

# 수정된 선택적 확장 기법을 이용한 불연속 요소의 효율적 해석

이 세 민<sup>1</sup>·강 태 훈<sup>2</sup>·정 하 영<sup>3†</sup>

<sup>1</sup>울산과학기술원 기계공학과 석박사 통합과정, <sup>2</sup>SEMES 차세대 설비연구소 연구원, <sup>3</sup>울산과학기술원 기계공학과 교수

## Efficient Analysis of Discontinuous Elements Using a Modified Selective Enrichment Technique

Semin Lee<sup>1</sup>, Taehun Kang<sup>2</sup> and Hayoung Chung<sup>3†</sup>

<sup>1</sup>Graduate Student, Ulsan National Institute of Science and Technology, Department of Mechanical Engineering, Ulsan, 44919, Korea

<sup>2</sup>Researcher, SEMES CO., LTD Advanced Vehicle Research LAB, Hwaseong, 18383, Korea

<sup>3</sup>Assistant Professor, Ulsan National Institute of Science and Technology, Department of Mechanical Engineering, Ulsan, 44919, Korea

### Abstract

Using a nonconforming mesh in enrichment methods results in several numerical issues induced by discontinuities and singularities found within the solution spaces, including the computational overhead during integration. In this study, we present a novel enrichment technique based on the selective expansion technique of moment fitting (Düster and Allix, 2020). In particular, two modifications are proposed to address the inefficiency during the integration process. First, a feedforward artificial neural network is introduced to correlate the implicit functions and integration moments. Through numerical examples, it is shown that the efficiency of the method is greatly improved when compared with existing expansion techniques, whereas the solution accuracy is maintained. Additionally, the finite element and domain representation grids are separated, which in turn improves the solution accuracy even for coarse mesh conditions.

**Keywords** : moment fitting method, artificial neural network, adaptive integration, level set function

### 1. 서론

구조적인 불연속성은 다상 구조체의 균열 및 구멍과 같은 강한 불연속성, 또는 이종 재료 구조체의 계면과 같은 약한 불연속성으로 나타난다. 이런 불연속성을 고려하기 위해 통상적으로 body fitted mesh를 이용해 구조해석이 진행된다. 해당 요소 내 각 격자는 재료 균질성이 가정되고 요소 간의 경계는 불연속 경계와 일치한다.

그러나 불연속 형태가 복잡해지거나 균열의 성장으로 인해 높은 품질의 격자 생성이 어려운 경우, 정규화 과정에서 비용이 수반되는 단점이 있다. 따라서 복잡한 격자 생성 과정을 거치지 않는 non-conforming mesh를 사용하려는 많은 시도가 있었다. 해당 격자 내에서 요소 내 불연속성이 존재하면 이는 해석을 진행할 때 솔루션 공간 내에 불연속성, 특이점을 포함하

는 매끄럽지 않은 함수를 가지게 된다. 이를 해결하기 위해 ersatz material method, extended finite element method(XFEM) (Babuska and Melenk, 1997; Belytschko and Black, 1999), generalized finite element method(GFEM)(Strouboulis *et al.*, 2002), finite cell method(FCM)(Jamshid *et al.*, 2007) 등 여러 방법들이 제시되었다. 이 중 추가적인 자유도와 불연속 계면 특성이 고려된 확장 기법(enrichment 기법)이 다양하게 사용되었다.

그러나 해당 기법의 적분 함수는 더 이상 Gauss-Legendre 다항식 형태가 아니기 때문에 기존 유한요소법에 사용되는 표준 가우스 적분법을 사용할 수 없으며, 이로 인해 적분과정에서 계산 효율이 감소한다. 대표적인 enrichment 기법 중 하나인 XFEM 방법(Belytschko and Black, 1999)은 이를 해결하기 위해 불연속 요소 내 물질적 균일성이 보장된 간단한 몇 가지 하위 요소를 확보하는 세분화 기법을 사용한다. 그러나 세분화

†Corresponding author:

Tel: +82-52-217-2434; E-mail: hychung@unist.ac.kr

Received June 21 2022; Revised July 15 2022;

Accepted July 18 2022

© 2022 by Computational Structural Engineering Institute of Korea

This is an Open-Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

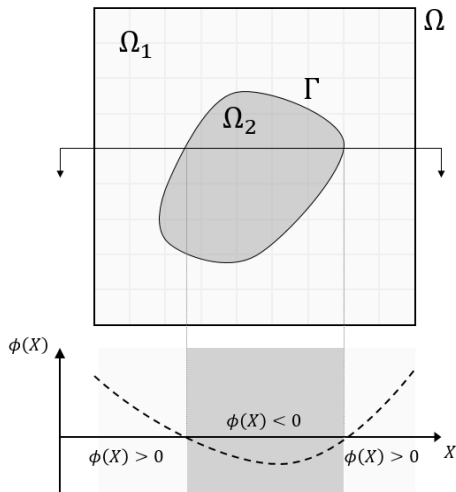


Fig. 1 Representation of domain with level set function

과정에서 고려된 각 하위 요소의 가우스 적분점의 수와 계산 횟수가 상당히 증가하게 된다.

최근 이 문제를 개선하기 위해 모멘트 피팅법(Mousavi and Sukumar, 2011)을 응용한 선택적 확장 기법(Düster and Allix, 2020)이 제시되었다. 해당 방법에서는 불연속 요소 내의 가우스 적분점의 수가 불연속 형태에 상관없이 고정되어 위에서 언급한 enrichment 기법에 필요한 요구되는 가우스 적분점이 증가하는 문제를 해결하였다. 그러나 선택적 enrichment 법 또한 많은 enrichment type 적분 과정이 존재해 요구되는 연산 비용을 효과적으로 줄이기에는 한계가 있다. 또한, 제시된 불연속 모델은 4개 절점 별 레벨 셋 값을 통해 선형 근사되는데, 이는 복잡한 불연속 계면을 모사하기 어렵다. 특히 saddle point 에 해당하는 지점에 계면이 형성될 경우, 근사된 비선형 형태에 의해 결정되는 적분점의 가중치 값의 오차가 커지게 된다.

본 연구에서는 Duster과 Allix가 제안한 enrichment 기법을 두가지 방향으로 확장한다. 첫번째로, 불연속적 요소에 한해 여러 유형의 적분 함수 계산을 모사하는 인공지능망을 적용함으로써 구조해석에 필요한 계산 비용을 효과적으로 감소시킨다. 두번째로, 기존 기법의 가중치 정확도가 적분 정확성에 의존한다는 점에 착안해 유한요소 격자는 그대로 두고 레벨 셋 격자의 해상도만 증강함으로써 유한요소 해석의 효율 저하 없이 적분 정확성을 증가시키고자 하였다.

## 2. 수치해석 기법

### 2.1 불연속 형상 표현법

전체 구조는 Fig. 1과 같이  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 로 이뤄진 이중 재료 를 가정한다. 상이한 두개 재료  $\Omega_1, \Omega_2$  사이 계면  $\Gamma$ 는 레벨 셋

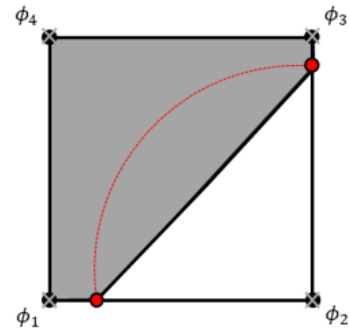


Fig. 2 Representation of discontinuous shape with level set value

함수  $\phi(X)$ 를 통해 나타내었다.

각 재료의 영역은 각 절점 X에서 나타나는  $\phi(X)$ 의 기호에 의해 다음과 같이 나타난다.

$$\begin{aligned} \phi(X) &> 0 \text{ if } X \in \Omega_1 & (1) \\ \phi(X) &< 0 \text{ if } X \in \Omega_2 \\ \phi(X) &= 0 \text{ if } X \in \Gamma \end{aligned}$$

요소 내 셋 값 부호를 통해 불연속적 요소를 판단한다. 레벨 셋 값에 대해 보간법을 적용해 나타난 불연속 형상은 Fig. 2와 같다.

### 2.2 불연속 요소 해석

본 연구에서는 불연속적 요소 내 변위 장  $u(x)$ 를 절점의 변위  $\hat{u}$ 와 enriched DOF  $\hat{a}$ , 그리고 shape function  $N(x)$ 과 enrichment function  $F(x)$ 를 통해 근사한다.

$$u(x) = N(x)\hat{u} + N(x)F(x)\hat{a} \quad (2)$$

Enrichment function  $F(x)$ 는 약한 불연속적 계면 간 kink를 포함한 solution field  $u(x)$ 의 계면 특성을 나타내는 함수로, 다음과 같이 정의된다. Fig. 3에서  $F(x)$ 의 불연속적 형상에 대한 형태를 확인할 수 있다.

$$F(X) = \sum_i N_i |\phi_i| - \sum_i |N_i \phi_i| \quad (3)$$

Galerkin method 를 적용하여 정의된 강성 행렬(K)과 힘 벡터(f)는 다음과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ue} \\ K_{ue}^T & K_{ee} \end{bmatrix}, f = \begin{bmatrix} f_u \\ f_e \end{bmatrix} \quad (4)$$

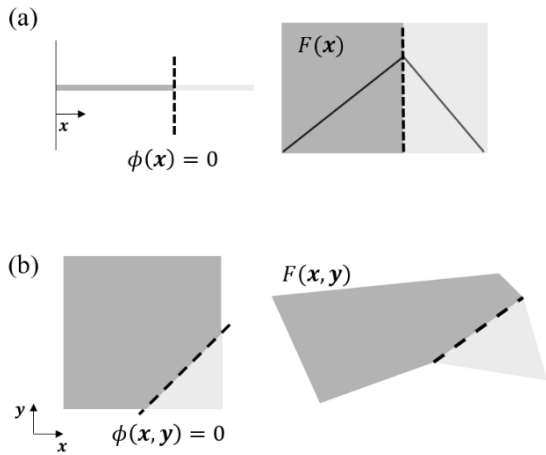


Fig. 3 Enrichment function( $F(x)$ ) along discontinuous shape

아래 첨자  $u, e$ 는 pure displacement 또는, enrichment의 자유도에 관련된 항을 나타낸다.

단일 재료로 구성된 요소와는 달리, 다항식으로 구성되지 않은 불연속 요소는 standard Gaussian quadrature 이 적용될 수 없기 때문에 다음의 식과 같이 각 지점에서의 물성을 나타내는 isotropic material function  $D(\phi(x))$ 와, enrichment function  $F(x)$ 를 적용시켜 각 강성 행렬을 계산했다. 예를 들어,  $K_{ue}$ 는 다음과 같이 표현했다.

$$K_{ue} = \int_{\Omega_e} \nabla N^T : D : (\nabla N F + \nabla F N) d\Omega_e \quad (5)$$

기존의 적분점을 통해 적분하는 경우 위의 식은 매끈한 다항식으로 구성되어 있지 않아 정확한 적분 계산이 곤란하다. 따라서, 본 연구에서는 이를 해결하기 위해 선택적 enrichment 기법(Düster and Allix, 2020)을 적용했다.

### 2.3 선택적 확장 기법과 모멘트 피팅

본 연구에서는 적응 가중치 계산을 위해 선택적 확장 기법을 적용한 모멘트 피팅법을 도입했다. 해당 기법은 임의의 함수 적분에 사용되는 각 적분점에 해당하는 가중치를 계산하는 방법이다.

임의의 피적분 함수  $f_i (i = 1, \dots, n)$ 에 대한 모멘트 피팅 방정식의 행렬 형태는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} f_1(r_1) & \dots & f_1(r_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(r_1) & \dots & f_m(r_n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\Omega_e} f_1(r) d\Omega_e \\ \vdots \\ \int_{\Omega_e} f_m(r) d\Omega_e \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$r_i$ 는  $n$ 개의 적분점의 위치를 나타내고,  $w_i$ 는 각 적분점에 해당하는 가중치 값을 나타낸다.

Düster가 제안한 선택적 확장 기법에서는 각  $m$ 개 종류에 따른 피적분 함수  $f$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$f_j(r) = H_j(r) P^{N_j}(r, r_q) \quad (7)$$

각 적분 종류에 관한 함수  $H_i(r)$ 는 식 (8)과 같이 불연속 요소 내 물성 관련 함수  $E(r)$ , enrichment function  $F(r)$ 과 그 미분 함수로 결정된다.  $N_q$ 는 식 (9)와 같이 나타나는 Lagrange 다항식  $P^{N_q}(r)$ 의 차수,  $r_q$ 는  $q$ 번째 Gauss-Legendre 적분점을 의미한다. 본 연구에서는 2차 Lagrange 다항식을 얻기 위해 각  $x, y$  방향에 3개의 적분점을 적용했다.

$$\begin{aligned} H_1(r) &= E(r), H_2(r) = F(r), \\ H_3(r) &= E(r)F(r), H_4(r) = E(r)F(r)^2, \\ [H_5(r); H_6(r)] &= E(r)[F_{,x}(r); F_{,y}(r)], \\ [H_7(r); H_8(r)] &= E(r)F(r)[F_{,x}(r); F_{,y}(r)], \\ [H_9(r); H_{10}(r)] &= E(r)[F_{,x}^2(r); F_{,y}^2(r)], \\ H_{11}(r) &= E(r)F_{,x}(r)F_{,y}(r) \end{aligned} \quad (8)$$

$$P^{N_q}(r, r_q) = \prod_{q=1, q \neq l}^n \frac{r - r_q}{r_l - r_q} \quad (9)$$

식 (6)에서 나타나는 coefficient matrix는 대각 행렬로 나타나 모멘트 피팅 방정식을 통해 가중치가 다음과 같이 간단하게 계산된다.

$$w_j^i = \frac{\int_{\Omega_e} H_j(r) P^i(r) d\Omega_e}{H_j(r_i)} \quad (10)$$

여기서 계산된 가중치는 이후 동일한 요소에 대한 해석이 다시 진행될 때 재사용될 수 있다. 예를 들어, Newton method를 통해 비선형 물성 해석을 진행할 때, 첫 반복 계산에서 구한 가중치 값과 적분 종류에 관한 함수  $H_i(r)$ 의 선형 계산만으로 적분 값을 빠르게 구할 수 있다. Düster와 Allix가 제안한 enrichment 방법을 통해 수치적인 적분 과정이 줄어들었으므로 계산 효율이 증가하게 된다.

### 3. 적응 가중치 계산 기법의 확장

모멘트 피팅법을 통해 반복적 계산이 요구되는 해석에서 효율적 계산이 가능함을 확인했다. 하지만, 기존에 제안된 모멘

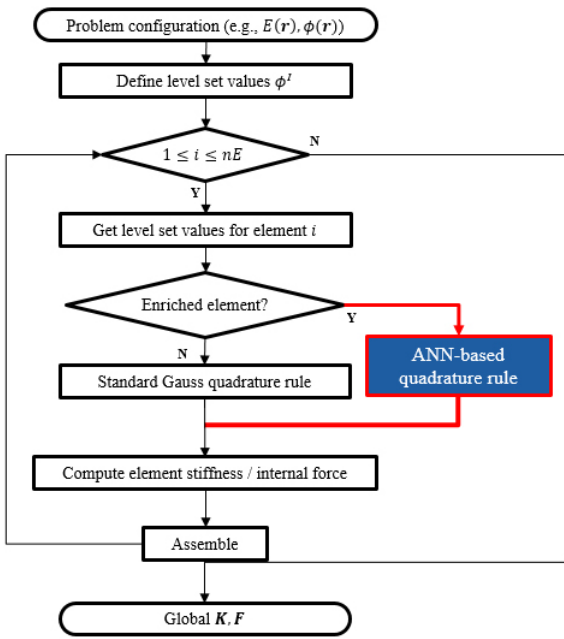


Fig. 4 Finite element analysis algorithm with moment fitting method applied artificial neural network

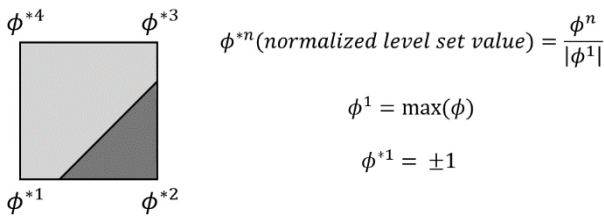


Fig. 5 Reconstructed level set values for data sampling

트 피팅법에서는 각 적분 함수의 정확한 계산을 위해서는 큰 계산 비용이 필요하다. 더불어 Fig. 2와 같이 제한된 레벨 셋 차원으로 인해 나타나는 빨간색 실선에 해당하는 실제 불연속 형태와 검은색 실선에 해당하는 선형 근사된 불연속 형태가 다르게 나타난다. 이 차이를 줄이기 위해 전체 요소 수의 증가가 요구되며, 이는 계산 비효율성을 가중한다. 본 연구에서는 모멘트 피팅법을 개선하는 두 가지 방법을 제안한다.

### 3.1 인공신경망 적용

인공신경망은 가중치와 편향치를 통한 선형 연산과 비선형 활성화 함수를 통해 특정 함수를 모사하는 비선형 회귀 방법 중 하나이다.

본 연구에서는 모멘트 피팅법에서 병목현상이 발생하는 정확한 여러 종류에 대한 적분 함수 계산 부분을 대체한다. 따라서, 이를 모사해 불연속 형상에 대한 quadrature rule을 출력하는 인공신경망을 Fig. 4와 같이 적용하여 효율적인 모멘트 피팅을 적용한 구조해석을 진행시켰다.

Table 1 Hyperparameter of artificial neural network

Number of hidden layers	8
Nodes for each layers	3,26,140,380,420,540,600,800,198
Size of samples	176690
Batch size	Full batch
Activation function	ReLU
Optimizer	ADAM
Learning rate	$10^{-3} \sim 10^{-5}$

#### 3.1.1 인공신경망 훈련을 위한 데이터 샘플링

요소 내 형성된 불연속 형태는, 요소가 가진 4개 절점의 레벨 셋 값( $\phi^a, \dots, \phi^d$ )에 의해 결정된다. 하지만, 하나의 불연속 형태를 나타내는 4개 절점의 레벨 셋 값의 분포는 유일하지 않다. 이와 같이 나타나는 비 유일성은 신경망의 훈련에 방해가 되는 요인이 된다. 해당 특성을 제거하기 위해, 각 불연속 요소에 나타난 4개 절점의 레벨 셋 값들의 최댓값 또는 최솟값을 4개 절점의 레벨 셋 값을 나눠 정규화를 진행했다. 1, -1에 해당하는 정규화된 레벨 셋 값을 가지는 절점이 Fig. 5와 같이 모두 왼쪽 아래에 위치하도록 하고, 3개 절점의 레벨 셋 값만 고려하도록 설정했다.

#### 3.1.2 인공신경망 구조

적용된 인공신경망에서는 3개의 재구성된 레벨 셋 값을 입력해 198개의 선형 계수를 출력하도록 학습했다. 출력된 각 99개의 계수  $a_j^i, b_j^i$ 의 요소 내 포함된 2개 물성의 비율( $\gamma$ )을 고려한 선형 조합을 다음과 같이 진행해, 각 적분점에 해당하는 11개 종류의 적분 함수 값을 구할 수 있다.

$$\int f_j(x) d\Omega = \gamma \sum_{i=1}^9 a_j^i + \sum_{i=1}^9 b_j^i \quad (11)$$

본 연구에서 사용된 신경망의 hyperparameter는 Table 1에서 나타난다.

### 3.2 구조의 고해상도 표현

선택적 확장기법에서 전체 적분점은 불연속성에 무관하게 동일하다. 따라서 레벨 셋 격자와 유한요소 격자는 독립적으로 존재할 수 있다. 즉, 구조해석에 대한 해의 공간은 유한요소 격자를 기반으로 형성되는 것으로, 레벨 셋 격자는 계면의 형태를 나타내는 데에만 사용되기 때문이다.

특히, 대부분의 계산 시간은 형상 관련 계산이 아닌 구조해석 과정에 의해 좌우되므로, 높은 해상도의 레벨 셋 격자는 계산 효율성에 큰 영향을 미치지 않는다. 본 연구에서는 모멘트

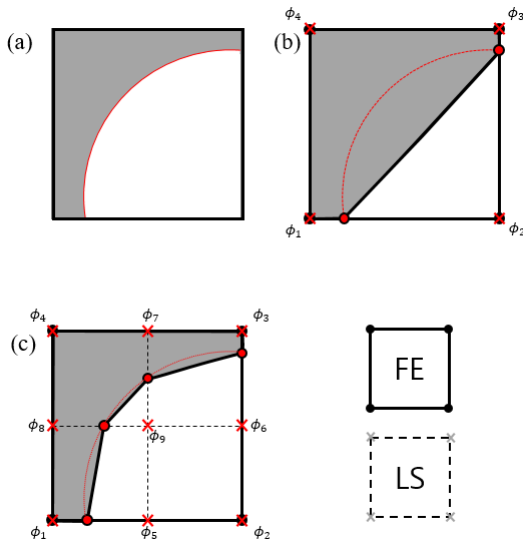


Fig. 6 Effect of using different grid of level set(dotted lines and red cross markers) and finite element(solid lines and green circle markers) (a) Enriched element; (b) Quadrilateral enriched element with 4 level set values; (c) Quadrilateral enriched element with 9 level set values

피팅의 개선에 대한 두 번째 방안으로, Fig. 6과 같이 유한 요소 격자와 적분점의 수는 그대로 유지하되, 레벨 셋 격자를 더 높은 해상도로 나타내려고 하였다.

Fig. 6(a)에서 나타난 것처럼, 불연속 요소가 높은 곡률의 불연속 형태를 가지는 경우, Fig. 6(b)처럼 4개 절점에 대한 레벨 셋 값을 고려할 때, 단순 선형으로 근사된 불연속 형태는 실제 불연속 형태와 큰 차이를 보인다. Fig. 6(c)와 같이 9개 절점에 대한 레벨 셋 값을 고려할 때, 선형으로 근사된 불연속 형태는 실제와 거의 동일한 불연속 형태를 가진다.

불연속 요소 내 각 적분점의 가중치는 고려된 불연속 형태에 의존적으로 계산되기 때문에, 9개 절점의 레벨 셋 값을 고려할 때 4개 절점의 레벨 셋 값을 고려한 가중치보다 더 정확하게 계산된다.

#### 4. 수치예제

##### 4.1 인공신경망을 적용한 모멘트 피팅

본 연구에서 제안한 첫 번째 개선점의 효과를 확인해 보기 위해 4개의 다른 조건을 가진 예제에 적용해 다른 수치적인 접근법을 통한 결과와 비교했다.

##### 4.1.1 이중 재료 구조해석

신경망이 적용된 모멘트 피팅법의 다른 수치적인 접근법과 비교한 정확성, 및 효율성의 검증을 위해 단순한 불연속 형태

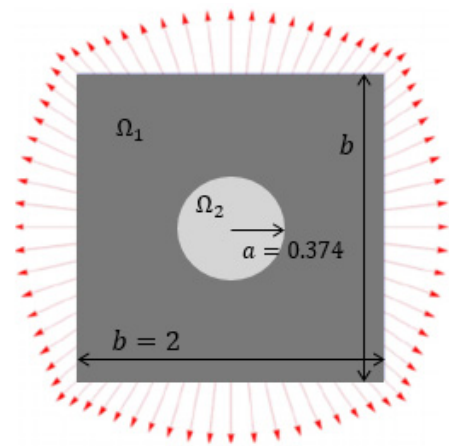


Fig. 7 Condition of bi-material structure example

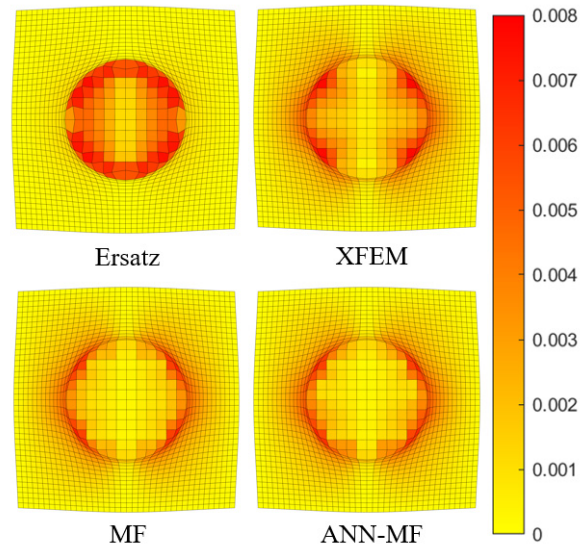


Fig. 8 Displacement field error for each methods

를 가지는 선형 물성 재료의 구조 예제에 적용했다. 본 예제에서는 Fig. 1과 같이 다른 색으로 표현된 서로 다른 영역  $\Omega_1, \Omega_2$  으로 구성된 구조를 다룬다. 2개 영역은 각각 10, 1의 영률을 가지고, 푸아송 비는 동일하게 0.3의 값을 가지며 서로 완전히 접촉된 상태라 가정된다. 해당 구조에서 가장 바깥쪽의 변위를 Fig. 7과 같이 강제할 때, 각 절점에서 나타나는 변위의 실제 분포는 다음과 같이 나타난다. 여기에서  $\lambda_i, \mu_i$  는  $\Omega_1$ 에서 나타나는 Lamé constants 값을 나타낸다. 바깥에 대한 경계 조건만 주어졌을 때, 제안한 방법을 포함한 다른 수치적인 접근법을 통해 해석되는 결과는 Fig. 8을 통해 나타내었다.

$$u_r(r) = \begin{cases} r \left[ \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)a + \frac{b^2}{a^2} \right] & 0 \leq r \leq a \\ \left(r - \frac{b^2}{r}\right)a + \frac{b^2}{r} & a \leq r \leq b \end{cases} \quad (12)$$



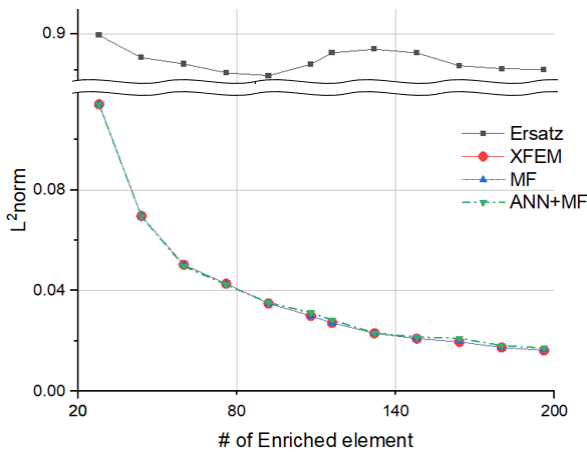


Fig. 9  $L^2$  norm error of each method with the analytic solutions as the number of enriched elements increased

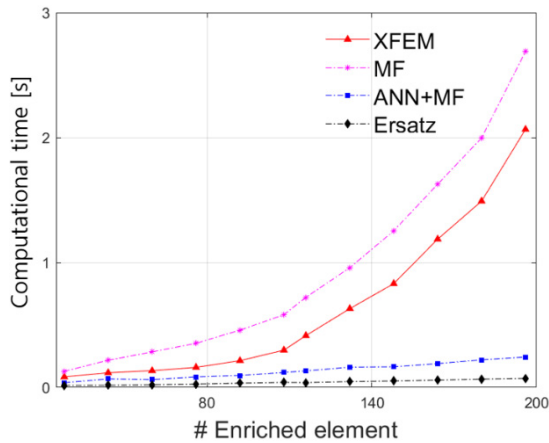


Fig. 10 Amount of computational time of enriched elements for each method

$$a = \frac{(\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2)b^2}{(\lambda_2 + \mu_2)a^2 + (\lambda_1 + \mu_1)(b^2 - a^2) + \mu_2b^2} \quad (13)$$

Fig. 8은 ersatz 기법을 제외한, 본 연구에서 제안한 방법을 포함한 모든 접근법 들은 비슷한 변위 형상 및 구조 중심부에 형성된 내부 재료의 반지름  $r$ 에 따라 식 (12), (13)으로 정의되는 실제 변위와 거의 동일한 값을 가진다는 것을 보여준다.

같은 크기의 구조 내 동일한 조건에서, 해석이 요구되는 불연속 요소의 수가 증가함에 따라 나타나는 각 접근법의 해석  $L^2$  norm 오차를 통해 표기하였다(Fig. 9).

Ersatz를 제외한 모든 enrichment 기법은 유사한 정확도를 보임을 확인한다. 더욱이, 불연속 요소의 개수가 증가함에 따라, 오차가 0으로 수렴되는 것을 볼 수 있다. 각 접근법의 계산 효율성은 Fig. 10을 통해 확인할 수 있다.

Fig. 10에서, 수치적으로 정확한 적분을 위해 기존의 수치적인 방법으로 진행되는 모멘트 피팅법과, XFEM 기법은 해석이

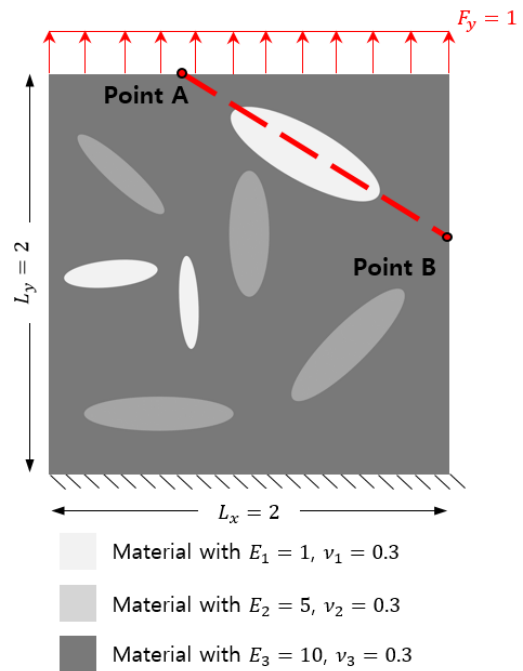


Fig. 11 Condition of multi-material structure

요구되는 불연속 요소 개수가 증가함에 따라 계산 시간이 급격히 증가함을 볼 수 있다. 신경망이 적용된 모멘트 피팅 기법은 불연속 요소 개수가 증가함에도 요구되는 연산 시간이 선형적으로 증가함을 확인했다.

예를 들어, 148개의 불연속 요소의 불연속성을 고려하기 위한 모멘트 피팅법을 통한 적분 시간은 1.57초가 소요되어 전체 해석 시간의 26.18%를 차지하고, 인공지능이 적용된 모멘트 피팅법을 통한 적분 시간은 0.23초가 소요되어 전체 해석 시간의 21.79% 만큼 차지한 것을 확인했다.

제안한 방법을 통해 적분에 소요되는 계산 시간과 전체 해석 시간에 차지하는 비중이 줄어드는 것을 확인했다. 이를 통해 제안한 방법이 ersatz 기법과 유사하게 scalable 함을 확인할 수 있다.

#### 4.1.2 다중 재료 구조해석

본 예제에서는 복잡한 형태의 불연속 형태를 가지는 구조에 대해서도 제시한 신경망을 활용할 수 있음을 보인다. 이를 위해 Fig. 11과 같이 3개의 물성을 가지는 구조의 해석을 진행했다. 먼저, 각 접근법과 해석 정확성의 비교를 위해 전체 요소에서 일어나는 변형과 응력에 대해 나타냈다. 그리고 Fig. 11에서 보여지는 A지점과 B지점을 잇는 빨간 점선 부분을 따라 나타나는 응력의 형성을 확인했다. 물성의 차이가 큰 불연속 계면 부근에서 민감하게 나타나는 Von-Mises Stress의 분포를 정량적으로 비교함을 통해 제안한 접근법의 계산 정확성을 검증할 수 있다.

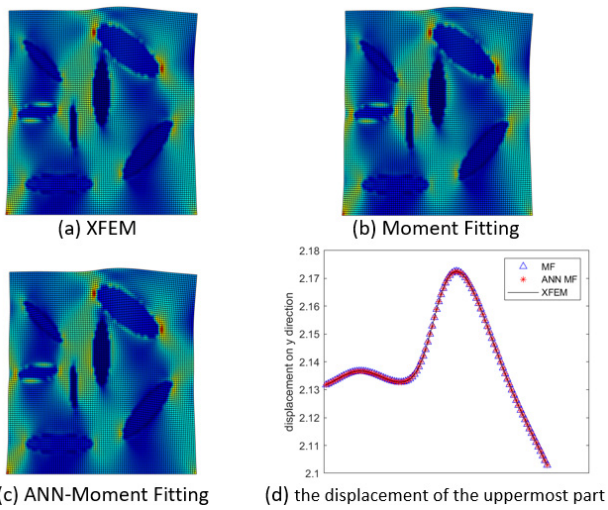


Fig. 12 Deformed shape and distributed stress along all elements

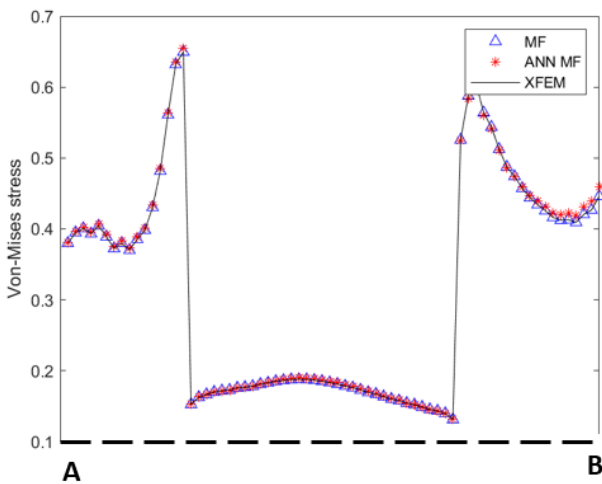


Fig. 13 Distributed stress along A-B line

기존의 수치적인 enrichment 기법과 제안한 방법을 통해 구조를 해석한 결과를 Fig. 12와 비교하였다. Fig. 12(a, b, c)에서는 제안한 방법을 포함해 모두 거의 동일한 변형과 응력 분포를 가짐과, Fig. 12(d)를 통해 각 접근법을 통해 구한 가장 위쪽에 위치한 절점들의 y방향 변위들이 거의 동일하게 계산되었음을 확인했다.

A-B 구간에서 나타나는 응력의 형성은 Fig. 13을 통해 확인할 수 있다. 제안한 방법을 포함한 모든 접근법이 불연속 지점을 포함해 모두 유사한 응력 값을 가짐을 확인했다. 특히, XFEM을 통해 구한 응력 분포와 제안한 방법을 통해 구한 응력 분포의 최대 오차가 약 0.4%가 됨을 통해 불연속성이 큰 구간에서도 정확한 구조 해석이 가능함을 검증할 수 있었다.

#### 4.1.3 비선형 이중 재료 구조해석

앞서 서론에서 언급한 바와 같이, 비선형 해석의 경우, 매 반

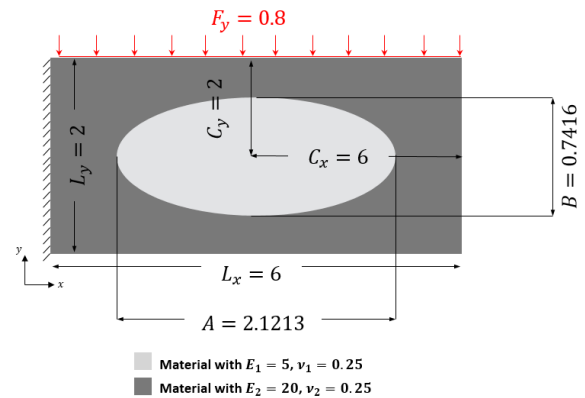


Fig. 14 Cantilever beam with non-linear bi-material

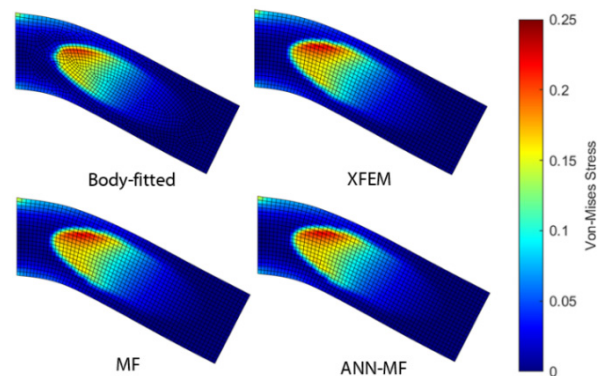


Fig. 15 Deformation and stress distribution for all elements after non-linear FEM analysis

복 횟수당 반복 계산이 진행됨에 따라 적분 과정에서 요구되는 계산 비용이 매우 크다. 따라서 해당 예제에서는 각 접근법을 통해 해석하는데 요구되는 적분 시간을 비교해 제안된 방법의 계산 효율성을 응력 분포 및 변형 계산 결과를 비교해 계산 정확성을 검증하고자 한다.

Fig. 14와 같이 외부에 5의 영률과 0.25의 푸아송 비, 그리고, 타원형의 0.5의 영률과 0.25의 푸아송 비를 가지는 이중 재료를 가지는 cantilever beam이 아래방향으로 윗면의 모든 부분에서 압력이 부하될 때, 각 접근법을 통해 Fig. 15와 같이 근사한 응력 분포가 일어남을 확인할 수 있었다.

Fig. 16에서는 불연속적 요소의 수에 따라 해석에 필요한 적분 시간을 확인할 수 있다. XFEM의 총 적분 시간이 수치적인 모멘트 피팅 및 인공신경망이 적용된 모멘트 피팅 방법에 비해 상당히 많이 요구된다는 것을 알 수 있다. 이를 통해 모멘트 피팅에서 계산된 각 요소에 따른 가중치가 처음 계산된 후 비선형 해석을 위해 반복되는 계산에서 그대로 활용될 수 있는 모멘트 피팅 접근법의 장점이 드러난다. 또한, 이 그래프는 처음 가중치 계산을 위해 요구되는 적분 시간이 제안된 방법이 기존 수치적인 모멘트 피팅 접근법보다 적게 걸리는 것을 나타낸다.

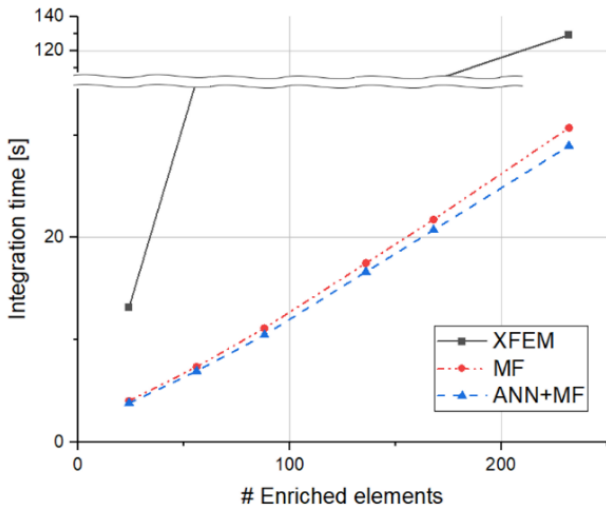


Fig. 16 Comparison of aggregated integration time differences of enriched elements during iteration between XFEM, MF, and ANN+MF method

#### 4.2 고차 적분 확장 해석 예제

Fig. 17과 같이 9개 절점을 가지는 요소를 가지고 해석한 방법(LSM9)과 4개 절점을 가지는 요소를 가지고 해석한 방법(LSM4)의 효과는 Fig. 18에서 확인할 수 있다. 해당 그래프는 모든 지점에 대해서, LSM9를 통해 해석한 변위가 더 적은 자유도만으로 더 큰 수렴성을 가지고 있음을 시사하고, 이를 통해, LSM9를 사용하여 더 적은 요소만을 가지고, 효율적이고 정확한 해석을 진행할 수 있음을 확인할 수 있다.

#### 5. 결론

본 연구에서는 Düster과 Allix가 제시한 선택적 enrichment 기법을 개선하는 2가지 방안을 제시했다. 여러 유형의 적분 계산을 대체한 인공지능망을 도입하여 더 효율적인 구조해석이 가능함을 예제를 통해 검증했다. 또한, 9개의 레벨 셋 값을 고려한 구조해석 결과와 4개 레벨 셋 값을 고려한 구조해석 결과를 예제에 적용하여 비교해 고해상도 레벨 셋 격자의 불연속 표현 정확성을 확인했다.

다만, 본 연구에서 학습한 신경망에서 구한 적분 가중치는 여전히 미세한 오차가 존재한다. 또한, 신경망의 hyperparameter가 학습에 최적화되어 있지 않아, 학습을 위해 상당히 많은 시간이 소요된다. 본 연구에서는 학습을 위해 GPU2080 Ti를 통해 신경망을 학습한 결과 약 168시간이 소요되었다.

추후 연구에서는 베이지안 최적화를 통해 신경망의 hyperparameter를 최적화하고, 신경망의 구조를 개선하여 효율적이고 더 정확한 신경망의 학습이 가능하도록 개선할 예정이다.

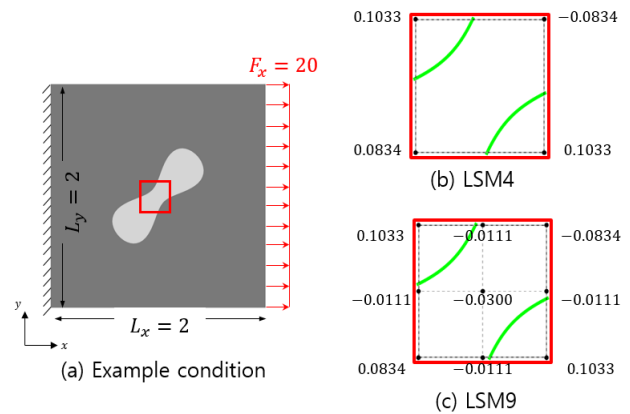


Fig. 17 A cantilevered beam with dumbbell-shaped inclusion problem and boundary condition. Each FE grid finds (a) four level set nodes(LSM4), and (b) nine level set nodes(LSM9)

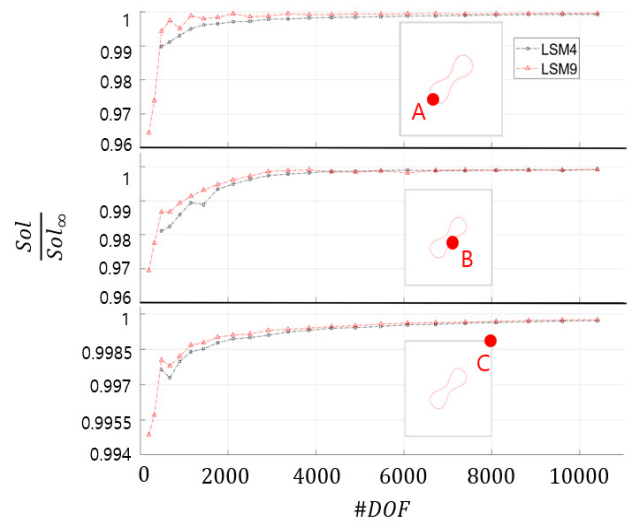


Fig. 18 The convergence of LSM4 and LSM9 method while the number of DOFs increases. The  $Sol_{\infty}$  was obtained by high DOFs of XFEM

이를 통해 제안한 방법의 효과는 기존의 유한요소 해석을 개선하는데 도움이 될 수 있을 것이라 기대되며, 더 나아가 제안한 방법이 최적 설계에 적용되어 효율적인 최적 설계 과정에 도움을 줄 수 있을 것이라 기대된다.

#### 감사의 글

이 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단-기초연구실지원사업(NRF-2021R1A4A1033224)과 우수신진연구지원(NRF-2020R1C1C1005741)의 지원을 받았으며, UNIST(울산과학기술원)의 재원으로 정찰과제(1.190144.01)와 A.I. 보급 및 확산지원사업(1.210090.01)을 지원받아 수행된 연구임.



## References

- Babuska, I., Melenk, J.M.** (1997) The Partition of Unity Method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 40(4), pp.727~758.
- Belytschko, T., Black, T.** (1999) Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 45(5), pp.601~620.
- Düster, A., Allix, O.** (2020) Selective Enrichment of Moment Fitting and Application to Cut Finite Elements and Cells, *Comput. Mech.*, 65(2), pp.429~450.
- Jamshid, P., Alexander, D., Ernst, R.** (2007) Finite Cell Method, *Comput. Mech.*, 41, pp.121~133.
- Mousavi, S.E., Sukumar, N.** (2011) Numerical Integration of Polynomials and Discontinuous Functions on Irregular Convex Polygons and Polyhedrons, *Comput. Mech.*, 47(5), pp.535~554.
- Strouboulis, T., Babuska, I., Copps, K.** (2002) The Design and Analysis of the Generalized Finite Element Method, *Comput. Methods Appl. Mech. & Eng.*, 181(1-3), pp.43~69.

## 요 지

Non-conforming mesh를 이용해 구조적인 불연속성을 해석 시 요소 내 함수 불연속성과 특이점이 존재하며, 이로 인해 계산의 효율성이 저하된다. 본 연구에서는 이 문제를 해결하기 위해 모멘트 피팅법을 응용한 선택적 확장기법(Duster and Allix, 2020)을 토대로 새로운 고효율 확장 기법을 제시하였다. 특히, 적분과정에서의 비효율성에 초점을 두고 두가지 개선 방안을 제안하고 이를 수치 예제를 통해 검증하였다. 첫째로 음함수-모멘트간 효율적 계산을 위해 인공신경망을 도입하였으며, 기존 확장 기법에 비해 해의 정확성이 유지되면서도 효율적인 계산이 가능함을 확인하였다. 더불어, 구조 해석과 형상 표상용 격자를 분리, 낮은 밀도의 구조 해석 격자에서도 정확성이 향상되었음을 보였다.

**핵심용어** : 모멘트 피팅법, 인공신경망, 적응적 구적법, 레벨셋 함수