자 3	$10x1100$	집단 B	집단 A	1011100	오답
참가자 4	$100x100$	집단 A	집단 B	1000100	오답
참가자 5	$1001x00$	집단 A	집단 B	1001000	오답
참가자 6	$10011x0$	집단 B	집단 A	1001110	오답
참가자 7	$100110x$	집단 B	집단 A	1001101	오답

라. 심화활동 단계

수학적 모델링과 일반화 그리고 길이 7의 메시지 맞추기 게임을 반복하여 학생들이 얻은 경험적 근거들을 바탕으로 일반적인 길이 2^n-1의 메시지 맞추기 게임의 최대승률을 논하고 수학적 정당화를 하는 단계이다. 교수자가 집단 A에 속하는 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_7$을 준비하였을 때 k번째 참가자는 k번째 자리에 대한 정보를 제공받지 못하기 때문에 가능한 두 메시지 m과 $m+e_k$가 어느 집단에 속하는지 여부를 각각 판단해야 한다. 이때 e_k는 k번째 성분만 1이고 나머지 성분들은 0인 벡터이다. 메시지 m은 항상 집단 A에 속하므로 $m+e_k$가 어느 집단에 속하는지 여부만 판단하면 충분하다. 이때 $0\neq H_7\cdot m\in\mathbb{Z}_2^3$이므로 $H_7\cdot m$이 H_7의 열벡터 중 하나여야만 한다. 각 열벡터를 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_7$라 두고 $H_7\cdot m=v_j$라 가정하자. 만약 $k\neq j$라면 k번째 참가자의 한 메시지 $m+e_k$는 $H_7\cdot(m+e_k)=H_7\cdot m+H_7\cdot e_k=v_j+v_k\neq 0$이므로 집단 A에 속하고 오직 j번째 참가자의 한 메시지 $m+e_j$ 경우에만 $H_7\cdot(m+e_j)=H_7\cdot m+H_7\cdot e_j=v_j+v_j=0$이 성립하여 집단 B에 속하게 된다. 따라서 j번째 참가자만 유일하게 집단 A에 속하는 정답 메시지 m을 택하고 나머지 참가자들은 통과를 하게 됨을 알 수 있다.

한편 교수자가 집단 B에 속하는 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_7$을 의도적으로 준비하였을 때 k번째 참가자는 k번째 자리에 대한 정보가 없기 때문에 가능한 두 메시지 m과 $m+e_k$가 어느 집단에 속하는지 여부를 각각 판단해야 한다. 한 메시지 m은 항상 집단 B에 속하고 다른 한 메시지 $m+e_k$는 $H_7\cdot(m+e_k)=H_7\cdot m+H_7\cdot e_k=0+v_k=v_k\neq 0$이므로 집단 A에 속하게 된다. 따라서 모든 참가자들이 집단 B의 메시지 하나 그리고 집단 A의 메시지 하나 중 집단 A의 메시지를 택하게 되어 첫 번째 참가자는 오답 $m+e_1$, 두 번째 참가자는 오답 $m+e_2$, $\cdots$, 일곱 번째 참가자는 오답 $m+e_7$을 말하게 됨을 수학적으로 정당화할 수 있다. 따라서 모든 참가자들이 오답을 이야기하게 됨을 학생들이 큰 어려움 없이 이해할 수 있다.

학생들이 일반화된 전략에 따른 결과를 파악한 후에는, 임의로 주어지는 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_7$이 집단 A에 속하는지 혹은 집단 B에 속하는지 여부가 길이 7 메시지 맞추기 게임의 승패 여부를 결정하는 중요한 요인임을 강조할 수 있게 된다.



[그림 III-10] 길이 7 메시지 맞추기 게임의 승패 여부

즉 집단 A의 원소의 수가 집단 B에 비해 클수록 승률이 높아지는데 각 집단의 원소의 수를 세기 위해 유한체 $\mathbb{Z}_2$ 위에서의 추상 선형대수학 이론, 특히 차원 정리가 실수체 $\mathbb{R}$ 혹은 복소수체 $\mathbb{C}$ 뿐만 아니라 임의의 체에 대하여 성립한다는 사실이 중요한 역할을 한다. 실제로 집단 B는 행렬 $H_7=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}$의 핵이기 때문에 $B=\ker(H_7)$의 원소의 개수는 $2^{\dim(\ker(H_7))}$이다. 더욱이 차원 정리에 의해 $\dim(\ker(H_7))=7-\operatorname{rank}(H_7)=7-3=4$가 성립함을 알 수 있다. 따라서 집단 B는 2^4, 즉 16개의 원소를 가지며 이는 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_7$가 임의로 주어지는 경우 참가자들이 패배할 확률이 $\frac{2^4}{2^7}=\frac{1}{8}$임을 의미한다. 다르게 말하자면 임의로 주어지는 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_7$가 집단 A에 속하여 참가자들이 승리할 확률은 $\frac{7}{8}$, 즉 87.5%임을 알 수 있다.

더 나아가 길이 3의 메시지 맞추기 게임 그리고 길이 7의 메시지 맞추기 게임에서의 최적 전략을 참가자 수가 더 많은 경우로 일반화 가능하다. 실제로 참가자 수가 15명, 31명 등 2^n-1명 꼴일 때 이에 대응하는 행렬 H_{2^n-1}을 이용하여 집단 A와 집단 B를 구성할 수 있고 최적 전략의 자연스러운 일반화를 학생들이 이해할 수 있다. 즉, 각 k번째 참가자가 정보가 주어지지 않은 k번째 숫자가 0일 경우의 메시지와 1일 경우의 메시지가 모두 집단 A에 속하면 통과를, 집단 A의 메시지 하나와 집단 B의 메시지 하나가 주어지는 경우에는 집단 A의 메시지를 택하는 최적 전략의 일반화 논의를 학생들이 자연스럽게 받아들일 수 있다. 이때 전략의 결과에 따른 승률은 중요하게 다루어져야 한다. 유한체 $\mathbb{Z}_2$위에서의 차원 정리에 의해 $\dim(\ker(H_{2^n-1}))=(2^n-1)-\operatorname{rank}(H_{2^n-1})=2^n-n-1$이 성립하므로 집단 B의 원소의 개수가 2^{2^n-n-1}임을 알 수 있다. 따라서 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_{2^n-1}$가 임의로 주어지는 경우 참가자들이 패배할 확률이 $\frac{2^{2^n-n-1}}{2^{2^n-1}}=\frac{1}{2^n}$임을 확인할 수 있다. 달리 말하자면 임의로 주어지는 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_{2^n-1}$가 집단 A에 속하여 참가자들이 승리할 확률은 $1-\frac{1}{2^n}$이고 참가자 수 n이 충분히 크면 1에 가까워짐을 알 수 있다.

정리하자면 수학적 모델링을 통해 3-카드 게임 최적 전략의 수학적 구조를 학생들이 행렬과 벡터를 바탕으

로 이해할 수 있으며, 그 수학적 구조를 길이 7과 길이 15 등의 메시지 맞추기 게임으로 일반화하고 유한체 위에서의 추상 선형대수학 이론을 바탕으로 최대승률을 계산할 수 있도록 설계되었다. 특히 7-카드 게임과 15-카드 게임의 최적 전략과 최대승률을 구하고 여러 차례의 활동을 통해 직접 경험할 수 있도록 설계하여 학생들이 수학의 실용성, 유용성 및 엄밀성을 경험할 수 있도록 구성하였다.

마. 응용활동 단계

응용활동 단계에서는 n-카드 게임 최적 전략의 수학적 구조를 바탕으로 오류정정코드(error-correcting code)를 탐구한다. 정보의 송신자 Alice가 수신자 Bob에게 특정 메시지를 전달하려 하는 일반적인 통신상황을 가정한다. 정보이론에서의 핵심 주제 중 하나는 통신 과정에서 정보에 오류가 생기는 경우에 주목하여 해당 오류를 탐지하고 수정하는 코드, 즉 오류정정코드를 개발하는 것이다. 예를 들어 Alice가 메시지 0010을 Bob에게 전달하려 하는데 통신 과정에서 네 번째 자리에 오류가 발생하여 Bob이 메시지 0011을 수신하는 경우를 고려하는 것이다. 이러한 현실적 맥락이 반영되어있는 구체적 예를 기초로 하여 길이 4인 메시지의 오류정정코드를 다루는 과정을 [그림 Ⅲ-11]과 같이 '인코딩(encoding) → 오류감지(error detection) → 오류정정(error correction) → 디코딩(decoding)' 총 4단계로 구성하여 지도한다. 맥락의 활용은 현실적 수학교육에서 강조하는 주요 특징 중의 하나이다(정영옥 외, 2018).

1단계 : 인코딩 → 2단계 : 오류감지 → 3단계 : 오류정정 → 4단계 : 디코딩

[그림 Ⅲ-11] 오류정정코드의 구성

1단계: 인코딩

교수자는 오류를 수정하기 위한 여유 공간이 필요하다는 맥락을 바탕으로 길이 4의 메시지를 길이 7의 메시지로 확장, 즉 인코딩할 필요가 있음을 시사한다. 이때 구체적인 메시지 $m=1010$이 주어졌을 때, 이를 길이 7의 메시지 $E(m)=x_1x_21x_4010$으로 변환하는데 미지수 x_1, x_2, x_4는 $H_7 \cdot E(m)=0$이 되도록, 즉 길이 7의 메시지 맞추기 게임에서의 수학적 구조를 활용하여 벡터 $E(m)$이 집단 B의 원소가 되도록 결정한다. 이때 행렬 H_7의 첫 번째 열, 두 번째 열, 네 번째 열이 각각 001, 010, 100이고 선형독립(linearly independent)이므로 x_1, x_2, x_4를 유일하게 결정할 수 있고, 실제로 $E(m)=1011010$임을 알 수 있다.

$$E(m)=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\1\\x_4\\0\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\1\\x_4\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4+1\\x_2\\x_1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1=1\\x_2=0\\x_4=1\end{cases} \Rightarrow E(m)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

[그림 Ⅲ-12] 메시지 1010을 인코딩하는 과정

2단계: 오류감지

Alice의 인코딩된 메시지 $E(m)$에 오류가 수반되어 Bob이 메시지 w를 수신하는 경우를 생각하자. 만약 첫 번째 자리에 오류가 생겼다면 Bob이 $w=0011010$를 수신하고 여섯 번째 자리에 오류가 생겼다면 Bob이 $w=1011000$을 수신하는데, 문제는 Bob이 기존의 인코딩된 메시지 $E(m)$이 무엇이었는지 모른다는 것이다. 따라서 Bob이 해야 할 첫 번째 역할은 수신한 메시지 w에 오류가 있는지 여부를 감지하는 것인데, 자연스러운 방법 중 하나는 인코딩된 메시지 $E(m)$이 집단 B에 속했으므로 수신한 메시지 w가 집단 B에 속하는지 확인하는 것이다. 즉 수신한 메시지 w가 집단 B에 속한다면 오류가 없었던 것으로, 그리고 집단 A에 속한다면 오류가 발생하였던 것으로 결론짓는다. 위의 예를 살펴보자면 오류가 수반된 메시지 0011010와 1011000 모두 집단 A에 속함을 어렵지 않게 학생들이 행렬과 벡터의 연산을 통해 확인할 수 있다.

3단계: 오류정정

한편 오류감지 단계에서는 오류 발생 여부만 살피는 것이므로 이를 정정하기 위해서는 보다 자세한 분석이 필요하다. Bob이 오류를 정정하기 위해 택할 수 있는 한 가지 구체적인 방법은 인코딩된 메시지 $E(m)$의 j번째 자리에 오류가 발생한 상황을 가정하는 것이다. 다시 말하자면 Bob이 수신한 메시지 w가 $w=E(m)+e_j$ 꼴이라 가정하고, 오류정정을 위해 j가 무엇인지 역추적을 하는 상황으로 이해할 수 있다. 이때 j를 알기 위해 수신한 메시지 w를 행렬 H_7와 곱하면 $H_7 \cdot w = H_7 \cdot E(m) + H_7 \cdot e_j = 0 + H_7 \cdot e_j = H_7 \cdot e_j$가 성립할 것을 기대할 수 있는데 이는 $H_7 \cdot w$가 행렬 H_7의 j번째 열이어야 함을 의미한다. 예를 들어 Bob이 $w=1011000$을 수신하였다고 가정하자. 이때 수신한 메시지에 오류가 있었을지, 만약 있었다면 몇 번째 자리에서 오류가 발생하였는지 알아내어 정정하기 위해 행렬 H_7과 w를 곱하는 과정을 거친다. 이때 $H_7 \cdot w = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$임을 알 수 있고, 110은 행렬 H_7의 여섯 번째 열이므로 w와 $E(m)+e_6$가 일치할 것으로 기대하고 양변에 e_6를 더해주어 $w' = w + e_6 = 1011010$이 인코딩된 메시지 $E(m)$과 일치하기를 바라는 것이다. 실제로 인코딩된 메시지 $E(m)$에 오류가 발생하지 않았거나 기껏해야 오류가 한 자리에서 발생하였을 경우에는 Bob의 오류 정정 기법이 적용되어 100% 확률로 오류를 감지하고 정정할 수 있다. 하지만 인코딩된 메시지 $E(m)$에서 오류가 두 자리 이상 발생하였다면 위의 방법으로는 극복할 수 없음을 강조하여야 한다.

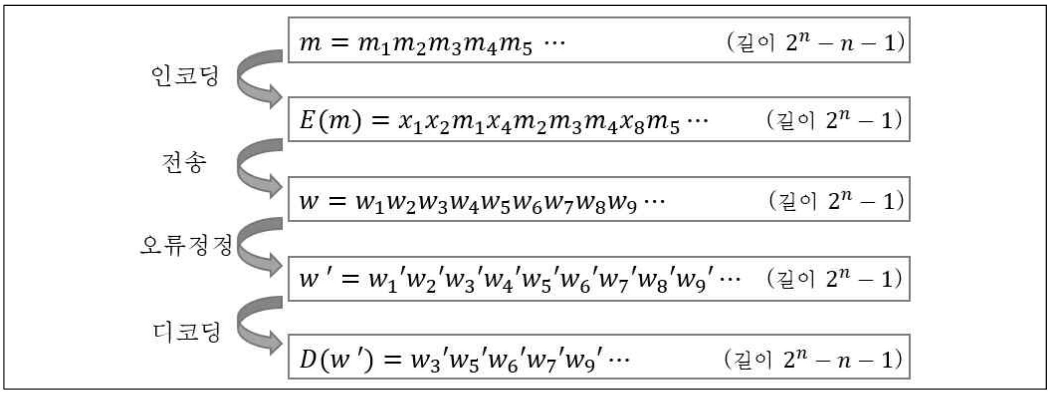
4단계: 디코딩

인코딩된 메시지 $E(m)$은 길이 7이지만 Alice의 메시지 m은 길이가 4였음을 상기하여 Bob은 오류감지와 오류정정을 거친 길이 7의 메시지 w'의 첫 번째, 두 번째, 네 번째 성분을 삭제하여 길이 4의 디코딩된 메시지 $D(w')$를 구한다. 예를 들어 오류정정 후의 메시지가 $w'=1011010$이었다면 디코딩된 메시지는 $D(w')=1010$이다. 최종적으로 Bob은 디코딩된 메시지 $D(w')$가 Alice의 메시지 m과 일치하기를 기대하는데, 이는 Alice의 인코딩된 메시지 $E(m)$ 위에서 기껏해야 한 자리에서 오류가 발생한 경우에는 항상 사실임을 다양한 예를 다룸으로써 학생들이 이해할 수 있다.

이 프로그램의 최종 심화활동으로서 길이 4인 메시지의 인코딩, 오류감지, 오류정정, 디코딩 방법을 일반화하여 길이 2^n-n-1의 메시지 m을 길이 2^n-1의 인코딩된 메시지 $E(m)$으로 변환할 수 있다. 길이 4 메시지 경우와의 차이는 n개의 변수 x_1, x_2, x_4, $\cdots$, $x_{2^{n-1}}$을 각각 1, 2, 4, $\cdots$, 2^{n-1}번째 자리에 추가한다는 점이다. 이때 길이 2^n-1의 메시지 맞추기 게임에서 살펴본 수학적 구조를 응용하여 $E(m)$이 집단 B의 원소가 되도록, 즉 $H_{2^n-1} \cdot E(m)=0$을 만족하도록 미지수 x_1, x_2, x_4, $\cdots$, $x_{2^{n-1}}$을 정한다. 예를 들어 $n=4$인 경우

길이 11인 메시지 $m=11100000110$을 길이 15인 메시지 $E(m)=x_1x_21x_4110x_80000110$으로 변환하는데, 이때 $E(m)$이 집단 B에 속해야 하므로 $E(m)=111011000000110$으로 결정하는 것이다.

한편 인코딩된 메시지 $E(m)$에 오류가 수반되어 Bob이 메시지 w를 수신한다고 하였을 때, 길이 4인 메시지 경우와 비슷하게 w가 집단 B에 속한다면 오류가 발생하지 않은 것으로, 그리고 집단 A에 속한다면 오류가 발생한 것으로 판단한다. 또한 집단 A에 속하는 경우에는 $H_{2^n-1}\cdot w$가 행렬 H_{2^n-1}의 몇 번째 열인지 확인하여 수정된 메시지 $w'=w+e_j$를 구하고 마지막으로 1, 2, 4, $\cdots$, 2^{n-1}번째 자리의 숫자들을 삭제한 디코딩된 메시지 $D(w')$를 구한다. 이때 Alice의 메시지 m과 Bob의 디코딩된 메시지 $D(w')$이 일치하기를 바라는데 실제로 인코딩된 메시지 $E(m)$위에서 오류가 기껏해야 한 자리에서 발생한 경우에는 항상 $m=D(w')$이 성립한다. 이러한 과정을 종합적으로 살펴봄으로써 학생들이 n-카드 게임을 통해 파악한 수학적 구조를 응용하여 정보이론적 실세계 맥락을 살펴볼 수 있고, 또한 오류정정코드의 작동원리를 이해함으로써 수학의 실용성과 유용성을 직접 경험할 수 있다.



[그림 III-13] 길이 2^n-n-1인 메시지 m의 오류정정코드

2. 프로그램 적용 및 논의

본 연구에서 개발한 프로그램의 기본활동 단계(1단계)는 본인을 제외한 참가자들의 모자 색을 통해 자신의 모자 색을 추정하는 모자 게임을 변형한 n-카드 게임을 통해 학생들이 쉽게 접근 가능한 현실적 맥락을 도입하였으며 학생들의 흥미와 수학적 탐구심을 유발하였다. 이경화 (2016)에 따르면 학생의 현실 맥락과 결합되어 있는 형태로 수학적 개념, 사고 방법을 창조할 수 있는 기회를 제공하는 것은 학생들의 수학적 창의성 함양에 도움이 된다. 또한 협력 활동으로서의 의미를 분명히 하고, 학습 동기를 제공할 수 있었다. 조의 구성에 따라 협의가 잘 이루어지지 않는 경우도 있었는데, 교수자가 개입하여 게임을 다시 진행해보기를 제안하거나 학생들의 다양한 사고를 촉진시키기 위한 적절한 발문을 하였다. 활발한 집단 내 의사소통을 바탕으로 학생들의 문제해결 과정과 발산적 사고 및 추론 등을 위한 도움을 직·간접적으로 제공할 수 있었다. 일부 학생들은 최대승률을 탐구하는 과정에서 전확률과 조건부확률의 차이를 처음으로 접하고 개념화하기도 하였다.

수학적 정당화 단계(2단계)에서는 각 전략에 따른 정답과 오답 간의 대칭성을 추론할 기회를 제공함으로써 논리력 함양이 가능하였다. 또한 연립부등식을 응용하여 3-카드 게임의 승률이 항상 75% 이하를 정당화하여 실세계 복합적 상황에 대한 절대적 결론이 도출되는 과정을 경험할 수 있는 기회를 제공함으로써 수학의 유용성

을 강조할 수 있었다. 더욱이 같은 논리가 4-카드 게임으로 확장되어 임의의 전략에 따른 승률이 항상 75% 이하라는 결론을 얻을 수 있음을 확인하는 과정을 통해 수학의 유용성과 일반성을 강조할 수 있었다. 일부 학생들은 학습한 논증 구조를 일반화하여 n-카드 게임의 임의의 전략에 따른 승률이 항상 $\frac{n}{n+1}$이하임을 직접 증명하기도 하였다.

수학적 모델링과 일반화 단계(3단계)에서 흰색과 검은색을 각각 숫자 0과 1로 기호화하고 3-카드 게임과 길이 3 메시지 맞추기 게임을 대응시키는 과정은 실세계 상황의 모델링을 통해 3-카드 게임의 수학적 구조를 밝히는 역할을 하며 활동 기반 수업이 유지될 수 있도록 하는 역할을 한다. 동시에 길이 7 혹은 15의 메시지 맞추기 게임으로의 일반화를 위한 자연스러운 맥락을 제공한다. 수학적 모델링의 교육적 효과는 이미 여러 선행연구에서 관찰되었으며(고창수, 오영열, 2015; 유홍규, 윤종국, 2017; 정혜윤, 이경화, 2019), 본 연구에서도 수학적 모델링 과정은 학생들의 n-카드 게임의 구조를 수학적으로 이해를 돕고, 창의적 문제해결력을 함양 가능케 하는 역할을 한다. 일반화 단계에서 다루는 이진법과 벡터, 행렬은 2015 개정 중등교육과정에 포함되어 있지 않아 학생들에게는 생소한 개념들이지만, n-카드 게임의 수학적 구조를 탐구하기 위한 수준으로 지도하기에는 큰 어려움이 없다. 벡터의 도입으로 학생들은 차원 개념을 이해하고, 참가자 수의 증가가 고차원적 문제로 환원됨을 이해하였다. 행렬과 벡터 등의 키워드에 대하여 프로그램 참여 영재 학생들은 우호적인 경향이 있었다. 심화활동 단계에서의 수학적 결론을 도출하는 과정 중 요구되는 심화적 차원 개념은 중등 수학 수준에서 온전히 다루어지기에는 표현의 한계가 있을 수 있는데, 이러한 문제를 해소하기 위해 교수자가 낮은 차원의 예시부터 다양한 상황을 제시하여 학생들 스스로의 유추를 통해 수학적 개념을 이해할 수 있도록 하였다.

또한 학생들은 패턴의 일반화를 경험하게 된다. 길이 3 혹은 7의 메시지 맞추기 게임을 진행할 때, 교수자는 학생들이 게임에서 승리하는 상황과 패배하는 상황 모두 경험할 수 있도록 의도적으로 활동을 구성한다. 이때 학생들은 승리하는 경우에는 단 한 명의 참가자만 정답을 말하고 나머지 참가자들은 모두 통과를 선택하는 것을 경험하고, 패배하는 경우에는 모든 참가자가 원래 메시지와는 다른 오답을 말하게 되는 것을 경험하게 된다. 학생들은 길이 3인 경우와 길이 7인 경우의 메시지 맞추기 게임에서 동일한 패턴이 발생함을 활동을 통해 경험한 후에는, 게임의 참가자 수가 늘어나도 동일한 패턴이 반복될 수 있다는 일반화된 추측을 하는 경향을 보였다. Lannin (2005)에 의하면 일반화를 위한 전형적인 패턴 활동은 학생들로 하여금 다양한 규칙을 찾아낼 수 있게 만든다. Lee (1996)은 패턴의 일반화 단계 과정에서 학생들이 경험할 수 있는 어려움을 인지 수준, 언어화 수준, 기호화 수준으로 구분하였는데 본 프로그램에서의 학생들은 승리하는 경우와 패배하는 경우 정답과 오답 양상의 일반화를 이해하고 설명하는 과정에서 인지 수준 혹은 언어화 수준의 어려움을 보이지 않았다.

심화활동 단계(4단계)에 이르러서는 문제를 스스로 해결하려는 경우가 종종 있던 프로그램의 초반부와는 달리 학생들의 협력 과정이 수월하였다. 학생들은 집단 내 소통을 통한 결론 도출에 초점을 두고, 문제를 협력하여 해결하려는 경향을 보였다. 또한 1단계에서 실세계 상황을 직접 논의할 때와는 달리 기호를 바탕으로 일반화된 상황을 수학적으로 이해하려는 경향을 보였다. 교수자의 개입 없이도 많은 가설을 서로 제안하였으며, 타당성을 보다 수학적으로 표현하고 정당화하려는 경향을 보였다.

응용활동 단계(5단계)에서 학생들은 교수자로부터 한 자리에 오류가 발생한 메시지 w를 전달받고, 행렬과 벡터의 곱연산을 통해 w가 집단 A에 속하는 것을 확인한 경우, 즉 $H_{2^n-1}\cdot w \neq 0$일 때 인코딩된 메시지 $E(m)$이 집단 B에 속하였음을 상기함으로써 오류 감지가 정상적으로 이루어졌음을 자연스럽게 이해하였다. 또한 학생들은 $H_{2^n-1}\cdot w$가 행렬 H_{2^n-1}의 몇 번째 열인지 구하고, 이를 j번째 열이라 하였을 때 정정한 메시지 $w' = w + e_j$가 교수자의 원래 메시지와 일치함을 확인함으로써 수학의 실용성을 경험할 수 있었다. 이때 두 자리 이상의 오류가 발생하는 경우의 오류정정 가능성에 대한 질문이 많았으며, 이러한 순간들은 실세계 상황에서

발생가능한 복잡한 오류 상황의 존재와 정보이론의 주요 연구주제로서의 오류정정코드를 강조하여 학습 동기를 강화하는 기회를 교수자에게 제공하였다.

기본활동단계(1단계)와 수학적 정당화 단계(2단계)에서 2015 개정 수학과 중등교육과정에서의 연립부등식과 경우의 수, 확률 개념이 활용된다. 또한 수학적 모델링과 일반화 단계(3단계)에서 다루어지는 내용이 2015 개정 교육과정에서 진로 선택 과목으로 신설된 <인공지능 수학>과 긴밀히 관련된다. 실제로 행렬과 벡터를 관련 학습 요소로 구체적으로 소개하고 있으며, 텍스트나 이미지 자료를 숫자 0과 1 두 수로만 표현하여 자료를 해석하는 내용을 다루는 등(홍진곤 외, 2021; 황선욱 외, 2021) 교육과정 내에서 다루어짐을 살펴볼 수 있다.

프로그램 전반에서 학생들의 집단 내 상호작용은 대단히 중요한 역할을 하는데, 이를 집단창의성 발현을 위한 세 유형의 상호작용(상호보완적, 갈등 기반, 메타인지적 상호작용)의 관점에서 살펴볼 수 있다. 프로그램의 1단계에서 모자 게임의 규칙을 익히고, 최적 전략을 찾기 위해 게임을 실제 진행해보는 과정에서 학생들 간의 상호작용이 특히 활발히 이루어졌다. 협력하여 최적 전략과 최대승률을 탐색하는 공통 과제를 바탕으로, 공동전략을 세우기 위한 상호보완적 상호작용이 활발히 이루어졌다. 한편 갈등 상황이 발생하는 주요 요인은 승률이다. 논의의 타당성을 판단할 수 있는 절대적 기준이기 때문이다. 가장 두드러지는 갈등 상황은 3-모자 게임에서 탐구한 최적 전략을 자연스럽게 확장하여 4-모자 게임에 적용하였을 때, 3-모자 게임에서의 최대승률 75%보다 낮은 승률이 얻어지는 것을 인지하였을 때이다. 이러한 갈등 상황을 해결하기 위해 학생들은 기존 관점을 전환해보거나 기존 수학적 모델을 검증, 보완하는 등의 토의를 하며 갈등 기반 상호작용을 하였다. 마지막으로 학생들은 게임 참가자의 수가 3명, 4명, 7명, 15명과 같이 증가할 때마다 각 게임에서의 최대승률을 수학적으로 계산하고 정당화하는 과정을 수행하였는데, 이를 위해 앞서 이루어진 토의들을 종합적으로 비판, 검증하여 승률을 구해보며 메타인지적 상호작용을 활발히 진행하였다. 또한 $n=2^k-1$인 경우의 n-모자 게임에서 최적 전략과 최대승률을 일반화할 수 있는데, 이때 n-모자 게임을 종합적으로 이해하기 위한 메타인지적 상호작용이 활발히 이루어지고 집단적 사고의 폭이 확장됨을 살펴볼 수 있었다. 이때 학생들의 다양한 상호작용을 유도하기 위해서는 적절한 발문을 준비하고 허용적 수업 분위기를 조성하여 학생들의 다양한 확산적 사고를 촉진하는 등, 교수자의 역할이 중요했다. 더욱이 다인수 학급에 본 프로그램을 적용할 때에는 토론에서 배제되는 학생들이 없는지 확인하고, 사전에 개별 피드백을 적절히 준비하는 등의 교수자의 세밀한 사전 준비가 필요하다.

교육프로그램이 종료된 후 다수의 학생들이 프로그램에서 사용하였던 카드를 제공해줄 것을 요청하였고, 이를 가져가 가족과 친구들에게 카드 게임을 소개하였다고 한다. 이러한 사실들을 바탕으로, 개발된 프로그램이 학생들에게 수학적 흥미를 유발했고 수학의 가치에 대해 시사점을 주었다고 짐작해볼 수 있다.

Ⅳ. 결론 및 제언

본 연구는 모자 게임을 바탕으로 학생들에게 융합적 사고능력과 창의성을 함양할 수 있도록 총 5단계로 구성하여 개발한 수학 정보과학 융합 교육프로그램을 제안한다. 2020년과 2021년, 2년 동안 교육프로그램을 개발, 적용 및 보완을 반복하였다. 기존의 수학적 모델링을 활용한 융합 교육프로그램들이 많은 경우 짧은 시간의 모델링 수업에 초점이 맞추어져 있었음(정혜윤 외, 2018, 재인용)을 고려하면, 본 연구는 10차시에 걸쳐 지도 가능한 프로그램을 개발했다는 점에서 시사점이 있다. 프로그램 전반에 걸쳐 학생들이 실세계 현상을 이해하고, 수학적 모델링 과정을 활용하여 실세계 현상의 수학적 원리와 구조를 이해할 수 있도록 설계하였다. 또한 협력 기반 문제해결 활동들을 통해 수학적 모델을 이해하고 적용하는 기회를 제공하여 집단창의성을 포함한 다양한 수학 교과 역량이 발달할 수 있도록 수업 요소들을 구성하였다. 2015 개정 중등교육과정에 포함되지 않은 벡터, 행렬 그리고 $\mathbb{Z}_2$-모듈 연산 등의 수학적 개념을 다룰 때에는 엄밀한 정의를 강조하기보다는 다양한 예시를 제시하여

학생들이 유추적 사고를 통해 이해할 수 있도록 지도하는 것이 효과적일 수 있다.

본 연구에서 개발한 프로그램의 교육적 의의를 정리해보면 다음과 같다.

첫째, 수학적 의사소통 능력을 함양할 수 있다. 학생들이 교수자 또는 또래 학생들과의 활발한 의사소통을 반복적으로 경험할 수 있도록 프로그램을 설계하였다. 모자 게임의 규칙과 전략 및 승률에 대해 토의를 하고, 자신의 주장을 수학적 모델을 활용해 타인에게 논리적으로 설명하는 기회가 제공된다. 많은 선행지식이 요구하지 않도록 프로그램 과제를 개발하여 자신의 주장을 자유롭게 표현하기에 적합한 환경을 제공하였다. 이러한 프로그램 설계는 미래 사회의 핵심 역량인 의사소통 능력을 함양하기 위함이다. 의사소통 능력은 2015 개정 수학과 교육과정에서도 강조하고 있는 협력적 문제해결의 관점에서도 중요한 역량이다(여승현 외, 2021). 프로그램 내의 의사소통 과정에서 학생들은 다양한 발산적 사고와 수렴적 사고를 경험하며 문제를 해결하였는데, 이때 개인보다 뛰어난 집단 수준의 창의적 문제해결력을 발휘하였다. 실제로 4-모자 게임 활동에서 대다수 학생들이 3-모자 게임에서의 최적 전략을 적용하였을 때 기대보다 낮은 승률을 얻게 됨을 확인하며 혼란을 느낀다. 하지만 집단 내 상호작용을 통해 3-모자 게임의 경우와는 달리 비대칭적 전략을 활용해 최대승률을 달성함을 확인하는 집단 창의성을 발휘할 수 있었다. 교육은 개인보다는 집단을 강조하고 집단을 통해 서로의 지식을 경험하는 것을 중요하게 생각한다는 점에서(김민경 외, 2020) 의의가 있다.

둘째, 실세계 맥락에서 수학의 가치를 경험하는 기회를 제공한다. 실세계 상황인 3-카드 게임과 4-카드 게임의 최적 전략과 최대승률을 탐구하여 추론하는 1단계 활동과 추론한 바에 대해 수학적으로 정당화된 절대적 결론을 제공하는 2단계 활동은 수학의 유용성을 경험하는 기회를 제공한다. 또한 3단계 활동은 적은 인원수에서 발견하고 정당화한 전략의 수학적 구조를 일반적인 경우에 적용하고 탐구하여 수학적 연결성을 경험하는 기회를 제공한다. 수학적 연결성은 수학적 개념과 절차에 대한 이해를 확장·심화시키고, 문제해결력을 향상시키며, 수학의 가치를 이해하고 실생활과 다양한 학문 분야에서 수학을 활용할 수 있도록 하는 수학교육의 중요한 요소이다(장혜원, 2016). 또한 1단계부터 4단계까지의 과정에서 학습하는 n-카드 게임의 수학적 구조를 응용하여 기초 오류정정코드를 개발하고, 이의 원리를 이해하고 적용하여 실제로 오류 발생을 감지 및 정정하는 기회를 제공함으로써 수학의 실용성을 경험하도록 프로그램을 구성하였다.

마지막으로 교사들의 접근성을 고려하여 코딩을 수반하지 않는 방식으로 최근 중요성이 강조되는 수학 정보 융합을 위한 교육프로그램을 개발하였다. 코딩을 수반하지 않더라도 3단계에서의 n-카드 게임의 수학적 모델링을 바탕으로 정보이론의 핵심 주제인 오류정정코드를 5단계에서 다룰 수 있도록 구성하였고, 벡터와 행렬을 바탕으로 인코딩, 오류감지, 오류정정, 디코딩의 수학적 원리와 구조를 명확히 파악할 수 있도록 설계하였다. 이러한 구성 및 설계는 코딩 교육을 전문적으로 받지는 않았지만 수학 정보 융합 교육에 관심을 갖는 교사들의 접근성을 높이기 위함이다. 본 프로그램이 미래 사회를 이끌어갈 핵심 인재 양성에 보탬이 되기를 바란다.

본 연구에서는 2020년과 2021년, 2년간 저자들이 S대 과학영재교육원 중학생들, S대 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들을 직접 지도하여 학생들에게 다양한 수학적 역량 함양 가능성을 확인하고 연구, 적용 및 보완을 반복하여 개발하였지만, 일반 학생 대상으로의 적용 가능성을 탐색하지는 못하였다. 교수실험과 상세한 회고 및 분석을 바탕으로 한 후속 연구가 이루어져 학교 현장으로의 적용 가능성을 탐색하기를 제언한다. 또한 본 연구에서는 창의성이 증진되었는지에 대한 상세한 분석 결과를 제시하지 않았는데, 적정 수의 프로그램 참여자가 있다면 수치적인 데이터와 문답 및 인터뷰 등을 바탕으로 한 양적·질적 연구가 이루어질 수 있을 것이라 기대한다. 특히 창의성의 하위 요소인 유창성, 융통성, 엄밀성 등에 대해 프로그램 참여 전후의 변화를 분석하여 파악할 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

강한별・이미숙・조한혁 (2021). 진화전략(Evolution Strategy)을 활용한 최대·최소 탐구과정 및 코딩환경 연구, 대한수학교육학회지 수학교육학 연구, 31(1), 109-130.

Kang, H. B., Lee, M. S., & Cho, H. H. (2021). Coding Environment and Exploration Curriculum for Max-Min Optimizations with an Evolution Strategy. *Journal of Educational Research in Mathematics,* 31(1), 109-130.

고상숙・한혜숙・김현주・이동근・신동조・이창연 (2020). 수학적 모델링에 기반한 미래형 수학 교재 개발. 교육문화연구, 26(5), 665-690.

Choi-Koh, S. S., Han, H. S., Kim, H. J., Lee, D. G., Shin, D. J., & Lee, C. Y. (2020). A study on the textbook development based on mathematical modeling. *Journal of Education & Culture,* 26(5), 665-690.

고창수・오영열 (2015). 수학적 모델링 활동이 수학적 문제해결력 및 수학적 성향에 미치는 영향. 한국초등수학교육학회지, 19(3), 347-370.

Ko, C. S., & Oh, Y. Y. (2015). The Effects of Mathematical Modeling Activities on Mathematical Problem Solving and Mathematical Dispositions. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea,* 19(3), 347-370.

교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책8]. 교육부.

Ministry of Education (2015). *Mathematics curriculum*. Notification of the Ministry of Education No. 2015-74. [Vol. 8]. Author.

교육부 (2017). 과학ㆍ수학ㆍ정보 교육 진흥법. 교육부. [법률 제14903호].

Ministry of Education (2017). *Act for the Promotion of Science, Mathematics and Information Education.* [Act No. 14903].

교육부 (2020a). 생각하는 힘으로 함께 성장하고 미래를 주도하는 수학교육 종합 계획(안). [2020년~2024년]

Ministry of Education (2020a). *Mathematics education comprehensive plan to grow together and lead the future with the power of thinking* [2020-2024]. Press release of Ministry of Education. https://www.moe.go.kr/boardCnts/view.do?boardID=294&boardSeq=80718&lev=0&searchType=null&statusYN=W&page=1&s=moe&m=020402&opType=N

교육부 (2020b). 제3차 수학교육 종합계획. 교육부. 2020. 05. 24. 보도자료.

Ministry of Education (2020b). *The 3rd Mathematics Education Comprehensive Plan.* Press release of Ministry of Education. https://www.moe.go.kr/boardCnts/view.do?boardID=294&boardSeq=80718&lev=0&searchType=null&statusYN=W&page=1&s=moe&m=020402&opType=N

교육부 (2020c). 인공지능, 학교 속으로! - 인공지능(AI), 초등 수학 공부 도우미로, 고교 진로 선택 과목으로 도입. 교육부. 2020. 09. 14. 보도자료.

Ministry of Education (2020c). *Artificial intelligence, into school! - Introduced artificial intelligence (AI) as an elementary school math study assistant and high school career electives.* Press release of Ministry of Education. https://www.moe.go.kr/boardCnts/view.do?boardID=294&boardSeq=81918&lev=0&searchType=null&statusYN=W&page=1&s=moe&m=020402&opType=N

권오남・주미경 (2005). 탐구 지향 미분방정식 교수-학습의 효과 분석. 수학교육, 44(3), 375-396.

Kwon, O. N., & Ju, M. K. (2005). Effects of Inquiry-oriented Differential Equations Instruction Based on the Realistic Mathematics Education. *The Mathematical Education,* 44(3), 375-396.

김민경・이지영・김동희 (2020). (체화된 앎(Embodied Understanding) 실현을 위한) 창의·융합 수학 수업의 개발과 실천적 탐구. 경문사.

Kim, M. K., Lee, J. Y., & Kim, D. H. (2020). *Development and practical exploration of creative and convergent mathematics classes (for realizing embodied understanding).* Kyungmoon.

김선희 (2005). 문제 중심 학습의 방법으로서 수학적 모델링에 대한 고찰. 학교수학, 7(3), 303-318.

Kim, S. H. (2005). Consideration of Mathematical Modeling as a Problem-based Learning Method. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics*, 7(3), 303-318.

김성원 · 이영준 (2021). 과학·수학·정보 융합 교육 프로그램이 중학생의 컴퓨팅 사고력에 미치는 효과. 컴퓨터교육학회 논문지, 24(3), 1-10.

Kim, S. W., & Lee, Y. J. (2021). Effects of Science, Mathematics, and Informatics Convergence Education Program on Middle School Student's Computational Thinking. *Journal of Korean Association of Computer Education*, 24(3), 1-10.

김진숙 (2016). 제4차 산업혁명과 교육의 역할. 월간교육. 2016년 7월호, 104-113.

Kim, J. S. (2016). *The role of the fourth industrial revolution and education.* Monthly Education (2016.07.), 104-113.

김혜미 · 한선영 (2018). 수학 문제해결 역량 평가도구 개발. 학교수학, 20(1), 83-105.

Kim, H. M., & Han, S. Y. (2018). A Study on the Development of the Assessment Toolfor Mathematical Problem Solving Competency. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics*, 20(1), 83-105.

나귀수 · 박미미 · 김동원 · 김연 · 이수진 (2018). 미래 시대의 수학교육 방향에 대한 연구. 수학교육학연구, 28(4), 437-478.

Na, G. S., Park, M. M., Kim, D. W., Kim, Y., & Lee, S. J. (2018). Exploring the Direction of Mathematics Education in the Future Age. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 28(4), 437-478.

류성림 (2001). 그래프 이론을 활용한 초등학교 영재교육 프로그램 개발. 한국수학교육학회 학술발표논문집, 2001, 23-44.

Ryu, S. R. (2001). Development of elementary school gifted education program using graph theory. *Journal of Korean Society Mathmatics Education,* 2001, 23-44.

류성림 · 이종학 · 윤마병 · 김학성 (2018). 초등학교 영재교육을 위한 수학· 과학 중심의 융합교육 프로그램 개발. 한국융합학회논문지, 9(10), 217-228.

Ryu, S. R., Lee, J. H., Yoon, M. B., & Kim, H. S. (2018). Development of Convergence Education Program for Elementary School Gifted Education Based on Mathematics and Science. *Journal of the Korea Convergence Society,* 9(10), 217-228.

박만구 (2009). 수학교육에서 창의성의 개념 및 신장 방안. 수학교육 논문집, 23(3), 803-822.

Park, M. G. (2009). The Concept of Creativity and Its Enhancement in Mathematics Education. *Communications of Mathematical Education*, 23(3), 803-822.

박선영 · 한선영 (2018). 수학적 모델링 과정을 반영한 교과서 문제 재구성 예시 및 적용. 수학교육, 57(3), 289-309.

Park, S. Y., & Han, S. Y. (2018). Reconstruction and application of reforming textbook problems for mathematical modeling process. *The Mathematical Education*, 57(3), 289-309.

박진형 (2017). 수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고 촉진 사례 연구. 수학교육학연구, 27(1), 69-88.

Park, J. H. (2017). Fostering Mathematical Creativity by MathematicalModeling. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 27(1), 69-88.

박진형 · 김동원 (2017). 초등 영재학생들의 원순열 과제 해결 분석. 한국초등수학교육학회지, 21(2), 365-389.

Park, J. H., & Kim, D. W. (2017). Analysis on elementary gifted students' inquiries on combinatoric tasks. *Journal of elementary mathematics education in Korea*, 21(2), 365-389.

성지현 · 이종희 (2017). 수학영재의 집단창의성 발현 모델 개발. 수학교육학연구, 27(3), 557-580.

Sung, J. H., & Lee, C. H. (2017). A Study on the Manifestation Process ModelDevelopment of Group Creativity among Mathematically Gifted Student. *Journal of Educational Research in Mathematics,* 27(3), 557-580.

신기철・서보억 (2019). 수학·정보 융합교육을 위한 코딩과 연계한 교수학습 자료 개발 연구. 과학교육연구지, 43(1), 17-42.

Shin, G. C., & Seo, B. U. (2019). A Study on Development of Teaching & Learning Materials related to Coding for Convergence Education Integrating Mathematics and Information. *Journal of Science Education*, 43(1), 17-42.

여승현・서희주・한선영・김진호 (2021). 초등 수학교과서의 문제해결 역량 및 과제 유형 분석: 수와 연산영역의 도전/생각 수학과 탐구 수학을 중심으로. 수학교육, 60(4), 431-449.

Yeo, S. H., Suh, H. J., Han, S. Y., & Kim, J. H. (2021). Analysis of problem solving competency and types of tasks in elementary mathematics textbooks: Challenging/Thinking and inquiry mathematics in the domain of number and operation. *The Mathematical Education*, 60(4), 431-449.

유홍규・윤종국 (2017). 영재교육을 위한 수학적 모델링 프로그램의 개발 및 적용 :보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할을 중심으로. 수학교육 논문집, 31(3), 257-277.

Yu, H. G., & Yun, J. G. (2017). Development and application of program for mathematically gifted students based on mathematical modeling: focused on Voronoi diagram and Delaunay triangulation. *Communications of Mathematical Education,* 31(3), 257-277.

이경화 (2015). 수학적 창의성의 눈으로 본 수학교육 수학적 창의성. 경문사.

Lee, K. H. (2015). *Mathematical Creativity: Mathematics education through the eyes of mathematical creativity.* Kyungmoon.

이경화 (2016). 현실적 수학교육 이론의 재음미: 수학적 창의성 교육의 관점에서. 수학교육학연구, 26(1), 47-62.

Lee, K. H. (2016). Reanalysis of Realistic Mathematics EducationPerspective in Relation to Cultivation of MathematicalCreativity. *Journal of Educational Research in Mathematics,* 26(1), 47-62.

이대현 (2019). 직관적・형식적 탐구 기반의 문제해결식 접근법에 따른 수학 문제해결 지도 방안 탐색. 한국수학사학회지, 32(6), 281-299.

Lee, D. H. (2019). A Study on the Mathematical Problem Solving Teaching based on the Problem solving approach according to the Intuitive and the Formal Inquiry. *Journal of the Korean Society for History of Mathmatics*, 32(6), 281-299.

이상구・이재화・함윤미 (2020). 인공지능(Artificial Intelligence)과 대학수학교육. 수학교육 논문집, 34(1), 1-15.

Lee, S. G., Lee, J. H., & Ham, Y. M. (2020). Artificial Intelligence and College Mathematics Education. *Communications of Mathematical Education,* 34(1), 1-15.

임철일 (2019). 미래 사회와 교육을 위한 교육공학 연구 및 실천 영역의 재조명. 교육공학연구, 35(2), 253-287.

Lim, C. I. (2019). Redirecting the Research and Practice of Educational Technology for Future Society and Education. *Journal of Educational Technology,* 35(2), 253-287.

장혜원 (2016). 학교수학과 수학적 연결성. 경문사.

Jang, H. W. (2016). *Mathematical Connectivity with School Mathematics.* Kyungmoon.

정영옥 (2005). 교과과정 개발을 위한 기초로서의 개발연구에 대한 고찰. 수학교육학연구, 15(3), 353-374.

Chong, Y. O. (2005). Reflections on Developmental Research as a Research Methodology. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 15(3), 353-374.

정영옥・이경화・나귀수 (2018). 현실적 수학교육의 이론과 실제. 교우사.

Chong, Y. O., Lee, K. H., & Na, G. S. (2018). *Realistic mathematics education.* Kyowoo.

정인우・조한혁 (2020). 3 차원 좌표계 기반 코딩환경을 활용한 수학적 창의성 발현 방안: 코딩과제 설계 및 코드표현의 분석을 중심으로. 학교수학, 22(1), 161-181.

Chung, I. W., & Cho, H. H. (2020). Fostering Mathematical Creativity through the VariousMathematical Expressions in the 3D Coordinate SystemBased Coding Environment: Focusing on Designing Coding Tasks and Analyzing

CodeExpressions. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 161-181.

정진환 · 조한혁 (2020). 코딩교육 명령문의 수학화: 대수교육을 중심으로. 수학교육학연구, 30(1), 131-151.

Jong, J. H., & Cho, H. H. (2020). Mathematising of Coding Education Command: Focusing on Algebra Education. *Journal of Educational Research in Mathematics,* 30(1), 131-151.

정혜윤 · 이경화 · 백도현 · 정진호 · 임경석 (2018). 수학적 모델링 관점에 의한 <수학과제 탐구> 과목용 과제의 설계. 학교수학, 20(1), 149-169.

Jung, H. Y., Lee, K. H., Baek, D. H., Jung, J. H., & Lim, K. S. (2018). Design for <Mathematical Task Inquiry> Subject's TaskBased on the Mathematical Modeling Perspective. *Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics*, 20(1), 149-169.

정혜윤 · 이경화 (2019). 집단창의성 발현을 위한 수학적 모델링 수업의 설계. 수학교육학연구, 29(1), 157-188.

Jung, H. Y., & Lee, K. H. (2019). Instructional Design of Mathematical Modeling for Group Creativity. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 29(1), 157-188.

조무정 · 진석언 (2016). 초등학교 과학 영재학생의 집단 창의성 발현과정 경험에 대한 현상학적 연구. 창의력교육연구, 16(2), 35-59.

Cho, M. J., & Jin, S. U. (2016). A Phenomenological Study on Group Creativity Emerging Precess Experiences of Gifted Students in Elementary Schools. *Journal of Creativity Education*, 16(2), 35-59.

최경아 (2017). 수학 교과 역량 관점에서의 수학적 모델링에 관한 선행 연구 탐색. 한국학교수학회논문집, 20(2), 187-210.

Choi, K. A. (2017). A study on literature review of mathematical modeling in mathematical competencies perspective. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, 20(2), 187-210.

최근배 · 안선영 (2005). 초등 영재교육에 적용 가능한 이산수학 프로그램 개발 연구. 수학교육 논문집, 19(1), 167-189.

Choe, G. B., & An, S. Y. (2005). Development of Discrete Mathematics Program Applicable to Elementary School Gifted Education. *Communications of Mathematical Education,* 19(1), 167-189.

최윤석 · 배종수 (2004). 초등 수학에서 문제 만들기를 적용한 수업이 수학적 문제 해결력 및 태도에 미치는 효과. 한국초등수학교육학회지, 8(1), 23-43.

Choi, Y. S., & Bae, J. S. (2004). Effects of Teaching with Problem Posing on Mathematical Problem Solving Ability and Attitude in Elementary School Mathematics. *Journal of Elementary Mathmatics Education in Korea*, 8(1), 23-43.

한선영 (2019). 예비 수학 교사들의 수학적 모델링 및 그 교육적 활용에 대한 인식. 수학교육, 58(3), 443-458.

Han, S. Y. (2019). Pre-service mathematics teachers' perceptions on mathematical modeling and its educational use. *The Mathematical Education*, 58(3), 443-458.

한정민 · 박만구 (2010). 수학적 창의성 신장을 위한 교사의 발문 특성 연구. 한국초등수학교육학회 연구발표대회 논문집, 219-235.

Han, J. M., & Park, M. G. (2010). A Study on the Characteristics of Teacher's Questionnaire for Mathematical Creativity Enhancement. *Journal of the Research Presentation Conference of the Korean Society of Mathematical Education*, 219-235.

홍진곤 · 박정숙 · 설정수 · 오세준 · 박민규 · 박성훈 (2021). <인공지능 수학>, 천재교과서.

Hong, J. G., Park, J. S., Seol. J. S., Oh, S. J., Park, M. G., & Park, S. H. (2021). *<Artificial Intelligence Mathematics>*. Chunjae Textbook.

황선욱 · 권성훈 · 정두섭 · 박상의 · 홍창섭 (2021). <인공지능 수학>, 미래엔.

Hwang, S. U., Kwon, S. H., Jeong, D. S., Park, S, U., & Hong, C. S. (2021). *<Artificial Intelligence Mathematics>*.

Mirea-N.

Alon. N., Hassidim, A., Lubetzky, E., Stav, U., & Weinberg, A. (2008). *Broadcasting with side information.* The 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp. 823 - 832.

Asempapa, R. S. (2015). Mathematical modeling: Essential for elementary and middle school students. *Journal of Mathematics Education*, 8(1), 16-29.

Bar-Yossef, Z., Birk, Y., Jayram, T. S., & Kol, T. (2006). *Index coding with side information.* The 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp. 197 - 206.

Birk, Y. & Kol, T. (2006). Coding-on-demand by an informed source (ISCOD) for efficient broadcast of different supplemental data to caching clients. *IEEE Trans. Inform. Theory,* 52, pp. 2825 - 2830.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 37-68.

Blum, W. (2001). *Denksport für Hutträger. Die Zeit,* May, 3, 8.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45-58.

Butler, S., Hajiaghayi, M., Kleinberg, R., & Leighton, T. (2008). Hat guessing games. *SIAM J. Discrete Math.* 22(.2), 592 - 605.

Chandra, A., Furst, M., & Lipton, R. (1983). *Multiparty protocols.* The 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), pp. 93 - 99.

Cox, C., De Silva, J., DeOrsey, P., Kenter, H. J., Retter, T. & Tobin, J. (2015). How to make the perfect fireworks display: Two strategies for Hanabi. *Mathematics Magazine*, 88(5), 323 - 336.

Ebert, T. (1988). *Applications of Recursive Operators to Randomness and Complexity.* Doctoral dissertation, University of California, Santa Barbara. https://dl.acm.org/doi/10.5555/927911

Feige, U. (2010). On optimal strategies for a hat game on graphs. *SIAM J. Discrete Math.* 24(3), 782 - 791.

Freudenthal, H. (1973). *Mathmatics as an educational task.* Reidel.

Gadouleau, M. (2018). Finite dynamical systems, hat games, and coding theory. *SIAM J. Discrete Math.* 32(3), 1922 - 1945.

Hendriana, H., Johanto, T., & Sumarmo, U. (2018). The Role of Problem-Based Learning to Improve Students' Mathematical Problem-Solving Ability and Self Confidence. *Journal on Mathematics Education,* 9(2), 291-300.

Holevo, A. S. (2019). Quantum systems, channels, information. *In Quantum Systems, Channels, Information.* de Gruyter.

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). *Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa.* In Modelling and applications in mathematics education (pp. 503-510). Springer.

Krzywkowski, M. (2010). On the hat problem, its variations, and their applications. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica,* 9(1), 55-67.

Krzywkowski, M. (2011). Hat problem on odd cycles. *Houston Journal of Mathematics,* 37, 1063-1069.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning,* 7(3), 231-258.

Lee, L. (1996). *An initiation into algebraic culture through generalization activities.* In Approaches to algebra (pp. 87-106). Springer.

Lubetzky, E., & Stav, U. (2007). *Non-linear index coding outperforming the linear optimum*. The 48th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp. 161–167.

Ma, T., Sun, X., & Yu, H. (2011). A new variation of hat guessing games. In *International Computing and Combinatorics Conference* (pp. 616-626). Springer.

Nemeth, C. J., & Nemeth-Brown. (2003). Better than Individual? The potential benefit of dissent and diversity for group creativity. In P.B. Paulus, & B. A. Nijstad (Eds.), *Group creativity: Innovation through collaboration* (pp. 63-84). Oxford University Press.

Nijstad, B. A., & Paulus, P. B. (2003). Group creativity: Common themes and future directions. In P. B. Paulus (Ed.), *Group creativity: Innovation through collaboration* (pp. 326-346). Oxford University Press.

OECD (2009). *PISA 2009*. Assessment Framework. Key Competencies in Reading, Mathematics and Science. Author.

Östergård, P., & Blass, U. (2001). On the size of optimal binary codes of length 9 and covering radius 1. *IEEE Trans. Inform. Theory* 47 (2001), no. 6, 2556–2557.

Poulos, J. (2001). Could you solve this $1 million hat trick?, abcNews.

Robinson, S. (2001). Why mathematicians now care about their hat color. *The New York Times, Science Times Section*, page D, 5.

Schwab, K. (2017). *The fourth industrial revolution*. Currency.

Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal,* 27(3), 379-423.

Shannon, C. E., & Weaver, W. (1949). *The Mathematical Theory of Communication*. University of Illinois Press.

Surya, E., & Putri, F. A. (2017). Improving mathematical problem-solving ability and self-confidence of high school students through contextual learning model. *Journal on Mathematics Education*, 8(1), 85-94.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*. National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1906 Association Dr., Reston, VA 22091.

Szczechla, W. (2017). The three colour hat guessing game on cycle graphs. *Electron. J. Combin. 24*, no. 1, Paper No. 1.37, 19 pp.

Tantipongpipat, U. (2014). A combinatorial approach to Ebert's hat game with many colors. *Electron. J. Combin.* 21, no. 4, Paper 4.33, 18 pp.

Taylor, P. (2018). Teach the Mathematics of Mathematicians. *Education Sciences*. 8(2), 56.

Wilde, M. M. (2013). *Quantum information theory*. Cambridge University Press.

Zhou, C., & Luo, L. (2012). Group creativity in learning context: Understanding in a socialcultural framework and methodology. *Creative Education,* 3(4), 392-399.

Development of Creative Problem-Solving Activities for Integrating Mathematics and Information Science: Focusing on the Hat Game for Mathematically Gifted Students

Seo, Jiyoung
Seoul National University Graduate School
E-mail : jiyoungs228@snu.ac.kr

Youn, Sang-Gyun†
Seoul National University
E-mail : s.youn@snu.ac.kr

The future society requires not only knowledge but also various competencies, including creativity, cooperative spirit and integrated thinking. This research develops a program for integrating mathematics and information science to enhance important mathematical competencies such as problem-solving and communication. This program does not require much prior knowledge, can be motivated using everyday language and easy-to-access tools, and is based on creative problem-solving activities with multilateral cooperation. The usefulness and rigor of mathematics are emphasized as the number of participants increases in the activities, and theoretical principles stem from the matrix theory over finite fields. Moreover, the activity highlights a connection with error-correcting codes, an important topic in information science. We expect that the real-world contexts of this program contribute to enhancing mathematical communication competence and providing an opportunity to experience the values of mathematics and that this program to be accessible to teachers since coding is not included.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50
* Key words : hat game, error-correcting code, information science, problem-solving, mathematical communication, mathematical modeling
† corresponding author