

비선형 힘 및 전단 힌지 사이의 불평형력 해소를 위한 수렴계산 기법

An Iterative Scheme for Resolving Unbalanced Forces Between Nonlinear Flexural Bending and Shear Springs in Lumped Plasticity Model

김유석^{1)*}

Kim, Yousok^{1)*}

¹⁾홍익대학교 건축공학부 부교수

¹⁾Associate Professor, School of Architectural Engineering, Hongik University

/ A B S T R A C T /

For a member model in nonlinear structural analysis, a lumped plastic model that idealizes its flexural bending, shear, and axial behaviors by springs with the nonlinear hysteretic model is widely adopted because of its simplicity and transparency compared to the other rigorous finite element methods. On the other hand, a challenging task in its numerical solution is to satisfy the equilibrium condition between nonlinear flexural bending and shear springs connected in series. Since the local forces between flexural and shear springs are not balanced when one or both springs experience stiffness changes (e.g., cracking, yielding, and unloading), the additional unbalanced force due to overshooting or undershooting each spring force is also generated. This paper introduces an iterative scheme for numerical solutions satisfying the equilibrium conditions between flexural bending and shear springs. The effect of equilibrium iteration on analysis results is shown by comparing the results obtained from the proposed method to those from the conventional scheme, where the equilibrium condition is not perfectly satisfied.

Key words: Numerical solution, Iterative scheme, Unbalanced force, Lumped plasticity model, Nonlinear response, Member model

1. 서론

건물의 주요 구조 부재인 기둥과 보를 2개 절점으로 연결되는 선재(line element)로 모델링하는 수법이 널리 이용되고 있다. 그중에서도 부재의 휨 거동을 비선형 스프링으로 모델링하고 스프링의 비선형 이력모델에는 실험결과로부터 도출된 힘과 변형의 관계를 적용하는 집중 힌지 모델(lumped plasticity model)이 대표적이라고 할 수 있다[1]. 이와 같은 모델은 부재에서 발생하는 모든 손상이 부재 양단에 집중된다는 매우 이상적인 가정을 전제로 하고 있음에도 불구하고, 모델의 단순성, 투명성 및 부재 실험 결과를 통한 이력모델 구축의 용이성[2, 3] 등에 의해서 비선형해석을 위한 주요 해석모델로 사용되고 있다. 또한, 선재(기둥 및 보)를 양단의 2개 절점만으로

모델링할 수 있으므로 다수의 부재로 구성되는 건물의 지진응답해석에서 자유도 수를 줄일 수 있으므로 하나의 부재를 복수의 요소로 분할하는 유한요소 해석법에 비하여 계산 시간상의 경제성 또한 이 모델의 장점이라고 할 수 있다.

한편, 전단변형 및 전단파괴모드를 무시할 수 없는 철근콘크리트 부재의 경우(예: 단주, 전단 보강근이 결핍된 부재 등)에는 휨 스프링과 직렬로 연결되는 전단 스프링을 추가하여 전단 변형을 고려하는 방법이 사용되고 있다. 그러나, 휨 스프링과 전단 스프링이 모두 비선형거동을 하는 경우에는 각 스프링의 비선형 거동에 의해서 발생하는 불평형력과는 별도로 휨 스프링과 전단 스프링 사이에 불평형력이 추가로 발생한다. 따라서, 신뢰할 수 있는 비선형 지진응답해석 결과를 산출하기 위해서는 두 종류의 불평형력 모두를 해소하는 수렴계산의 적용이 필요하다.

비선형 스프링에 의해서 발생하는 불평형력을 해소하기 위한 대표적인 수치해석방법으로 Newton-Raphson iteration methods와 Arch-length

*Corresponding author: Kim, Yousok

E-mail: yskim1220@hongik.ac.kr

(Received September 27, 2022; Revised October 12, 2022; Accepted October 12, 2022)

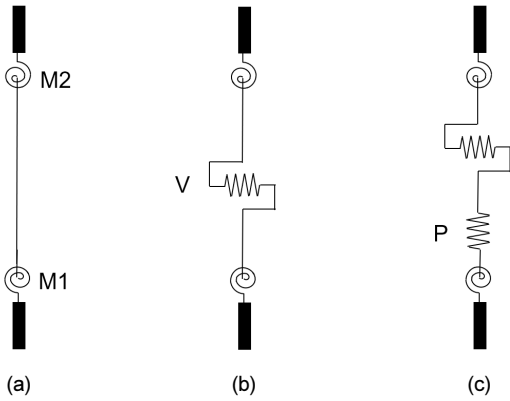


Fig. 1. Lumped plasticity models

formula[4-7]가 제시되어 있으나, 이와는 별도로 비선형 힙 스프링과 전단 스프링 사이에 발생하는 불평형력 해소를 위한 방법은 명확하게 제시되어 있지 않다. 따라서, 이와 같은 힙 스프링과 전단 스프링 사이에 발생하는 불평형력 문제를 회피하기 위해서 전단 스프링과 힙 스프링의 어느 한쪽을 탄성 거동에 국한된 모델로 해석하는 경우가 일반적이라고 할 수 있다. 또는, 부재의 파괴모드 판정을 통해서 전단지배, 힙-전단지배 그리고 힙지배로 구분하여 파괴모드를 힙 스프링의 비선형 이력모델(골격선)에 간접적으로 반영함으로써 전단 스프링을 직접 모델링하지 않고 전단 거동 효과를 고려하고 있다[8]. 그러나 기동의 힙 스프링에 의해서 고려되는 전단 거동은 양단 힙 응답의 대칭성 결여(기동 하부에 변형 집중)로 인하여 실제 부재에서 발생하는 전단 파괴 또는 전단 변형의 집중 현상을 정확히 재현할 수 없는 한계가 있다.

본 연구에서는 비선형 힙 및 전단 스프링으로 구성된 모델을 대상으로 두 스프링 사이에 발생하는 불평형력 해소를 위한 수렴 계산 방법을 제시하며, 수렴 계산의 유무에 따른 응답 차이를 검토함으로써 신뢰할 수 있는 비선형 지진응답해석 결과 산출을 위한 수렴 계산의 필요성에 대해서 고찰한다.

2. 구성방정식 및 수렴계산

2.1 힙 스프링으로 구성된 부재

Fig. 1은 기동 및 보에 집중 힙지 모델을 적용하는 경우, 힙, 전단 및 축방향 거동에 대한 비선형 스프링의 조합을 나타내고 있으며 부재의 거동 특성에 따라서 적정 모델을 선택하게 된다. 여기서 힙 스프링과 전단 스프링은 서로 직렬관계에 있으며, 축방향 스프링은 독립적인 거동을 한다.

힙 스프링만으로 모델링하는 경우(Fig. 1(a)), 양단을 비선형 힙 스프링으로, 양단 사이의 중앙 부분을 탄성요소로 모델링한 부재의 연성행렬 (flexibility matrix)은 식 (1)과 같다.

$$[f_M] = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{M1} + f_0 & -f_0 \\ -f_0 & f_{M2} + f_0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서, $f_0 = L/6EI$ (L : 부재길이, E : 탄성계수, I : 단면 2차모멘트).

식 (1)에서 f_{M1} , f_{M2} 는 양단의 힙 스프링에 적용된 이력모델로부터 결

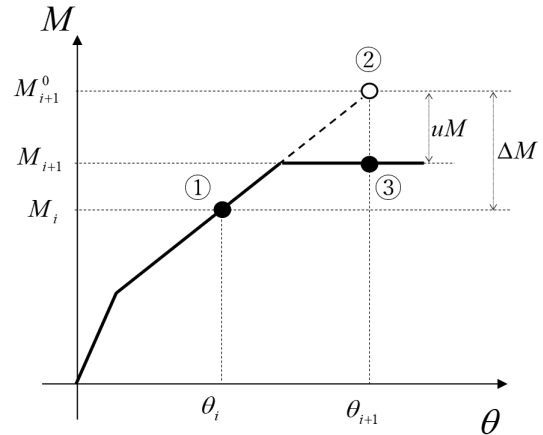


Fig. 2. Unbalanced force (over-shooting) from nonlinear spring

정되는 연성(flexibility)을 나타내며 탄성 거동 시에는 $L/6EI$, 비선형 거동 시에는 이력모델의 골격선 또는 이력 규칙(hysteretic rules)에 의해서 결정된다. 즉, 탄성한계를 초과한 힙 스프링의 연성은 증가(강성은 감소)하며 결과적으로 연성행렬 $[f_M]$ 의 대각 성분의 값이 증가한다.

2.2 불평형력 해소를 위한 수렴계산: 시스템 불평형력

비선형 증분 해석 시, 힙 스프링에 발생하는 모멘트와 회전각의 관계를 나타내는 구성방정식은 식 (2)와 같다

$$\{\Delta M\} = [k_M] \{\Delta \theta\} \quad (2)$$

여기서, $\{\Delta M\} = \{\Delta M_1, \Delta M_2\}^T$, $[k_M] = [f_M]^{-1}$,

$$\{\Delta \theta\} = \{\Delta \theta_1, \Delta \theta_2\}^T$$

강성법(변위법)에 기초한 구조물의 비선형해석에서는 현재 하중 스텝 (Fig. 2, $i+1$)에서 힙 스프링의 증분 변위($\{\Delta \theta\}$)를 산출한 후, 직전 하중 스텝 (Fig. 2, i)에서의 강성과 곱하여 모멘트 증분($\{\Delta M\}$)을 산출한다(식 (2)).

이때, 탄성 응답에서는 직전 하중 스텝에서 산출한 모멘트(M^i)와 현재 하중 스텝에서 구한 모멘트 증분(ΔM)의 합으로 현재 하중 스텝에서의 모멘트(M^{i+1})를 구할 수 있다. 그러나, 비선형 거동에 의해서 힙 스프링의 강성이 변하게 되면, 직전 하중 스텝의 강성(Fig. 2, ①에서의 기울기)에 의해서 산출된 모멘트(Fig. 2, ②)와 비선형 이력모델에서 결정되는 실제 모멘트(Fig. 2, ③)가 서로 다른 값을 갖게 되며, 이때 이 힘들 사이의 차이에 해당하는 불평형력(unbalanced force)이 발생한다(식 (3)). 건물에는 다수의 부재가 존재하므로 복수의 부재에서 발생하는 불평형력을 건물 전체의 운동방정식을 통해서 해소하게 된다. 이상의 과정은 부재의 양단에 비선형 힙 스프링을 적용하는 경우 발생하는 불평형력을 나타내고 있으며 이를 해소하기 위한 방법으로 (Modified) Newton-Raphson iteration method 등을 적용한다.

본 논문에서는 이와 같은 불평형력을 ‘시스템 불평형력’으로 표현하며, 후술하는 힙 스프링과 전단 스프링 사이에 발생하는 불평형력은 ‘부재 불평형력’으로 구분한다.

$$uM = (M^i + \Delta M) - M^{i+1} \quad (3)$$

$$\{\Delta M\} = [k_{MV}] \{\Delta \theta\} \quad (6)$$

2.3. 힘 스프링과 전단 스프링으로 구성된 부재

Fig. 3에 힘 스프링과 전단 스프링으로 구성된 모델을 나타내고 있다. 부재 양단의 힘 스프링과 부재 중앙의 전단 스프링은 서로 직렬 관계에 있으므로 연성행렬의 단순합(식(4))으로 표현될 수 있으며, 양단의 휨모멘트(M_1 , M_2)와 전단력(V)은 식(5)로 표현되는 힘의 평형조건을 만족해야 한다. 따라서, 힘 스프링과 전단 스프링으로 구성되는 부재의 구성 방정식은 식(6)과 같다.

$$[f_{MV}] = \begin{bmatrix} f_{M1} + f_0 & -f_0 \\ -f_0 & f_{M2} + f_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_V & f_V \\ f_V & f_V \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서, $f_v = L/GA$ (L : 부재길이, G : 전단탄성계수, A : 단면적)

$$V = [T_{MV}] \cdot \{M_1 \ M_2\}^T \quad (5)$$

여기서, $[T_{MV}] = [-1/Le \ -1/Le]$

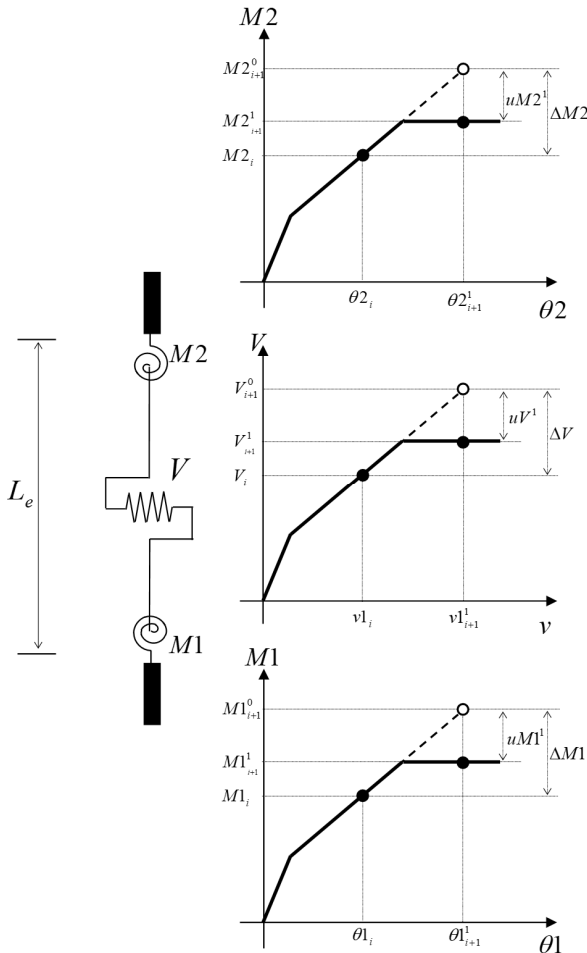


Fig. 3. Unbalanced forces from each spring

여기서, $[k_{MV}] = [f_{MV}]^{-1}$

힘 스프링만으로 구성된 부재(식(2))와 전단 스프링이 추가된 부재의 구성방정식(식(6))의 차이점은 연성행렬에 있어서 전단 성분이 추가될 뿐, 변형과 힘의 구성 성분에는 변함이 없다. 즉, 전단 스프링의 연성이 힘 스프링의 연성행렬에 추가되어 부재 전체의 연성이 증가하게 되며, 결과적으로 부재의 강성이 감소하게 된다. 이와 같은 부재 강성의 변화 정도는 전단 탄성계수(G) 및 부재 단면적(A)에 의해서 결정된다.

전단 스프링에서 발생하는 증분 전단력(ΔV)은 증분 모멘트와의 평형조건(식(7))에 의해서 산출한다. 이때, 증분 모멘트($\{\Delta M\}$)는 강성법에 의해서 산출된 증분 변위($\{\Delta \theta\}$)와 강성 행렬($[k_{MV}] = [f_{MV}]^{-1}$)의 곱으로 산출한다(식(7)).

$$\Delta V = [T_{MV}] \cdot \{\Delta M_1 \ \Delta M_2\}^T \quad (7)$$

비선형 해석에서 현재 하중 스텝($i+1$)에서 모든 스프링(힘 스프링과 전단 스프링)의 강성이 변한다고 가정하면 2.2절에서 기술한 바와 같이 힘 및 전단 스프링에서 각각 불평형력(시스템 불평형력)이 발생한다(식(8)).

$$\{uM\} = \{M\}^i + \{\Delta M\} - \{M\}^{i+1} \quad (8)$$

$$uV = V^i + \Delta V - V^{i+1}$$

또한, 힘 스프링과 전단 스프링은 서로 직렬관계에 있으므로 모멘트와 전단력은 항상 식(5)를 만족해야 한다. 그러나, 비선형거동에 의해서 두 스프링사이에서 식(9)와 같은 불평형력이 추가로 발생하며 이와 같은 불평형력(uMV)은 힘 스프링으로만 구성된 부재(2.1절, 2.2절)에서는 발생하지 않는다.

$$uMV = [T_{MV}] \cdot \{M^{i+1}\} - V^{i+1} \quad (9)$$

따라서, 힘 스프링과 전단 스프링으로 구성된 부재에 있어서는 비선형 거동에 의해서 발생하는 두 종류의 불평형력(식(8): 시스템 불평형력, 식(9): 부재 불평형력)을 모두 해소해야 부재 모델에서 요구되는 평형방정식을 만족하게 된다.

2.4 불평형력 해소를 위한 수렴계산: 부재 불평형력

비선형 힘 스프링만으로 구성된 부재에서 발생하는 불평형력(식(3), 시스템 불평형력) 또는 탄성 힘 스프링과 비선형 전단 스프링으로 구성된 부재의 전단 스프링에서 발생하는 ‘시스템 불평형력’(식(8))은 기존의 해석수법(Newton-Raphson iteration method, [4])을 통해서 해소 가능하므로, 본 절에서는 힘 스프링과 전단 스프링으로 구성되는 부재에서 발생하는 ‘부재 불평형력’(식(9))을 해소하기 위한 수렴 계산법을 제시한다. ‘시스템 불평형력’의 해소를 위한 수렴계산을 ‘NR-iteration’, 그리고 본 절에서 제시하는 ‘부재 불평형력’의 해소를 위한 수렴계산은 ‘MV-iteration’으로 구

분하여 지칭한다.

본 해석수법에서는 먼저 식 (9)의 평형조건을 만족하도록 수렴계산을 수행한 후, 그 결과로 식 (8)에서 발생하는 불평형력도 서로 일치하게 되는 결과를 보임으로써 2.1과 동일한 해소방법을 적용할 수 있게 된다.

Fig. 3에는 현재의 하중 스텝($i+1$)에서 힌스프링과 전단스프링의 강성이 동시에 변하는 상태(비선형 거동)를 나타내고 있으며 식 (10)으로 표현할 수 있다. 즉, 직렬관계에 있는 힌스프링과 전단스프링 사이의 평형방정식을 만족하지 못하는 상태를 나타내고 있다.

$$V^{i+1} = [T_{MV}] \cdot \{M^{i+1}\} \quad (10)$$

힌스프링과 전단스프링 사이의 평형방정식을 만족시키기 위한 미지의 증분력을 각각 $\{\delta M\}$ 과 δV 라고 하면, 식(10)은 식(11)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} V_{i+1} + \delta V &= [T_{MV}] \cdot \{M_{i+1}\} + [T_{MV}] \cdot \{\delta M\} \\ \delta V &= [T_{MV}] \cdot \{\delta M\} + ([T_{MV}] \cdot \{M_{i+1}\} - V_{i+1}) \end{aligned} \quad (11)$$

또한, 식 (9)를 이용하면 식 (11)은 식 (12)로 나타낼 수 있다.

$$\delta V = [T_{MV}] \cdot \{\delta M\} + uMV \quad (12)$$

힌 및 전단스프링으로 구성된 부재는 식(11)의 평형방정식을 만족함과 동시에 적합방정식도 만족해야 한다. 즉, 두 스프링 사이의 평형방정식을 만족시키기 위해서 가해진 미지의 증분력 $\{\delta M\}$ 과 δV 에 의해서 부재의 양단에 발생하는 힌 변형 $\delta\theta_M$ (식 (13))과 $\delta\theta_V$ (식 (14))은 식 (15)를 만족해야 한다.

$$\delta\theta_M = [f_M^{updated}] \cdot \{\delta M\} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \delta\theta_V &= [T_{MV}]^T \cdot [f_V^{updated}] \cdot \{\delta V\} \\ &= [T_{MV}]^T \cdot [f_V^{updated}] \cdot ([T_{MV}] \cdot \{\delta M\} + uMV) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\delta\theta_M + \delta\theta_V = 0 \quad (15)$$

여기서, $[f_M^{updated}]$ 와 $[f_V^{updated}]$ 는 힌 및 전단스프링의 이력 모델에 의해서 갱신되는 각각의 연성행렬을 의미한다.

따라서, 식 (13), (14), (15)로부터 미지의 증분력 ($\{\delta M\}$, δV)을 산출할 수 있다(식 (16)).

$$\{\delta M\} = [K_{MV}^{updated}] \cdot (-[T_{MV}]^T [f_V^{updated}] \cdot uMV) \quad (16)$$

여기서, $[K_{MV}^{updated}] = ([f_M^{updated}] + [T_{MV}]^T [f_V^{updated}] [T_{MV}])^{-1}$

이상의 계산과정은 양단부의 힌모멘트와 전단력의 차이(uMV , 식 (9))가 사전에 설정된 수렴조건(convergence tolerance)을 만족할 때까지 반복되며, 이 계산과정 중에 강성 값과 함께 $\{M_{i+1}\}$ 및 V_{i+1} 는 갱신된다. 따

라서, 수렴조건을 만족하였을 때의 반복계산 횟수를 n 이라고 하고, 각 스프링의 불평형력(식 (8))을 반복 횟수 n 을 이용해서 표현하면 식 (17)과 같다.

$$\begin{aligned} \{uM\} &= \{M^i\} + \{\Delta M\} - \{M^{i+1, (n)}\} \\ uV &= V^i + \Delta V - V^{i+1, (n)} \end{aligned} \quad (17)$$

여기서 $\{M^{i+1, (n)}\}$ 와 $V^{i+1, (n)}$ 는 ‘부재 불평형력’이 해소되어 힌스프링과 전단스프링 사이에는 서로 평형을 이루고 있는 상태이다.

직전 하중 스텝(i)에서도 힌 및 전단스프링 사이의 평형방정식을 만족하였다고 할 수 있으므로 식 (18)이 성립하며, 현재 하중 스텝($i+1$)에서도 수렴계산(MV -iteration)에 의해서 두 스프링 사이에 평형방정식을 만족하므로 식 (19)가 성립한다.

$$V^i = [T_{MV}] \{M^i\} \quad (18)$$

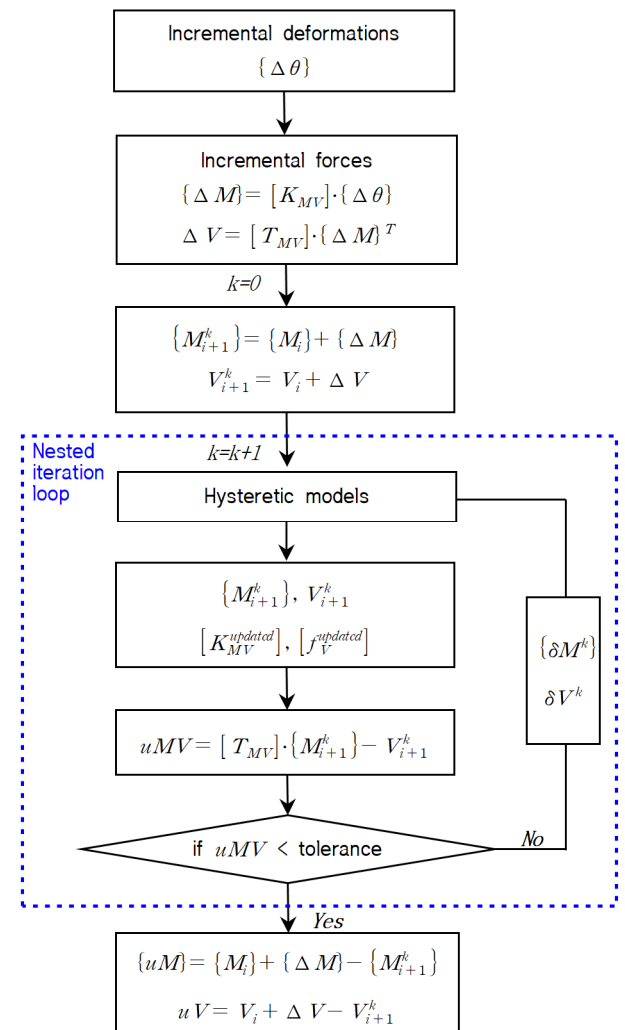


Fig. 4. Flow chart of iteration processes for resolving unbalanced forces

$$V^{i+1,(n)} = [T_{MV}] \{M^{i+1,(n)}\} \quad (19)$$

$$uV = [T_{MV}] \cdot \{uM\} \quad (20)$$

마지막으로 식 (7), (17), (18), (19)를 이용하여 식 (20)으로 표현할 수 있으며 이는 $\{uM\}$ 을 해소하면 ($\{uM\}=0$ 이 되면) uV 도 자동으로 해소됨을 의미한다. 따라서, 휨 스프링만으로 구성된 부재에서 발생하는 불평형력의 해소방법(2.2절)과 동일하게 $\{uM\}$ 을 *NR-iteration*으로 해소함으로써 휨 및 전단 스프링의 비선형 거동에 동반되는 두 종류의 불평형력이 해소된다. 이상의 과정은 *NR-iteration*과 *MV-iteration*의 두 종류의 수렴계산으로 구성되며 *NR-iteration* 계산의 내부에 *MV-iteration*계산을 수행한다 (Fig. 4). 즉, *MV-iteration*을 통해서 ‘부재 불평형력’을 해소한 이후에 *NR-iteration*의 수행으로 ‘시스템 불평형력’을 해소하여 부재 및 시스템 전체의 평형상태를 유지하게 된다.

3. 해석대상 및 방법

3.1 해석대상

본 연구에서는 휨 스프링과 전단 스프링 사이에 발생하는 불평형력의 해소 유무에 따른 응답차이를 검토하기 위하여 Fig. 5와 같이 단순한 평면골조를 대상으로 비선형 지진응답해석을 수행하였다. 특히, 본 연구에서는 전단 변형 및 전단 파괴모드를 고려한 철근콘크리트 부재가 주요 대상인 점을 고려하여 예제 구조물을 철근콘크리트 골조로 설정하였다.

대상 골조의 보는 휨 스프링만으로 모델링하였으며 기둥 부재는 휨, 전단, 그리고 축방향 스프링으로 구성하였다. 휨 및 전단 스프링의 비선형 이력모델은 Takeda model[3]을 적용하였으며, 축방향 스프링은 탄성 모델을 적용하였다. 휨 및 전단 스프링의 골격선 설정을 위한 항복강도는 전단 강도에 대한 휨 강도의 비율, 즉 강도비로 설정하였다. 예를 들어, 강도비가 0.5인 경우는 양단에서 휨 강도 기록 시의 전단력에 대한 전단 강도의 비가 0.5임을 의미하며, 이는 전단 강도가 휨 강도에 비해 작으므로 전단파괴 선형의 파괴모드를 나타낸다. 강도비가 1을 초과하는 경우에는 전단 스프링은 항상 탄성 상태를 유지하게 된다. 기둥과 보의 휨 강도 및 단면 크기는 동일한 값을 적용하였으며, 균열 강도는 항복 강도의 1/3배, 항복 이후 경화 구역의 강성은 초기강성의 0.5%로 설정하였다.

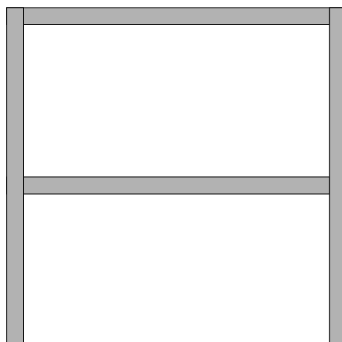


Fig. 5. Analysis target structure

Table. 1 Analysis information for target structure

	L (m)	B (mm)	D (mm)	E (GPa)	G (Gpa)	Mc (kN*m)	My (kN*m)	α_y^*	α_2^{**}
Column	2.5	500	500	23	0.4E	120	360	0.2	0.005
Beam	5	500	500	23		120	360	0.2	0.005

* : yield stiffness ratio in Takeda model

** : hardening factor in Takeda model

전술한 바와 같이 본 연구의 주요 목적은 휨 및 전단 스프링 사이에 발생하는 불평형력의 해소 유무에 따른 응답 차이의 분석이므로 해석 대상 구조물의 상세 제원(단면 상세, 배근 상세 등)은 특정 프로토타입을 상정한 것이 아닌 가능한 단순한 모델이 되도록 설정하였다(Table 1). 즉, 본 연구에서 제시하는 수렴계산기법의 적용성 및 적용 유무에 따른 해석 결과는 해석 대상의 특성에 큰 영향을 받지 않는다고 할 수 있다.

3.2 해석 방법

지진응답해석을 위해서 El Centro 1940(NS) 지진파를 입력하였으며 감쇠비는 5%의 순간 강성(instantaneous stiffness) 비례형 감쇠를 적용하였다. 지진동 데이터의 sampling rate는 50Hz이며 수치적분 시 적용된 적분 시간 간격은 0.01초로 해석을 수행하였다.

전단 스프링의 유무 및 두 종류의 불평형력(‘시스템 불평형력’, ‘부재 불평형력’)의 해소 유무가 해석 결과에 미치는 영향을 검토하기 위하여 총 3가지의 비교 대상(Fig. 6, Case-1, Case-2, Cse-3)을 설정하였다. 여기서, M-model은 휨 스프링만으로 구성된 모델, MV-model은 휨 스프링과 전단 스프링이 직렬로 구성된 모델을 의미한다.

(1) Case-1: 기둥 부재에 있어서 비선형 전단 스프링의 유무에 따른 해석 결

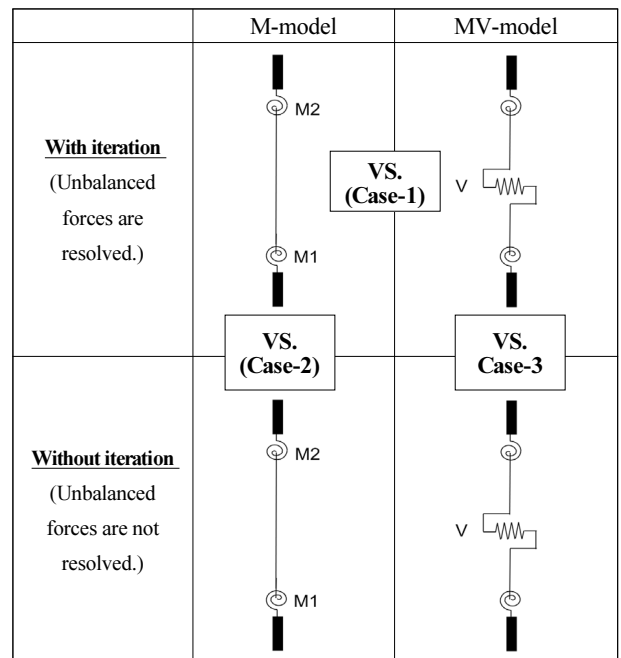
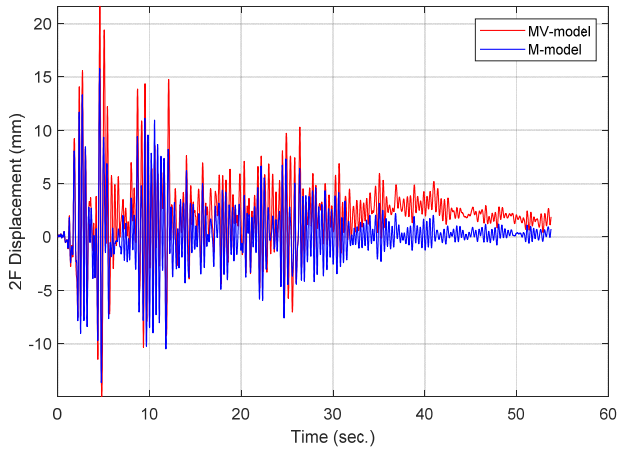
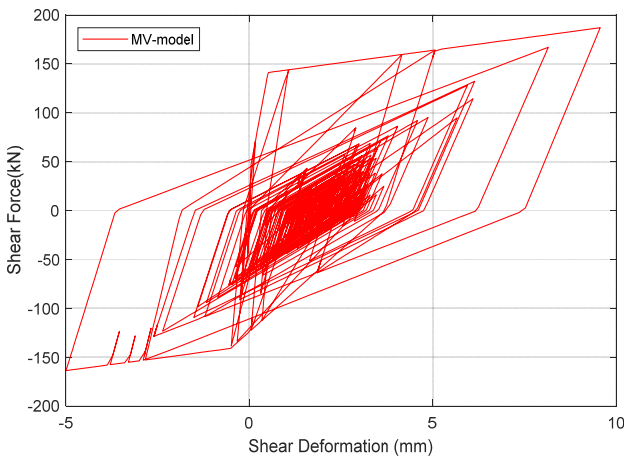


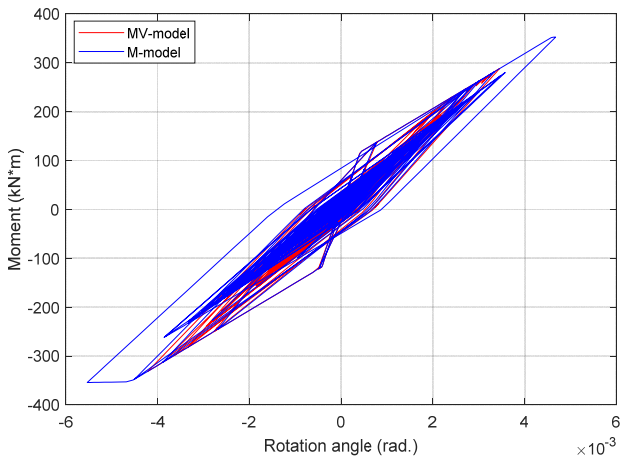
Fig. 6. Analysis Cases



(a) Displacements of MV-model and M-model



(b) Hysteretic behavior of shear spring in MV-model



(c) Hysteretic behaviors of flexural bending springs

Fig. 7. MV-model vs. M-model

과를 비교(M-model과 MV-model의 비교)

- (2) Case-2: M-model에 있어서 불평형력 해소 유무에 따른 결과를 비교 (NR-iteration의 적용 유무).
- (3) Case-3: MV-model에 있어서 불평형력 해소 유무에 따른 결과를 비교 (MV-iteration의 적용 유무).

4. 해석 결과

4.1 Case-1: 전단 스프링 유무에 따른 응답 비교

본 절에서는 비선형 전단 스프링의 유무에 따른 응답 차이를 검토하였다. 해석 대상골조의 기둥을 힙 및 전단 스프링으로 모델링한 경우(MV-model)와 힙 스프링만을 고려한 경우(M-model)의 해석결과를 Fig. 7에 나타내었다. 본 절에서는 수렴계산의 유무에 따른 영향을 검토하는 것이 아닌 단지 비선형 전단 스프링의 추가에 따른 영향을 검토하였다. 따라서 두 가지 해석 모델 모두 수렴계산을 수행한 결과를 나타내고 있다.

강도비(전단 강도/힙 강도 시의 전단력)는 0.5로 설정하였으며 보의 힙 강도는 기둥의 힙 강도와 동일한 값을 적용하였다. 해석 대상골조가 비선형 거동을 나타내기 위해서 지진동(EI centro 1940, NS)의 진폭을 1.5배로 입력하였다.

변위 응답의 비교 결과(Fig. 7(a)), 비선형 전단 스프링이 추가된 골조(MV-model)의 1층 층간 변위(2층 바닥 수평 변위)가 힙 스프링만으로 구성된 골조(M-model)의 변위보다 크게 나타남을 알 수 있다. 이는 식(4)를 통해서 알 수 있듯이 전단 스프링을 추가함으로써 부재 강성이 감소하고 전단 스프링에서 비선형 거동이 발생하여 동일한 지진동 입력에 대해서 변위가 더 크게 산출된 결과라고 할 수 있다.

강도비가 0.5인 MV-model은 전단 강도가 힙 강도에 비해서 현저히 작게 설정된 경우(전단파괴 선행)로서 전단 스프링이 힙 스프링보다 먼저 항복하고 전단 스프링의 비선형 거동(Fig. 7(b))이 힙 스프링의 비선형 이력 거동(Fig. 7(c))에 비해서 탁월한 것을 알 수 있다. 또한, MV-model에서 전단 스프링의 비선형 거동이 탁월하여 힙 스프링의 응답은 M-model의 힙 응답에 비해서 상대적으로 작은 결과를 나타내고 있다.

이는 전단 거동이 탁월한 실제 RC 기둥에서 나타나는 현상과 부합되는 결과라고 할 수 있다. 즉, 전단파괴 선행의 RC 기둥의 상하 양단부(주각/주두)에서는 힙 손상이 적게 관찰되며 대신 대각선의 전단균열과 최종적으로는 전단보강근의 항복, 파단에 의한 사인장 전단 파괴가 관측되는 손상 파괴 과정과 유사한 양상을 나타내고 있다고 할 수 있다.

4.2 Case-2: 시스템 불평형력의 해소 유무에 따른 응답비교

본 절에서는 MV-iteration의 적용 유무에 따른 영향을 검토하기 위해 전단 스프링이 없는 M-model을 대상으로 힙 스프링에서 발생하는 불평형력(시스템 불평형력)의 해소 유무가 해석 결과에 미치는 영향을 검토하였다. 이를 위해서 Fig. 8(a)의 2층 바닥 좌측 절점(Node 3)에서 산출된 불평형력(unbalanced force, UF , 식(21))으로 평형상태를 확인하였다.

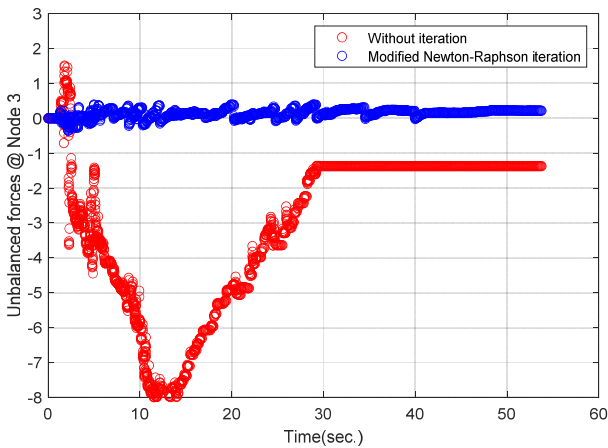
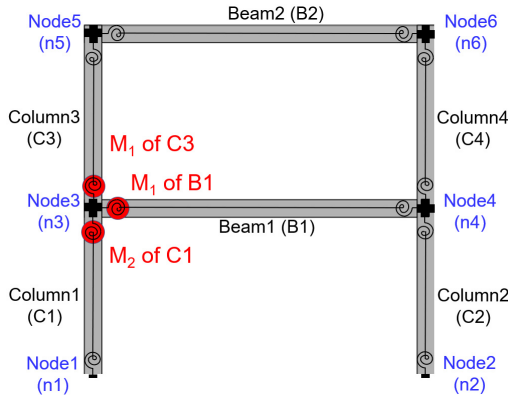
$$UF(@node\ 3) = MLSUBC1_2 + LSUBC3M_1 + LSUBB1M_1 \quad (21)$$

여기서, $MLSUBC1_2$: C1 기둥의 상단의 힙 모멘트, $LSUBC3M_1$: C3기둥의 하단 힙모멘트, $LSUBB1M_1$: B1 보의 좌단 힙모멘트

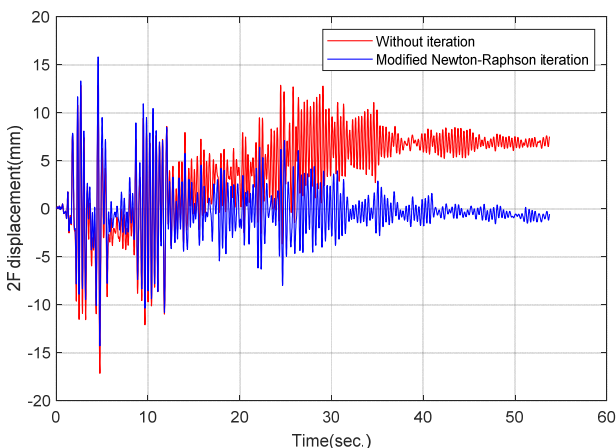
해석대상 구조물이 탄성 거동을 하면 식(21)에서 계산된 값은 항상 0이 되며 이를 평형 상태라고 할 수 있다. 그러나 비선형 거동을 하게 되면 식

(21)의 값은 0이 아닌 값을 나타내고 이 값을 불평형력이라고 한다. 이 값을 해소하기 위해서 즉, 0에 가까운 값(convergence tolerance)으로 만들어 주기 위한 수렴 계산(Newton-Raphson iteration 등)을 수행하였다.

Fig. 8(b)는 수렴계산의 유무에 따라서 식 (21)에 의해서 계산된 값을 나타내고 있다. 수렴계산을 수행하지 않은 해석 결과에서는 불평형력이 상대적으로 큰 값을 나타내고 있는 반면, 수렴계산을 수행한 경우에는 불평형력이 일정값(convergence tolerance)을 초과하지 않고 있다. 이는 불평형력의 해소를 통해서 운동방정식의 평형상태가 성립함을 의미하며, 이와 같은



(b) Unbalanced forces at Node 3



(c) Displacement responses at 2nd floor

Fig. 8. Effects of iteration process (NR-iteration)

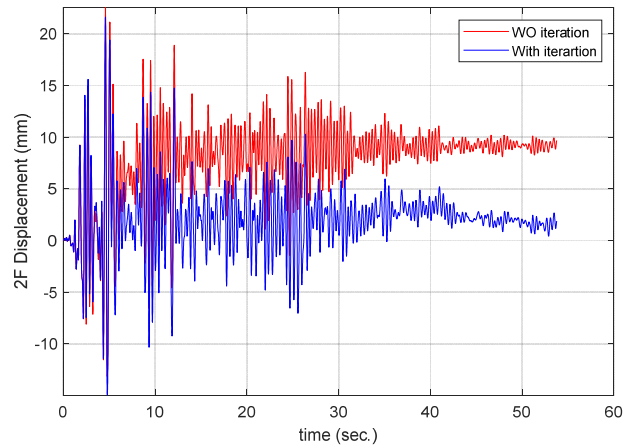
수렴 결과는 모든 절점에서 산출되었다.

불평형력의 해소 유무에 따른 변위 응답의 차이를 Fig. 8(c)에 나타내었다. 수렴계산을 수행하지 않은 해석 결과에서는 변위가 양의 방향으로 편향되는 결과를 보이는 반면, 수렴계산을 수행한 결과에서는 이와 같은 변위의 편중 현상이 나타나지 않음을 확인할 수 있다.

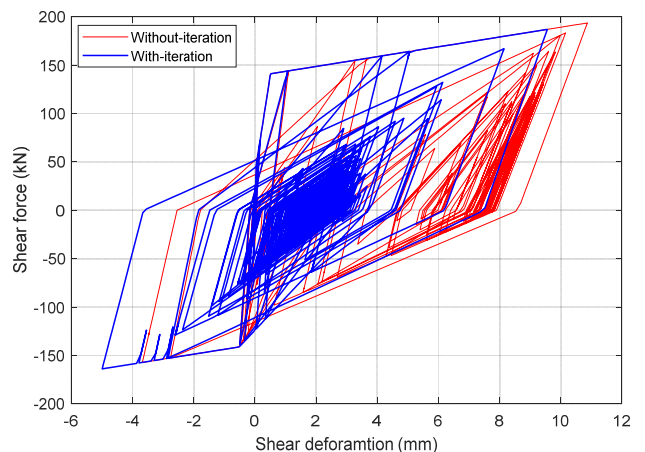
4.3 Case-3: 부재 불평형력의 해소 유무에 따른 응답비교

해석 대상 골조는 비선형 휨 및 전단 스프링으로 모델링하였으며, 휨 강도에 대한 전단 강도비는 0.5로 설정하였다. 전단 스프링과 휨 스프링에서 발생하는 불평형력의 해소 유무에 대한 해석 결과를 Fig. 9에 나타내었다. Fig. 9(a)는 1층의 층간 변위를 나타내고 있으며 불평형력 해소를 위한 수렴계산을 수행하지 않은 경우에는 변위의 편중 현상이 관찰된다. Fig. 9(b)에는 1층 기둥의 전단 스프링에서 산출된 이력 거동을 비교하고 있다. 불평형력이 해소되지 않은 해석 결과(수렴계산)에서 양의 방향으로 응답이 편중되는 경향을 보이는 반면, 수렴계산을 수행한 해석 결과에서는 전단 변형에 있어서 대칭인 형상을 보이고 있다. 이와 같은 응답의 편중 결과는 불평형력이 해소되지 않고 일정 방향으로 축적된 결과로 사료된다.

동일 기둥에서 비선형 휨 스프링과 전단 스프링에서 발생하는 전단력을

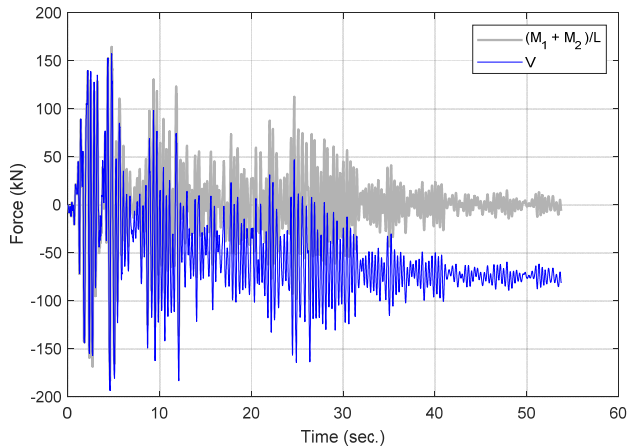


(a) Displacement responses at 2nd floor

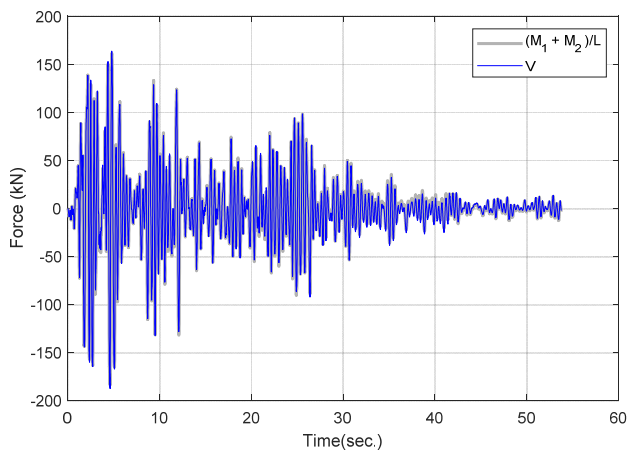


(b) Hysteretic behaviors of shear springs

Fig. 9. Effects of iteration process (MV-iteration)



(a) Without MV-iteration



(b) With MV-iteration

Fig. 10. Comparison of shear forces between flexural bending and shear springs

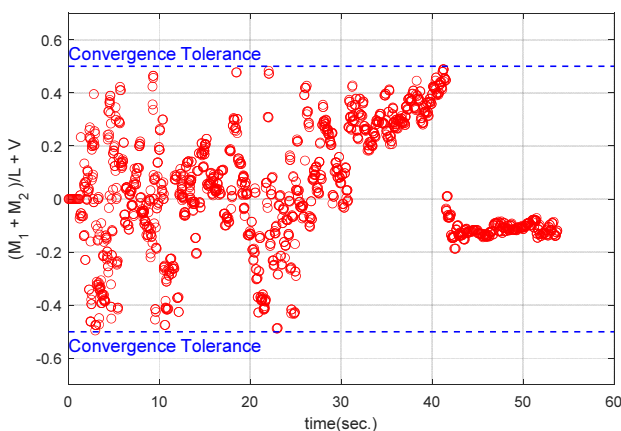


Fig. 11. Unbalanced forces between flexural and shear springs

비교하여 Fig. 10에 나타내었다. 기둥의 상하단 휨 스프링에서 발생하는 모멘트의 합($M_1 + M_2$)을 기둥 길이로 나눈 값을 휨 스프링에서 발생하는 전단력으로 산출하였으며, 이 값을 전단 스프링에서 발생하는 전단력과 비교하였다. 수렴계산(NR-iteration)을 수행하지 않은 Fig. 10(a)에서는 휨 및 전단 스프링에서 발생하는 전단력의 값에 큰 차이가 발생함을 알 수 있다. 즉,

식 (10)의 상태를 나타내고 있다. 그러나 수렴계산을 수행한 Fig. 10(b)에서는 휨 및 전단 스프링에서의 전단력의 값이 매우 유사한 결과를 나타냄을 알 수 있으며 이는 휨과 전단 스프링 사이에 평형상태를 유지하고 있음을 의미한다. Fig. 11에 두 값의 차이를 도시하였으며 이 차이의 최댓값은 사전에 설정한 수렴조건 값을 나타낸다. 즉, 휨 스프링에 의한 전단력과 전단 스프링에서의 전단력의 차이가 일정값(tolerance) 이하이면 수렴계산을 종료하는 조건을 설정하게 되며 이때 일정값에 해당하는 것이 Fig. 11에서의 최댓값이다. 이와 같은 수렴 조건은 3~4회 정도의 반복 계산을 통해서 만족하는 결과를 나타내었다.

5. 결론

본 연구에서는 건물의 비선형 해석모델로서 널리 사용되는 집중진도 모델을 적용함에 있어서 휨 스프링과 전단 스프링 사이에 발생하는 불평형력을 해소하기 위한 수렴계산 방법을 제안하였으며, 수렴계산의 유무에 따른 해석 결과의 비교 분석을 통해서 다음과 같은 결론을 도출하였다.

- 1) 휨 스프링과 전단 스프링이 직렬관계로 구성된 부재의 경우, 전단 스프링을 통해서 전단변형을 고려하게 됨으로써 휨 스프링만으로 구성된 부재에 비해서 동일 지진하중에 대해서 더 큰 변위 응답이 산출되었다.
- 2) 휨 스프링만으로 구성된 기둥의 비선형 거동 시, 불평형력(‘시스템 불평형력’)을 해소하지 않은 변위 응답은 한 방향으로 편중된 결과를 보이는 반면, 수렴 계산(Newton-Raphson iteration)을 수행한 결과에서는 이와 같은 편중 현상이 발생하지 않았다. 이는 수렴계산을 적용하지 않을 경우, 해소되지 않고 축적되는 불평형력에 의한 영향으로 사료된다.
- 3) 휨 및 전단 스프링 사이에 발생하는 불평형력(‘부재 불평형력’)의 해소를 위해서 본 연구에서 제안된 수렴계산 방법을 적용한 결과, 휨 스프링과 전단 스프링에서 발생하는 전단력의 차이를 수렴 조건 값(convergence tolerance) 이하로 유지함으로써 두 스프링 사이의 평형 조건이 만족됨을 확인하였다.
- 4) 한편, 휨 및 전단 스프링 사이에 평형 조건을 만족하지 못하는 해석결과(‘부재 불평형력’을 해소를 위한 수렴계산을 적용하지 않은 해석)에서는 전단 스프링의 이력거동에서 일정 방향으로의 편중 현상이 관찰되었으며 변위 응답 또한 편중되는 결과를 나타내었다.

이상의 검토 결과로부터 휨 및 전단 스프링으로 구성된 부재가 비선형 거동을 함으로써 발생하는 두 종류의 불평형력은 본 연구에서 제안된 수렴계산 방법에 의해서 해소 가능함을 보였으며, 신뢰할 수 있는 비선형 지진 응답해석결과 산출을 위해서는 수렴계산의 적용을 통한 불평형력의 해소가 필요함을 제시하였다.

본 논문에서는 실제 건물의 응답 또는 실험 결과와의 비교를 통해서 해석 결과의 정확성을 검토할 수는 없으나, 불평형력이 해소되지 않은 해석 결과는 명확한 수치 해석상의 오류이므로 수렴계산을 통한 불평형력의 해소는 반드시 필요하다고 할 수 있다. 따라서, 비선형 전단 스프링을 추가하여 해석하는 경우에는 불평형력의 해소 가능 여부에 대한 확인 등 비선형 모델 선정에 있어서 주의가 요구된다.

/ 감사의 글 /

본 연구는 산업통상자원부(MOTIE)와 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구과제입니다.(No. 20181510102380)

/ REFERENCES /

1. Giberson MF, Two Nonlinear Beams with Definitions of Ductility. J. Struct. Div. ASCE, 1969 Feb;95(2):137-157.
2. Clough RW, Benuska KL, Wilson EL, Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings. Proceedings of the 3rd World Conference on Earthquake Engineering; 1965; New Zealand, II(II);68-89.
3. Takeda T, Sozen MA, Nielsen NN, Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes. J. Struct. Div. ASCE, 1970 Dec;96(12):2557-2573.
4. Chopra AK, Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering, 5th ed. : Pearson; c2012. 960 p.
5. Bathe KJ, Finite Element Procedures. NJ, USA: Prentice-Hall; c1996.
6. Riks E, The application of Newton's method to the problem of elastic stability. J. Appl. Mech. ASME, 1972;39:1060-1065.
7. Wempner GA, Discrete approximation related to nonlinear theories of solids. Int. J. Solids, Struct. 1971;7:1581-1599.
8. Structural Engineering Institute and American Society of Civil Engineers (SEI/ASCE). ASCE Standard, ASCE/SEI, 41-17: Seismic Evaluation and Retrofit of Existing Buildings. Reston Virginia: American Society of Civil Engineers; c2017.