



순차 컨벡스 프로그래밍 기반 무인기 설계 형상의 성능 분석

고효상¹, 최한림², 장종윤³, 김 준³, 유구현³

Sequential Convex Programming Based Performance Analysis of UAV Design

Hyo-Sang Ko¹, Hanlim-Choi², Jong-Youn Jang³, Joon Kim³ and Gu-Hyun Ryu³

Department of Aerospace Engineering, KAIST, Daejeon, Republic of Korea^{1,2}

LIG Nex1, Gyeonggi-do, Republic of Korea³

ABSTRACT

Sequential convex programming based performance analysis of the designed UAV is performed. The nonlinear optimization problems generated by aerodynamics are approximated to second order program by discretization and convexification. To improve the performance of the algorithm, the solution of the relaxed problem is used as the initial trajectory. Dive trajectory optimization problem is analyzed through iterative solution procedure of approximated problem. Finally, the maximum final velocity according to the performance of the actuator model was compared.

초 록

순차 컨벡스 최적화 기법을 사용한 궤적 최적화로 무인기 기초 설계 형상의 성능 분석을 수행했다. 외부 공력 모델로 설계한 비선형 궤적 최적화 문제는 볼록화와 이산화를 통해 2차 원뿔 프로그램 문제로 근사 되었다. 알고리즘의 성능 향상을 위해 제약조건을 완화한 문제의 해를 초기 궤적으로 사용했다. 근사 해의 반복적인 탐색으로 하강 궤적 최적화 문제들을 분석했으며 설계 형상의 구동부 성능에 따른 최대 도달 속도를 비교했다.

Key Words : Sequential Convex Programming(순차 컨벡스 프로그래밍), Trajectory Optimization(궤적 최적화), Performance Analysis(성능 분석)

Nomenclature

α	= angle of attack	[rad]	c	= thrust constant	[-]
γ	= flight path angle	[rad]	c_α	= distance between c.g and main wing leading edge	[m]
δ	= elevator angle	[rad]	c_δ	= distance between c.g and elevator leading edge	[m]
Δ_x	= state trust region	[-]	C_D	= drag coefficient	[-]
Δ_u	= control input trust region	[-]	C_H	= hinge moment coefficient	[-]
θ	= pitch angle	[rad]	C_L	= lift coefficient	[-]
ρ	= density	[kg/m ³]	C_M	= moment coefficient	[-]

† Received : May 12, 2022 Revised : August 1, 2022 Accepted : August 19, 2022

¹ Graduate Student, ² Professor, ³ Chief Researcher Engineer

² Corresponding author, E-mail : hanlimc@kaist.ac.kr, ORCID 0000-0003-3985-0419

© 2022 The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences

D	= drag	$[N]$	T_{act}	= moment load applied to actuator	$[Nm]$
D_{ref}	= reference length	$[m]$	u	= control input variables	$[-]$
f_{path}	= path constraint	$[-]$	v_{air}	= speed of sound	$[m/s]$
g	= gravitational acceleration	$[m/s^2]$	V	= velocity	$[m/s]$
h	= altitude	$[m]$	x	= state variables	$[-]$
H	= hinge moment	$[Nm]$	Subscripts		
I_{yy}	= moment of inertia	$[kgm^2]$	j	= derivative with respect to j ($j = \alpha, \delta, \rho, C_L, h, m, M, q, u, v_{air}, V, x$)	
k_Q	= heat load constant	$[-]$	0	= initial condition	
L	= lift	$[N]$	f	= final condition	
m	= mass	$[kg]$	i	= i-th data of a trajectory	
Mo	= moment	$[Nm]$	max	= maximum	
n_{max}	= maximum load factor	$[-]$	min	= minimum	
N_c	= number of constraints	$[-]$	Superscripts		
q	= angular velocity	$[rad/s]$	*	= nominal	
Q	= dynamic pressure	$[Pa]$	$()$	= derivative with respect to time	
Q_{heat}	= heat load	$[kW/m^2]$			
S_{ref}	= reference area	$[m^2]$			
t	= time	$[sec]$			
T	= thrust	$[N]$			

1. 서 론

무인기는 농업, 물류, 통신 등의 다양한 응용 분야에 활용되고 있으며 관성 측정 장치(IMU, Inertial Measurement Unit), 제어 기법 등이 발달함에 따라 감시, 정찰, 전투와 같은 군사 응용 분야에도 활발히 활용되고 있다. 미국의 경우 대형 리퍼 MQ-9과 중형 프레데터 MQ-1를 10년 이상 운용해 왔으며 세계 최대 UAV 수출국인 이스라엘은, Heron과 Harpy 등의 장시간 체공할 수 있는 무인기를 개발하여 관련 기술과 함께 전 세계 여러 국가에 수출하였다[1]. 국내에서는 RQ-101의 개발로 세계 10번째 무인기 생산국이 되었으며, 이후 30년간의 연구 개발로 현재 차기 군단 무인기의 개발을 진행 중이다.

무인기 개발 초기 단계에는 목표로 하는 임무 프로파일과 형상 설계가 복합적으로 진행되기 때문에 설계한 형상의 공력 성능이 요구된 임무 프로파일에 적합한지 분석하는 과정이 필요하다. 하지만 요구 성능 파라미터가 자주 변하고 그에 따라 형상과 공력 성능 등이 자주 변하는 초기 설계 단계에서는 그 적합성을 판단하는 데 어려움이 있다.

이를 위해 본 연구에서는 무인기의 임무 궤적 최적화를 통한 설계 형상의 성능 분석 방법을 제안하였다. 기존의 궤적 최적화 등의 다양한 최적화 문제는 비선형 프로그래밍(nonlinear programming)을 기반으로 해결

했다[2]. 하지만 해당 기법은 초기 조건에 따른 수렴성, 긴 소요 시간 등의 문제가 있어 다양한 형상과 임무 궤적에 대해 빠르고 강건한 분석이 요구되는 본 연구의 문제에 적용하기에는 적합하지 않다[3]. 이를 해결하기 위하여 본 연구에서는 궤적 최적화 문제에 순차 컨벡스 프로그래밍(Sequential Convex Programming) 기법을 적용하여 설계 무인기의 임무 프로파일을 분석하였다.

순차 컨벡스 프로그래밍은 기존의 최적화 문제를 선형화와 이산화로 통해 다항 시간 내에 해결 가능하다고 알려진[4] 형태로 재정의한 후 반복적으로 최적화를 시행하여 해를 수렴시키는 기법으로, 비선형 프로그래밍이 가지던 수렴성과 소요 시간의 문제를 보완한 기법이다[3]. 이를 적용하면 본 연구에서 고려한 다양한 궤적 최적화 문제를 빠르게 해결할 수 있으며, 결과 궤적을 기반으로 공력 성능과 임무 프로파일 간의 영향을 비교 분석하였다.

본 논문은 다음과 같은 순서로 쓰였다. 2.1장에서는 사전 제작한 기초 설계 형상의 종축 공력 계수와 엘리베이터에 대한 힌지 모멘트 계수의 군사 모델을 소개했다. 2.2장에서는 해당 모델을 기반으로 하여 순차 컨벡스 프로그래밍 적용을 위한 궤적 최적화 문제를 정의하였으며 목적에 따라 다양하게 정의된 최적화 문제의 결과를 2.3장에서 분석하였다.

II. 본 론

2.1 무인기 기초 설계 형상 모델

궤적 최적화 문제의 설계 및 최적해 탐색을 위해 아래 Fig. 1과 같이 사전에 제작한 기초 설계 단계의 모델을 사용했으며 공력 성능은 XFLR5로 분석한 값을 사용했다.

XFLR5는 포텐셜 이론을 기반으로 하여 3차원 비행체 형상의 공력 해석을 위해 개발된 프로그램으로 2차원 날개에 대한 해석 프로그램을 기반으로 하였기 때문에 일부 유동 조건에 대한 신뢰도가 낮을 수가 있다[5]. 이 때문에 본 논문에서 XFLR5를 사용하여 분석한 공력은 고려한 비행 조건에 대해 해석 정확성을 보장하기는 어려우나, 본 연구는 공력보다 동역학적 관점에서 문제에 접근하고자 하였으므로 공력 정확성은 고려하지 않고 해당 프로그램의 해석 결과를 사용하였다.

3-자유도 동역학 모델 적용을 위해 XFLR5로 무인기 모델의 양력, 항력, 모멘트를 다양한 받음각, 엘리베이터 각에 대해 분석한 뒤 식 (1)과 Table 1처럼 근사하여 적용했다[6].

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L_0} + C_{L_\alpha} \alpha + C_{L_\delta} \delta \\ C_D &= C_{D_0} + C_{D_{c_l}} C_L^2 + C_{D_\delta} \delta^2 \\ C_M &= C_{M_0} + C_{M_\alpha} \alpha + C_{M_\delta} \delta \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} H &= QS_{ref} C_H \\ Q &= \frac{1}{2} \rho V^2 \\ C_H &= C_{H_0} + C_{H_\alpha} \alpha + C_{H_\delta} \delta \end{aligned} \quad (2)$$

또한 이후 구동기 성능 한계에 의한 영향을 분석하기 위해 비행 조건에 따른 힌지 모멘트를 XFLR5로 분석한

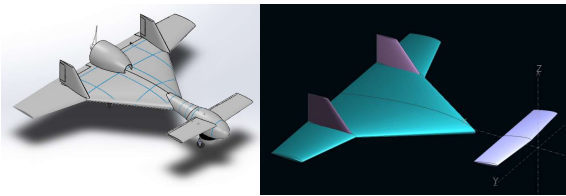


Fig. 1. 3D Model

Table 1. Aerodynamic Coefficients
($\rho = 1.174kg/m^3, V = 40m/s$)

C_L	C_{L_0}	C_{L_α}	C_{L_δ}
	0.1412	3.5076	1.1946
C_D	C_{D_0}	$C_{D_{c_l}}$	C_{D_δ}
	0.00743	0.09722	0.1171
C_M	C_{M_0}	C_{M_α}	C_{M_δ}
	0.02157	-0.2359	-0.6646

Table 2. Hinge Moment Coefficients ($\rho = 1.174kg/m^3$)

C_H	C_{H_0}	C_{H_α}	C_{H_δ}
$V = 40m/s$	-3.056e-4	-4.09e-5	-1.426e-4
$V = 100m/s$	-2.071e-4	-2.779e-5	-9.575e-5

뒤 식 (2)처럼 근사했다. 근사 식에 사용된 계수는 비행 동압에 따라 값이 스케일링 되는 경향이 있어 Table 2처럼 두 지점에서의 값을 보간하여 사용했다.

2.2 순차 컨벡스 프로그래밍

이 절에서는 임무 프로파일과 성능 분석을 위한 순차 컨벡스 프로그래밍 적용 과정을 소개한다. 먼저 앞에서 분석한 설계 형상의 공력 성능을 최적화 문제에 적용하기 위해 3-자유도 종축 비행 동역학 식을 구성하였다. 그것을 기반으로 궤적 최적화 문제를 정의한 뒤 선형화와 이산화를 통해 문제를 재정의하여 순차 컨벡스 프로그래밍을 적용할 수 있도록 하였다.

2.2.1 3-자유도 종축 비행 동역학

임무 해석을 위해 고려한 무인기의 3-자유도 종축 비행 동역학은 식 (3)과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{h} &= \frac{\left(\frac{T \cos(\alpha) - D}{m} - g \sin(\gamma)\right)}{v_{air}} \\ \dot{h} &= V \sin(\gamma) \\ \dot{\alpha} &= q + \frac{g \cos(\gamma)}{V} - \frac{L + T \sin(\alpha)}{m V} \\ \dot{q} &= \frac{M_0}{I_{yy}} \\ \dot{\theta} &= q \\ \dot{m} &= -cT \end{aligned} \quad (3)$$

시스템 모델의 상태변수는 $x = [M, h, \alpha, q, \theta, m]$ 로 마하 수, 고도, 받음각, 각속도, 자세 각, 질량으로 정의했으며 제어 입력변수는 $u = [\delta, T]$ 로 엘리베이터 각도와 추력으로 정의하였다. 그에 따라 2.1장의 성능 파라미터값을 각 속도의 영향을 고려한 상대 받음각 α_{eff} , 상대 엘리베이터 각 δ_{eff} 에 대해 식 (4)와 같이 계산했다.

$$\begin{aligned} L &\equiv QS_{ref} C_L(\alpha_{eff}, \delta_{eff}) \\ D &\equiv QS_{ref} C_D(\alpha_{eff}, \delta_{eff}) \\ M_0 &= QS_{ref} C_M(\alpha_{eff}, \delta_{eff}) D_{ref} \\ \alpha_{eff} &= \alpha + \frac{c_{d\delta}}{V}, \delta_{eff} = \delta + \frac{c_{\delta\delta}}{V} \end{aligned} \quad (4)$$

식 (3)과 (4)로 표현되는 비행 동역학 식은 x 와 u 에 대해 비선형이므로 순차 컨벡스 프로그래밍에 적용하기 위해 식 (5)~(8)과 같이 선형 근사하였다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [\dot{M}, \dot{h}, \dot{\alpha}, \dot{q}, \dot{\theta}, \dot{m}] \equiv f(x, u) \\ &= f(x^*, u^*) + A(x - x^*) + B(u - u^*) \end{aligned} \quad (5)$$

$$(A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, u^*)}, B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x^*, u^*)})$$

$$A = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq 6 \quad (6)$$

$$B = [b_{ij}], 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq 2$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{D_M}{mv_{air}}, a_{12} = -\frac{D_h}{mv_{air}} - \dot{M} \frac{v_{air_h}}{v_{air}}, \\ a_{13} &= \frac{-T \sin(\alpha) - D_\alpha + g \cos(\gamma)}{m}, a_{14} = -\frac{D_q}{mv_{air}}, \\ a_{15} &= -\frac{g \cos(\gamma)}{v_{air}}, a_{16} = -\frac{T \cos(\alpha) - D}{m^2 v_{air}}, \\ a_{21} &= v_{air} \sin(\gamma), a_{22} = v_{air_h} M \sin(\gamma), a_{23} = -V \cos(\gamma), \\ a_{24} &= 0, a_{25} = V \cos(\gamma), a_{26} = 0, \\ a_{31} &= -\frac{g \cos(\gamma)}{v_{air} M^2} - \frac{m V L_M - (L + T \sin(\alpha))(mv_{air})}{(mV)^2}, \\ a_{32} &= -\frac{g \cos(\gamma) v_{air_h} - m V L_h - (L + T \sin(\alpha))(m M v_{air_h})}{v_{air}^2 M (mV)^2}, \\ a_{33} &= \frac{g \sin(\gamma)}{V} - \frac{L_\alpha + T \cos(\alpha)}{mV}, \\ a_{34} &= 1 - \frac{L_q}{mV}, a_{35} = -\frac{g \sin(\gamma)}{V}, a_{36} = \frac{L + T \sin(\alpha)}{m^2 V}, \\ a_{41} &= \frac{M_M}{I_{yy}}, a_{42} = \frac{M_h}{I_{yy}}, a_{43} = \frac{M_\alpha}{I_{yy}}, a_{44} = \frac{M_q}{I_{yy}}, \\ a_{45} &= 0, a_{46} = -\frac{M \dot{I}_{yy_m}}{I_{yy}^2}, \\ a_{51} &= 0, a_{52} = 0, a_{53} = 0, a_{54} = 1, \\ a_{55} &= 0, a_{56} = 0, a_{6j} = 0, (j = 1, \dots, 6), \\ b_{11} &= -\frac{D_\delta}{mv_{air}}, b_{12} = \frac{\cos(\alpha)}{mv_{air}}, b_{21} = 0, b_{22} = 0, \\ b_{31} &= -\frac{L_\delta}{mV}, b_{32} = \frac{\sin(\alpha)}{mV}, b_{41} = \frac{M_\delta}{I_{yy}}, b_{42} = 0, \\ b_{51} &= 0, b_{52} = 0, b_{61} = 0, b_{62} = -c \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} L_\alpha &= Q S_{ref} C_{L_\alpha}, D_\alpha = Q S_{ref} C_{D_\alpha}, M_\alpha = Q S_{ref} C_{M_\alpha} D_{ref}, \\ L_\delta &= Q S_{ref} C_{L_\delta}, D_\delta = Q S_{ref} C_{D_\delta}, M_\delta = Q S_{ref} C_{M_\delta} D_{ref}, \\ L_M &= \frac{2L}{M} + L_\alpha \alpha_V v_{air} + L_\delta \delta_V v_{air}, \\ D_M &= \frac{2D}{M} + D_\alpha \alpha_V v_{air} + D_\delta \delta_V v_{air}, \\ L_h &= \frac{2L v_{air_h}}{v_{air}} + \frac{L \rho_h + L_\alpha \alpha_V M v_{air_h} + L_\delta \delta_V M v_{air_h}}{\rho}, \\ D_h &= \frac{2D v_{air_h}}{v_{air}} + \frac{D \rho_h + D_\alpha \alpha_V M v_{air_h} + D_\delta \delta_V M v_{air_h}}{\rho}, \\ M_M &= \frac{2M \dot{M}}{M} + M_\alpha \alpha_V v_{air} + M_\delta \delta_V v_{air}, \\ M_h &= \frac{2M \dot{v}_{air_h}}{v_{air}} + \frac{M \dot{\rho}_h + M_\alpha \alpha_V M v_{air_h} + M_\delta \delta_V M v_{air_h}}{\rho}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$L_q = L_\alpha \frac{c_\alpha}{V} + L_\delta \frac{c_\delta}{V}, D_q = D_\alpha \frac{c_\alpha}{V} + D_\delta \frac{c_\delta}{V}, M_q = M_\alpha \frac{c_\alpha}{V} + M_\delta \frac{c_\delta}{V}$$

$$\alpha_V = \frac{q c_\alpha}{V^2}, \delta_V = \frac{q c_\delta}{V^2}, I_{yy_m} = \frac{\partial I_{yy}}{\partial m}, \rho_h = \frac{\partial \rho}{\partial h},$$

$$v_{air_h} = \frac{\partial v_{air}}{\partial h}, C_{ij} = \frac{\partial C_i}{\partial j}, (i = L, D, M, j = \alpha, \delta)$$

2.2.2 컨벡스 최적화 문제 정의

최적화 문제는 임무에 따라 선정된 적절한 목적을 달성하는 최적의 변수 조합을 찾는 것으로, 궤적 최적화 문제에서는 일반적으로 이산화된 궤적의 정보가 변수가 된다. 이때 최적화 과정에서 변수들이 임무 조건과 비행 동역학을 유지하도록 하기 위해서는 최적화 문제가 적절한 구속조건을 반영하도록 해야 한다. 여기에는 초기 조건, 종말 조건, 궤적 구속조건 등이 포함되며 동역학 구속조건은 2.2.1장과 같이 선형 근사 된 형태로 식 9와 같이 적용된다. 식 (9)에서 1은 목적 함수, 2는 선형 근사 된 동역학 구속조건, 3은 초기 조건과 종말 조건, 4는 궤적 구속조건, 5는 상태변수와 제어 입력변수의 상하한 조건을 의미한다.

$$\begin{aligned} \min J(x, u, t) & \quad 1 \\ \text{s.t. } \dot{x} &= f(x^*, u^*) + A(x - x^*) + B(u - u^*) \\ (A &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x^*, u^*)}, B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x^*, u^*)}) & \quad 2 \\ x(t_0) &= x_0, x(t_f) = x_f & \quad 3 \\ f_{path}(x, u) &\leq f_{path_{max}} & \quad 4 \\ x \in [x_{min}, x_{max}], u &\in [u_{min}, u_{max}] & \quad 5 \end{aligned} \quad (9)$$

궤적 구속조건 f_{path} 는 전체 궤적에서 형상 모델에 가해지는 비행 동압과 하중 계수가 설정한 상한 $f_{path_{max}}$ 이하로 유지되도록 식 (10)과 같이 구성했다. 이를 순차 컨벡스 프로그래밍에 적용하기 위해 식 (11)과 같이 상태변수와 제어 입력변수에 대해 선형 근사하였다.

$$\begin{aligned} f_{path_1}(x, u) &\equiv \frac{1}{2} \rho V^2 \leq Q_{max} \\ f_{path_2}(x, u) &\equiv \frac{L}{mg} \leq n_{max} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} f_{path} &= f_{path}^*(x^*) + f_{path_x}(x - x^*) + f_{path_u}(u - u^*) \\ f_{path}^* &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \rho^* V^{*2} \\ \frac{L^*}{m^* g} \end{bmatrix} \\ f_{path_x} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{mg} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho V v_{air} f_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_M & L_h & L_\alpha & L_q & 0 - \frac{L}{m} \end{bmatrix} \\ f_{path_u} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{L_f}{mg} & 0 \end{bmatrix} \\ f_h &= \frac{\rho_h V^2}{2} + \rho V M v_{air_h} \end{aligned} \quad (11)$$

식 (5)~(8)과 식 (10), (11)에서 동역학과 궤적 구속 조건은 임의의 점 x^* 와 u^* 에서 선형 근사되는데 이 과정에서의 오차를 줄이기 위해 식 (12)에 신뢰 구간 구속조건¹을 추가했다. 여기에 구동기 모델의 모사를 위한 구속조건²을 추가하면 설계 무인기 궤적에 대한 컨벡스 최적화 문제가 된다.

$$\begin{aligned} \min & J(x,u,t) \\ \text{s.t.} & \dot{x} = f(x^*, u^*) + A(x - x^*) + B(u - u^*) \\ & x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f \\ & f_{path}(x^*) + f_{path_x}(x - x^*) + f_{path_u}(u - u^*) \leq f_{path_{max}} \quad (12) \\ & x \in [x_{min}, x_{max}], u \in [u_{min}, u_{max}] \\ & |x - x^*| \leq \Delta_x, |u - u^*| \leq \Delta_u \quad 1 \\ & |\dot{u}| \leq \dot{u}_{max} \quad 2 \end{aligned}$$

$$\tau = \frac{2t - t_f}{t_f}, \Delta t = \frac{t_f}{N}, \Delta \tau = \frac{2}{N}$$

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta \tau} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dx_{i+1}}{dt} + \frac{dx_i}{dt} \right)$$

$$\frac{t_f}{2} \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{dx_{i+1}}{dt} \frac{dt}{d\tau} + \frac{dx_i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right)$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} =$$

$$f \frac{t_f}{2} \approx (f^* + A(x - x^*) + B(u - u^*)) \frac{t_f}{2} + \frac{f^*}{2} (t_f - t_f^*) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \approx & \frac{1}{2} (f_{i+1}^* + f_i^* + (A_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}^*) \\ & + B_{i+1}(u_{i+1} - u_{i+1}^*) + A_i(x_i - x_i^*) \\ & + B_i(u_i - u_i^*)) \frac{t_f}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{i+1} - x_i \approx & \frac{t_f}{2N} (f_{i+1}^* + f_i^* + (A_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}^*) \\ & + B_{i+1}(u_{i+1} - u_{i+1}^*) + A_i^k(x_i - x_i^*) \\ & + B_i^k(u_i - u_i^*)) \frac{t_f}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I - \frac{\Delta t}{2} A_{i+1}) x_{i+1} - (I + \frac{\Delta t}{2} A_i) x_i - \frac{\Delta t}{2} B_{i+1} u_{i+1} \\ - \frac{\Delta t}{2} B_i u_i - \frac{(f_{i+1}^* + f_i^*)}{2N} t_f \\ = \frac{\Delta t}{2} (A_{i+1} x_{i+1}^* - A_i x_i^* - B_{i+1} u_{i+1}^* - B_i u_i^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min & J = f^T X \\ \text{s.t.} & \| A_i X + b_i \| \leq c_i^T X + d_i, i = 1, \dots, N_c \\ & X : [x_0, u_0, \dots, x_N, u_N] \quad (14) \end{aligned}$$

2.2.3 이산화(Discretization)

식 (12)는 연속시간에 대해서 정의되었기 때문에 궤적에 대한 수치 해를 얻기 위해서는 최적화 문제를 이산화

하여 재정의해야 한다. 궤적은 전체 구간을 종말 시간 t_f 에 대해 $N+1$ 개의 점 $\{t_i = \frac{t_f}{N}i, i = 0, 1, \dots, N\}$ 으로 나누고 x, u 를 각각 $\{x_i, i = 0, 1, \dots, N\}, \{u_i, i = 0, 1, \dots, N\}$ 로 둬으로써 이산화할 수 있으며, 각 구간에 대한 동역학 구속조건은 식 (13)과 같이 사다리꼴 법칙 (Trapezoidal Rule)으로 표현할 수 있다. 최종적으로 2.2.2장의 컨벡스 최적화 문제는 식 (14)와 같이 전체 궤적의 정보를 담고 있는 변수 X 와 목적 함수를 표현한 f , 각각의 구속조건을 표현하도록 정의된 A_i, b_i, c_i, d_i 를 사용하여 2차 원뿔 프로그래밍 문제로 재정의된다.

2.2.4 궤적 최적화 과정

이산화된 컨벡스 최적화 문제는 기준 궤적 x^*, u^*, t^* 에 대해서 정의되어 있으며, 이는 최적화 문제에서의 초기 조건에 해당한다. 순차 컨벡스 프로그래밍은 변환된 문제의 최적해를 다음 스텝의 기준 궤적으로 사용하여 반복적으로 해를 탐색함으로써 기존 문제에 대한 해를 얻어낸다. 이때 기존의 비선형 최적화 문제가 모든 제약조건을 만족하는 해(feasible solution)가 존재함에도 2차 원뿔 프로그래밍 문제로 표현된 문제는 그러한 해가 없어 수렴과정에 문제가 발생하는 경우가 있다[7]. 특히 알고리즘의 첫 시행에서는 구속조건을 만족시키도록 하는 기준 궤적을 제시하기가 어려워 이런 상황이 자주 발생한다. 이에 대해 [8]에서는 유사한 형태의 SQP (Sequential Quadratic Programming) 문제에서 l_1 페널티 항을 추가하여 해결하였으며, [9]에서는 추가된 l_1 페널티 항이 미분 불가능하지만 불룩한 성질을 이용하여 이를 SCP 문제에 적용하였다.

이를 이용하여 아래 식 (15)와 같이 l_1 페널티 항으로 구속조건을 완화하고 목적 함수로 이를 표현하는 하위 문제를 생성함으로써 알고리즘의 초기 단계의 실패 불가능성을 방지하고 이후 시행을 위한 초기 궤적을 제시할 수 있다[10].

$$\begin{aligned} \min & F = \sum_{i=1}^{N_c} w_i (s_{i1} + s_{i2}) \\ \text{s.t.} & \| A_i X + b_i \| \leq c_i^T X + d_i + s_{i1} - s_{i2} \quad (15) \\ & s_{i1}, s_{i2} \geq 0, i = 1, \dots, N_c \\ & w_i : \text{가중치}, s_{i1}, s_{i2} : \text{여유 변수} \end{aligned}$$

초기 궤적을 탐색하고 이를 기준 궤적으로 하여 기존 목적 함수에 대한 최적 궤적을 탐색하는 전체 과정을 나타내면 우측의 알고리즘과 같다.

2.3 하강 궤적 최적화

무인기의 임무 프로파일은 상승, 순항 등의 경로 비행, 정찰 등의 배회 및 순회 비행, 착륙 또는 타격 등의 하강 비행 등으로 구성되어있다. 감시 정찰 임무의 경우 무인기 제원에 따라 정찰 고도와 속도, 순회 반경 등을

결정해야 하며 타격 임무의 하강 비행 임무의 설계가 중요하다. 특히 하강 비행에서는 높은 비행 동압 등의 설계 한계 지점까지의 기동이 요구될 때가 있어 본 연구에서는 다양한 하강 궤적에 대한 최적화를 수행했다. 여기에는 최대 종말 속도, 최대 하강 각도 등의 요구 조건을 고려할 수 있으며, 궤적 최적화를 통해 설계 형상이 달성할 수 있는 임무 조건을 판단할 수 있다.

각 문제에서 사용한 기본적인 구속조건과 신뢰 구간 값은 Tables 3, 4에서 확인할 수 있다.

Algorithm - Sequential Convex Programming for Trajectory Optimization

Phase 1 - Initial Trajectory Generation

Set initial nominal trajectory x^*, u^*
 (ex. linear trajectory from x_0, u_0 to x_f, u_f)
 $j \leftarrow 0$
 Set F_ϵ as a small positive number
while $j < j_{\max}$ and $F < F_\epsilon$ **do**
 Generate SOCP(eq. 15) using x^* and u^*
 Solve SOCP to find X_j^*
 update x^* and u^* using X_j^*

$$F \leftarrow \sum_{i=1}^{N_c} w_i (s_{i1} + s_{i2})$$

 $j \leftarrow j + 1$

Phase 2 - Trajectory Optimization

$k \leftarrow 0, \delta \leftarrow 0$
 Set δ_ϵ as a small positive number
while $k < k_{\max}$ and $\delta < \delta_\epsilon$ **do**
 Generate SOCP(eq. 14) using x^* and u^*
 Solve SOCP to find X_j^*
 update x^* and u^* using X_j^*

$$\delta \leftarrow \left| \frac{J_{k+1} - J_k}{J_k} \right|$$

 $k \leftarrow k + 1$

Table 3. Trajectory Constraints

Parameter	Value	Parameter	Value
M_0	0.12	α_{\max} [deg]	20
h_0 [km]	5	q_{\min} [deg/s]	-20
α_0 [deg]	0	q_{\max} [deg/s]	20
q_0 [deg/s]	0	θ_{\min} [deg]	-80
θ_0 [deg]	0	θ_{\max} [deg]	45
m_0 [t]	0.18	δ_{\min} [deg]	-30
h_f [km]	0	δ_{\max} [deg]	30
q_f [deg/s]	0	T_{\min} [kN]	0
M_{\min}	0	T_{\max} [kN]	0.5
M_{\max}	2	$\dot{\delta}_{\max}$ [deg/s]	5
h_{\min} [km]	0	\dot{T}_{\max} [kN/s]	0.1
h_{\max} [km]	10	Q_{\max} [kPa]	60
α_{\min} [deg]	-20	n_{\max} [g]	1.5

Table 4. Trust Region size

Parameter	Value	Parameter	Value
M	0.05	q [deg/s]	2
h [km]	0.2	θ [deg]	1
α [deg]	1		

2.3.1 최대 종말 속도

주어진 임무의 효율을 극대화하기 위해 궤적 종료 시점의 속도를 최대로 하는 궤적이 요구되는 상황에서는 최적화 문제를 Table 5처럼 설정할 수 있다.

Phase 1.

초기 궤적 탐색은 150개 점으로 이산화된 궤적에 대하여 최적화를 진행했다. l_1 페널티 항의 최대 허용값인 F_{tol} , 각 제약조건 가중치인 w_i 를 적절히 선정하여 제약조건을 만족하는 궤적을 얻었다. Fig. 2에서 시행에 따른 l_1 페널티의 총합의 감소와 궤적의 수렴과정을 볼 수 있다.

1단계는 $F_{tol} = 10^{-5}, w_i = 1$ 에서 6번의 시행으로 궤적이 수렴하며 종료됐으며, 이 궤적을 최대 종말 속도 최적화 문제의 초기 기준 궤적으로 사용했다.

Table 5. Additional Parameters

Parameter	Value
θ_f [deg]	-70
t_f [sec]	60
$J = -M_f$	

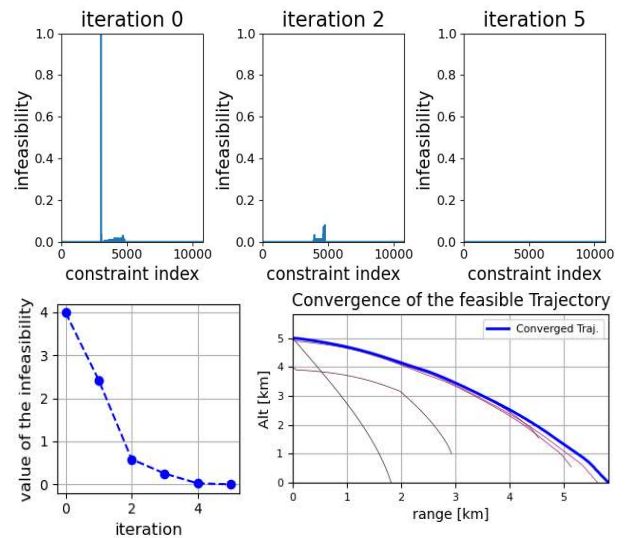


Fig. 2. Convergence of the Feasible Trajectory (maximum final velocity)

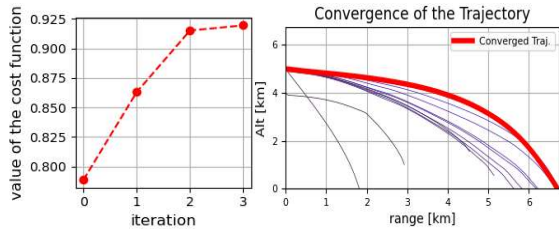


Fig. 3. Convergence of the Optimal Trajectory (maximum final velocity)

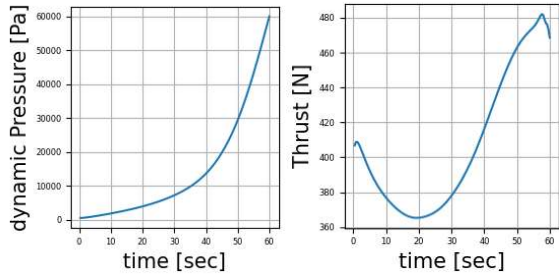


Fig. 4. Dynamic Pressure and Thrust

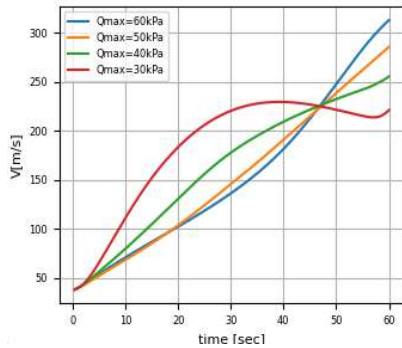


Fig. 5. Velocity plot for Various Values of Q_{max}

Phase 2.

최대 종말 속도에 대한 궤적 최적화는 Fig. 3처럼 4번의 시행으로 종료되었으며, Fig. 4처럼 최종 비행 동압이 사전에 설정한 Q_{max} 값이 되도록 하는 값으로 수렴하였다. Fig. 5에서 다양한 Q_{max} 값에 대해 수렴한 궤적의 시간에 따른 속도 그래프를 확인할 수 있으며, 모든 궤적이 종말 시점의 비행 동압이 Q_{max} 값과 같게 하는 궤적으로 수렴했다.

2.3.2 최대 하강 각도

궤적 종료 시점의 비행체 자세 각의 크기를 최대로 하는 궤적이 요구되는 상황에서의 최적화 문제는 Table 6과 같다.

Table 6. Additional Parameters

Parameter	Value
M_f	0.9
t_f [sec]	60
$J = \theta_f$	

Phase 1.

초기 궤적은 Fig. 6과 같이 7번의 시행으로 l_1 페널티 항의 총합이 0으로 수렴하여 제약조건을 만족하는 궤적으로 수렴하였다.

Phase 2.

제약조건을 만족하도록 수렴한 궤적을 최대 하강 각도 문제의 초기 기준 궤적으로 사용하여 자세 각의 크기를 최대로 하기 위한 궤적을 탐색하였다.

Figure 7처럼 최종 자세 각이 설정한 하한값에 도달하여 궤적이 수렴했으며, 그때의 받음각과 비행경로각을 Fig. 8에서 확인할 수 있다. 자세 각 하한값에 대한 구속조건이 최종 궤적에서 active하고 목적 함수에 연관된 유일한 구속조건이므로 자세 각 하한값을 다르게 설정하여 결과 궤적을 비교해 보았다. Fig. 9와 같이 최종 자세 각이 설정한 하한값이 되었으며, Fig. 10과 같은 궤적으로 수렴했다.

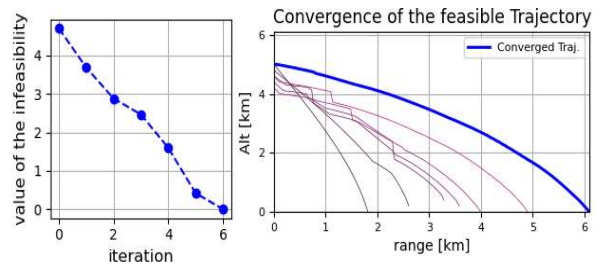


Fig. 6. Convergence of the Feasible Trajectory (minimum final pitch angle)

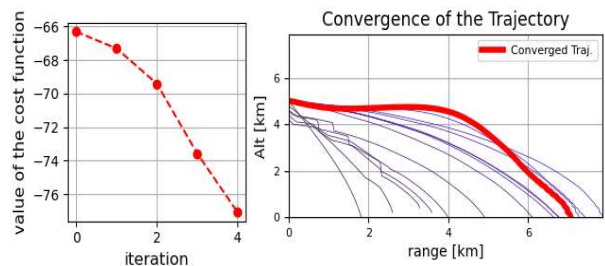


Fig. 7. Convergence of the Optimal Trajectory (minimum final pitch angle)

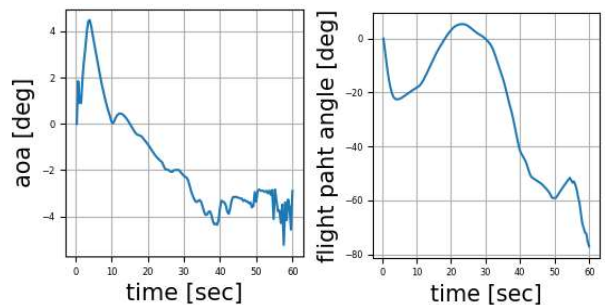


Fig. 8. Angle of Attack and Flight Path Angle

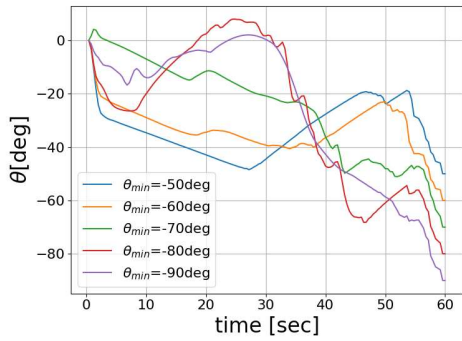


Fig. 9. Pitch Angle plot for Various Values of θ_{min}

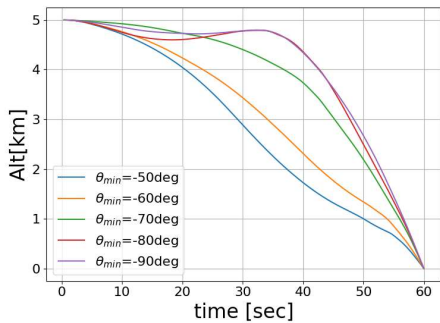


Fig. 10. Altitude plot for Various Values of θ_{min}

Table 7. Additional Parameters

Parameter	Value
M_f	0.9
θ_f [deg]	-70
t_f^0 [sec]	60
$J = t_f$	

2.3.3 최단 시간 도달

앞의 문제는 고정 도달 시간 t_f 에 대한 문제였지만 최단 시간에 지상에 도달하기 위한 궤적을 구하려면 t_f 를 변수 X 에 추가해야 한다. 1단계에서는 변수를 추가하지 않고 앞의 문제와 같이 고정된 도달 시간 하에서 제약조건을 만족하는 궤적을 찾았으며 2단계에서 도달 시간을 추가 변수로 두어 최소 도달 시간 궤적을 탐색했다.

Phase 2.

1단계는 앞의 문제와 유사하게 수렴하였으며, 2단계에서 Fig. 11처럼 8번의 시행을 통해 초기 도달 시간 60초에서 30.45초로 궤적이 수렴하였다. 각 시행에서의 해가 기존 문제의 근사해이므로 최적해와 정확히 일치하지 않을 수 있기 때문에 [2] Fig. 11의 왼쪽 그래프처럼 목적함수의 값이 최종 시행에서 최소가 아님을 볼 수 있다. 그렇지만 Fig. 12에서 확인할 수 있듯이 최단 시간에 도달하기 위해 초기부터 최대 추력으로 비행하였으며, 최종 마하수 구속조건에 의해 25초 부근에서 추력이 감소하여 최종 마하수가 0.9에 수렴한 것을 확인할 수 있다.

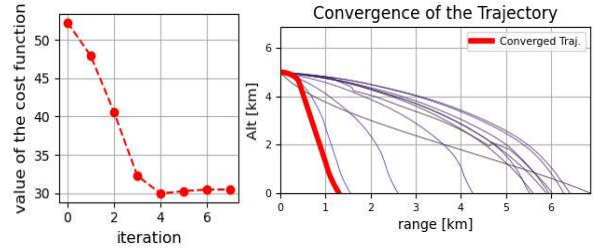


Fig. 11. Convergence of the Optimal Trajectory (minimum final time)

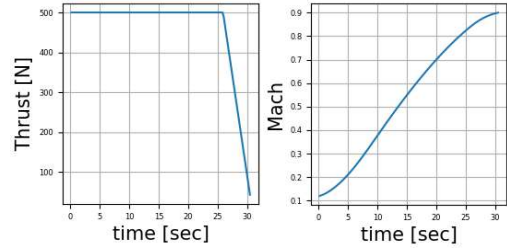


Fig. 12. Thrust and Mach

2.3.4 힌지 모멘트 구속조건

설계 단계에서 임무 궤적에 따른 무인기의 기동성은 비행체의 성능 한계에 따라 결정된다. 비행체의 성능 한계로 2.2장에서는 비행 동압과 하중 계수의 상한을 두어 Fig. 13처럼 전체 구간에서 유지되도록 했다. 이에 더하여 2.1장의 힌지 모멘트로 Fig. 14와 같은 엘리베이터 구동부에 부하될 토크를 Table 8처럼 분석하여 궤적의 구속조건으로 둘 수 있다.

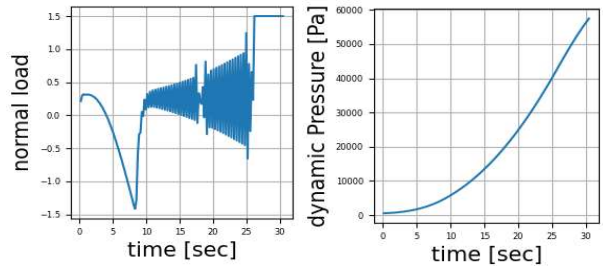


Fig. 13. Normal load and Dynamic Pressure (minimum final time)



Fig. 14. Actuator Model

Table 8. Hinge Moment and Rated Torque
 ($V=100m/s, \alpha=0^\circ, \rho=1.225kg/m^3$)

δ [deg]	H	T_{act}
-18	38.14932	18.66156
-15	30.93154	15.85491
-12	23.71375	12.63424
-9	16.49598	9.076314
-6	9.27819	5.244028
-3	2.060404	1.190844
0	-5.15738	-3.03598
3	-12.3751	-7.39283
6	-19.593	-11.8374
9	-26.8107	-16.3264
12	-34.0285	-20.8122
15	-41.2463	-25.2398
18	-48.464	-29.5406

임무 궤적 중 하강 구간에서는 비행 동압의 상승으로 구동부 부하 토크가 상승하여 요구 엘리베이터 각도에 따른 힌지 모멘트가 구동기 성능을 초과할 수 있다. 이를 통해 구동기 성능을 구속조건으로 추가했을 때 그에 따른 최대 종말 속도 궤적을 Figs. 15-18과 같이 분석할 수 있다. 각각의 그래프는 시간에 따른 엘리베이터 각도, 부하 토크, 고도, 마하수이며 구동기 성능에 의한 엘리베이터 각도의 상한과 하한값을 빨간 선으로 나타냈다. 구동기 성능에 따른 종말 속도 값을 Table 9에 정리했다.

Table 9. Maximum Final Mach for Different Actuator Performance

$T_{act\max}$ [$N \cdot m$]	M_f
10	0.753
20	0.827
30	0.884
40	0.919

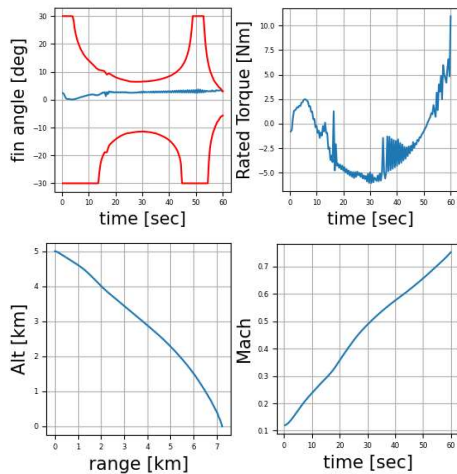


Fig. 15. $T_{act\max} = 10N \cdot m$

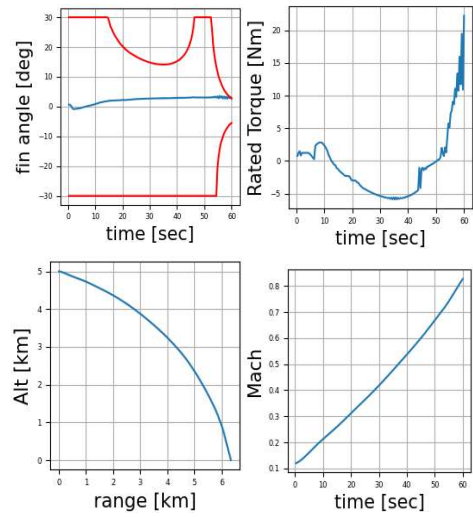


Fig. 16. $T_{act\max} = 20N \cdot m$

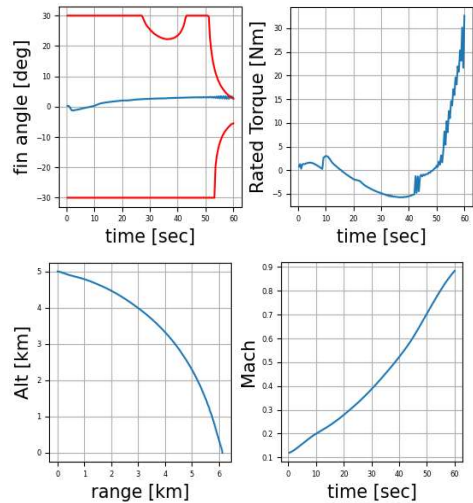


Fig. 17. $T_{act\max} = 30N \cdot m$

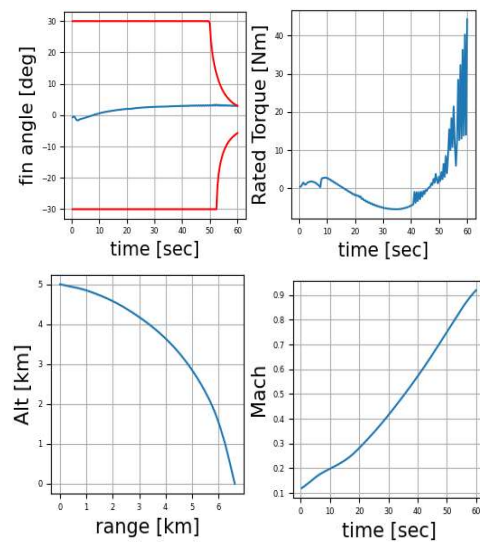


Fig. 18. $T_{act\max} = 40N \cdot m$

2.3.5 최소 열 하중(Heat load)

앞에서 적용한 예시들은 목적 함수가 선형 함수이었기 때문에 선형화 과정에서 따로 근사되지 않았다. 하지만 주어진 임무 프로파일에서 요구하는 것이 비선형 목적 함수 형태로 표현될 때가 있는데 그런 경우 해당 알고리즘을 적용하려면 목적 함수도 선형화할 필요가 있다. 해당 모델은 아음속으로 비행하기 때문에 고온에서의 열 하중을 고려할 필요가 많지는 않지만, 스크램제트 추진 비행체와 같이 극초음속으로 비행하는 모델의 경우 열 하중의 예측이 설계 단계에서 필수적으로 고려되어야 하므로 아래 식 (16)과 같은 목적 함수를 알고리즘에 적용해 보았다.

$$J = \int_0^{t_f} \dot{Q}_{heat} dt = \int_0^{t_f} k_Q \rho^{0.5} V^{3.15} dt \quad (16)$$

전체 시간 동안 동체에 가해지는 열 하중을 위 식처럼 가정하였으며, 상수 $k_Q = 9.4369 \times 10^{-5}$ 로 두었다[3,11]. 비선형이며, 전체 시간에 대해 적분된 형태의 목적 함수를 알고리즘에 적용하기 위해 선형화한 후 이산화하여 아래 식 (17)처럼 재정의했다.

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{heat} &= k_Q \rho^{0.5} V^{3.15} \approx \dot{Q}_{heat}^* + Q_{heat_x}(x - x^*) + Q_{heat_u}(u - u^*) \\ \dot{Q}_{heat}^* &= k_Q \rho^{*0.5} V^{*3.15} \\ Q_{heat_x} &= \begin{bmatrix} 3.15 k_Q \rho^{*0.5} V^{*3.15} M v_{air_h} \\ k_Q \left(\frac{V^{3.15}}{\rho^{0.5}} \rho_h + 3.15 \rho^{0.5} V^{2.15} V_h \right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ Q_{heat_u} &= [0 \ 0] \\ J &= \sum_{i=0}^N \frac{t_f}{N} (Q_{heat_i}^* + Q_{heat_x_i}(x_i - x_i^*) + Q_{heat_u_i}(u_i - u_i^*)) \end{aligned} \quad (17)$$

위의 목적 함수에 대한 최적화 문제는 Table 10처럼 구성했다.

Table 10처럼 고정 M_f 와 θ_f , 자유 M_f , 자유 M_f 와 θ_f 로 총 세 가지 경우에 대해서 궤적을 구해보았으며 각각의 경우에 대해 Fig. 19에서 시간당 열 하중을, Fig. 20에서 궤적을, Fig. 21에서 마하수를, Fig. 22에서

Table 10. Additional Parameters

Parameter	Value		
M_f	¹ 0.6	² [-]	³ [-]
θ_f	-70	-70	[-]
t_f [sec]	60		
$J = \sum_{i=0}^N \frac{t_f}{N} (Q_{heat_i}^* + Q_{heat_x_i}(x_i - x_i^*) + Q_{heat_u_i}(u_i - u_i^*))$			

비행경로 각을 확인할 수 있다. 최종 목적 함수값인 열 하중은 Table 11과 같이 첫 번째 조건에서 다른 두 조건에 비해 두 배가량 되었으며, 나머지 두 조건은 비슷한 값을 보였다.

Figure 21에서 확인할 수 있듯 최종 마하수가 각각 0.600, 0.792, 0.793이어서 열 하중이 낮을수록 오히려 최종 마하수가 큰 값을 가졌다. Figs. 20과 21에서 그 이유를 확인할 수 있는데, 비록 최종 단계에서 시간당 열 하중은 마하수와 같이 높았을지라도 초기에 높은 고도와 낮은 마하수를 유지하여서 전체 열 하중은 절반 수준이 되었음을 추측할 수 있다. Fig. 22에서 볼 수 있듯 3번 조건의 최종 자세 각이 9도가량 더 낮았으며 이에 따라 상대적으로 높은 고도를 유지하다 지상에 도달하여 열 하중이 좀 더 낮았음을 알 수 있다.

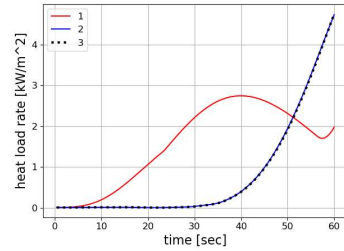


Fig. 19. Heat load rate for 3 cases

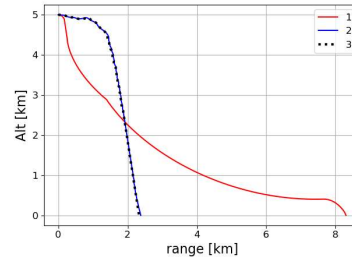


Fig. 20. Trajectory for 3 cases

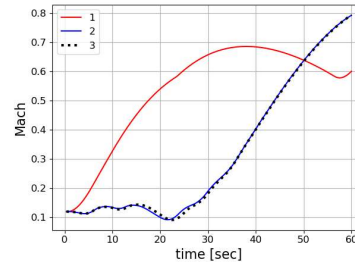


Fig. 21. Mach for 3 cases

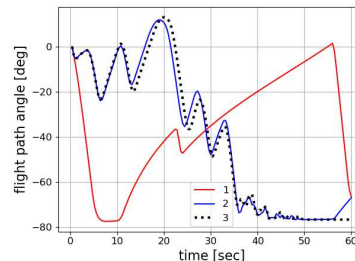


Fig. 22. flight path angle for 3 cases

Table 11. Heat load for 3 cases

Case	Heat load, kW/m^2
1	1.566
2	0.768
3	0.761

III. 결 론

본 논문은 순차 컨벡스 프로그래밍으로 설계 무인기 형상의 공력 데이터와 성능 파라미터에 기반한 궤적 최적화를 수행했다. 각각의 최적화 문제는 2차 원뿔 프로그래밍으로 근사 되었으며, 2단계로 구성된 최적화 알고리즘을 통해 실현 불가능성을 방지하고 수렴성을 높여 최적해에 수렴했다. 최대 종말 속도 문제의 경우 지정한 비행 동압 상한값에 최적해가 수렴하는 결과를 보였으며 최대 하강 각도 문제에서는 지정한 자세 각 하한값에 최적해가 수렴했다. 최단 시간 도달 문제에서는 추력과 마하수 그래프에서 볼 수 있듯 최대 추력을 유지하여 도달 시간을 감소시키고, 최종 마하수 구속조건에 의해 도달 직전 추력이 감소한 것을 확인할 수 있다. 추가로 구동부 성능에 대한 구속조건이 추가되어 제어 입력에 대한 조건이 추가되었을 때의 경우를 분석하여 설계 단계에서 보유 제원에 따라 임무 프로파일에 적합한 종말 속도를 제시할 수 있도록 하였다. 목적 함수가 비선형성을 띠고 있던 최적 열 하중 궤적 분석을 통해 본 논문에서 사용한 알고리즘이 선형 형태의 간단한 목적 함수뿐만이 아니라 전체 궤적에 대한 비선형 함수에도 적용할 수 있음을 확인했다. 더 나아가 2차 원뿔 프로그램은 목적 함수로 선형 함수, 선형 근사가 가능한 비선형 함수뿐만이 아니라 변수를 추가해 목적 함수의 비선형성을 구속조건으로 완화하거나 가중치 법 (Weighted Sum method)을 통해 다목적 최적화 문제에도 적용할 수 있다. 이를 통해 비행 접근 불가 구간(No Fly Zone)에 대응하거나 목표 지점까지의 시간과 연료를 최소화하도록 하는 등의 임무를 고려할 수 있다. 하지만 목적 함수, 구속조건 등을 성공적으로 근사하더라도 그 과정에서 필연적으로 기존 모델과의 오차가 커지는 등의 문제가 있는데, 이 때문에 고기동이 요구되는 궤적을 해석할 때 근사 과정에서 오차가 커지거나 이산화된 궤적 간의 간격이 커 궤적 해석이 충분히 이뤄지지 않을 수 있다. 이는 매 시행 오차를 기반으로 신뢰 구간을 수정하여 알고리즘의 수렴성을 상승시키거나 오차가 큰 구간의 궤적을 더 많은 점으로 이산화하여 오차를 줄이는 등의 방법으로 보완되고 있다. 이러한 과정들을 통해 제원, 탑재체, 형상, 임무 등의 변경이 자주 발생하는 상황에서 빠른 분석을 위해 제시한 알고리즘을 적용하면 설계 초기 단계의 형상과 임무 해석에 기여할 수 있을 것으로 보인다.

후 기

이 연구는 LIG Nex1 산학협력과제 지원으로 연구되었음

References

- 1) Chamola, V., et al, "A comprehensive review of unmanned aerial vehicle attacks and neutralization techniques," *Ad hoc networks*, Vol. 111, 2021, 102324.
- 2) Betts, J. T., "Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 2, 1998, pp. 193~207.
- 3) Wang, Z. and Michael, J. G., "Constrained trajectory optimization for planetary entry via sequential convex programming," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 40, No. 10, 2017, pp. 2603~2615.
- 4) Boyd, S. and Vandenberghe, L., *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, England, U.K., 2004, pp. 127~187.
- 5) XFLR5 : <http://www.xflr5.tech/xflr5.htm>
- 6) Ko, H. S. and Choi, H. L., "Configuration Design and Performance Analysis of Drone for SEAD mission," *Proceeding of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences Spring Conference*, November 2021, pp. 1012~1013.
- 7) Szmuk, M., Behcet, A. and Andrew, W. B., "Successive convexification for fuel-optimal powered landing with aerodynamic drag and non-convex constraints," *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, January 2016, pp. 378~393.
- 8) Nocedal, J. and Wright, S. J., *Numerical optimization*, Springer Verlag, 1999, pp. 510~513.
- 9) Wang, Z. and Ye, L., "Improved sequential convex programming algorithms for entry trajectory optimization," *Journal of Spacecraft and Rockets*, Vol. 57, No. 6, 2020, pp. 1373~1386.
- 10) Roh, H. K., et al, "L1 Penalized Sequential Convex Programming for Fast Trajectory Optimization: With Application to Optimal Missile Guidance," *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, Vol. 21, No. 2, 2020, pp. 493~503.
- 11) Liu, X., Zuojun, S. and Ping, L., "Entry trajectory optimization by second-order cone programming," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 39, No 2, 2016, pp. 227~241.