

Asymmetric volatility models with non-zero origin shifted from zero : Proposal and application

Ye Jin Lee^a, Sun Young Hwang^a, Sung Duck Lee^{1,b}

^aDepartment of Statistics, Sookmyung Women's University;

^bDepartment of Information and Statistics, Chungbuk National University

Abstract

Volatility of a time series is defined as the conditional variance on the past information. In particular, for financial time series, volatility is regarded as a time-varying measure of risk for the financial series. To capture the intrinsic asymmetry in the risk of financial series, various asymmetric volatility processes including threshold-ARCH (TARCH, for short) have been proposed in the literature (see, for instance, Choi *et al.*, 2012). This paper proposes a volatility function featuring non-zero origin in which the origin of the volatility is shifted from the zero and therefore the resulting volatility function is certainly asymmetric around zero and achieves the minimum at a non-zero (rather than zero) point. To validate the proposed volatility function, we analyze the Korea stock prices index (KOSPI) time series during the Covid-19 pandemic period for which origin shift to the left of the zero in volatility is shown to be apparent using the minimum AIC as well as via parametric bootstrap verification.

Keywords: asymmetric volatility, parametric bootstrap, volatility with non-zero origin

1. 서론

금융 시계열의 변동성(volatility)은 자산 수익률(asset return)의 조건부 분산(conditional variance)으로 정의하며 해당 자산의 위험(risk)과 불확실성(uncertainty)에 대한 척도로 자주 사용된다 (Choi 등, 2021; Lee와 Hwang, 2022). 주가, 금리, 환율과 같은 금융 시계열 자료의 변동성은 시점에 따라 변화되는(time varying) 특징을 가지고 있으므로 기존의 ARIMA와 같은 조건부 등분산 시계열 모형으로는 변동성을 효과적으로 설명할 수 없었다. 시점 t 에서의 금융 시계열 변동성은 이분산(heteroscedastic)임을 강조해서 h_t 로 표현하는 경우가 많다. 금융 시계열 변동성(volatility) 특징 중 하나는 변동성 클러스터(volatility cluster)이다. 변동성이 높은 기간과 낮은 기간이 상당한 기간을 가지고 반복적으로 나타나는 현상을 변동성 클러스터라 부른다 (cf., Tsay, 2010). 즉, 금융 시계열 변동성은 시간의 흐름에 따라 클러스터를 구성하면서 반복하며 시간에 의존하는 함수로 가정하는 것이 타당하며, 변동성을 추정하기 위해서 변동성을 자료의 점화식 형태로 모형화하는 모형 기반(model based) 분석 연구가 지난 40년간 활발히 진행되고 있다. 시점에 의존해서 변화하는 점화수식을 통해 변동성을 추정하는 방법인 Engle (1982)의 ARCH (auto regressive conditional heteroskedasticity; ARCH) 모형과 Bollerslev (1986)가 제안한 GARCH(일반화-ARCH, generalized-ARCH) 모형은 기존의 조건부 등분산 모형을 탈피한 대표적인 조건부 이분산 점화식 모형이다. 변동성 h_t 를 효과적으로 추정해야 하는 이유는 자산의 위험

This work was partially supported by a grant from the National Research Foundation of Korea (NRF-2021R1F1A1047952).

¹Corresponding author: Department of Information and Statistics, Chungbuk National University, Cheongju, Chungbuk 28644, Korea. E-mail: sdlee@chungbuk.ac.kr

측정 목적 이외에도 여러 가치를 들 수 있다. 유명한 블랙 쇼울즈 공식(Black-Scholes option pricing formula)에서 변동성 h_t 는 핵심 모수(parameter) 역할을 한다 (cf., Tsay, 2010, Equation (3.1)). 통계적 관점에서 보면, t 시점에서 수익률의 95% 예측구간 너비는 h_t 에 비례하므로(예를 들어, 정규분포를 가정하는 경우에 너비는 2배의 $1.96\sqrt{h_t}$ 이다) h_t 를 정교하게 모형화하는 작업은 매우 중요하다 하겠다. 또한, 조건부 평균과 더불어서 조건부 분산 h_t 를 “잘” 모형화 함으로서 관련된 모수 추정 및 통계적 추론의 정도(precision)를 높이는 데 기여할 수 있다. 금융 시계열 분석에서 조건부 이분산 변동성 모형의 장점 및 응용에 대해서는 Tsay (2010, 3장)를 참고하기 바란다.

전통적인 ARCH/GARCH 모형은 원점에 대해서 대칭(symmetric)인 함수형태를 가진다. 대칭 변동성 점화식을 비대칭 점화식 모형으로 확장하는 연구도 활발히 진행되고 있다. 금융 시계열에서는 수익률이 상승하고 하락할 때 같은 양이면 하락할 때 시장 참여자들이 더 큰 위험을 느낀다고 알려져 있으며 이를 변동성의 비대칭(asymmetry) 혹은 레버리지-효과(leverage-effect)라 부른다. 다양한 비대칭 변동성 모형 수식에 대해서는 Choi 등 (2012)과 Lee와 Hwang (2022)을 참고하기 바란다. 기존의 대칭/비대칭 변동성 모형 수식의 특징은 변동성 h_t 의 최솟값이 영(zero)에서 발생한다. 다시 말하면 평균수정 수익률(mean corrected return; 수익률에서 평균수익률을 뺀 값)이 영(zero)일 때 h_t 가 최소값을 갖는 모형들이다(즉, 평균수정 수익률이 “영”일 때 최소 위험을 느낀다). 본 연구에서는 h_t 의 최솟값이 원점에서 이동된(shifted from the zero) 값에서 발생하는 비대칭 변동성 모형을 새롭게 제안한다. 제안된 모형의 응용으로서 Covid-19 팬데믹 기간 국내 금융 시계열에 적용과정을 예시하고자 한다.

2. 제안하는 비대칭-변동성 모형 : 원점 이동한 모형

Engle (1982)은 시계열 $\{\epsilon_t\}$ 가 다음 점화식에 의해 생성될 때, ARCH(1) 모형이라 정의하였다.

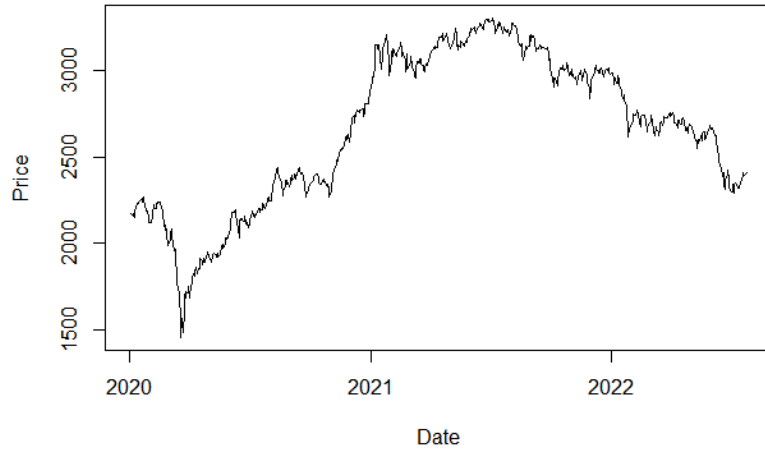
$$\epsilon_t = \sqrt{h_t}e_t, \quad h_t = \alpha_0 + \alpha_1\epsilon_{t-1}^2, \quad (2.1)$$

여기서 조건부 이분산 시계열 $h_t = \text{Var}(\epsilon_t|F_{t-1})$ 는 시점 t 에서의 변동성이며 F_{t-1} 는 과거 정보이다. 관측 불가능인 오차 $\{e_t\}$ 는 평균이 0이고 분산이 1인 iid 확률과정이며 F_{t-1} 와는 독립임을 가정한다. 변동성과 관련해서 나타나는 모수는 모두 비음(non-negative), 즉, $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1 \geq 0$ 을 만족한다. 모형 (2.1)은 변동성(h_t)이 $\{\epsilon_t\}$ 에 관해 대칭이지만, 최근 금융 시계열 분야의 변동성이 많은 경우에 비대칭이라는 것이 자료 분석을 통해 경험적으로 인정되고 있다 (stylized fact) (Tsay, 2010). 비대칭성은 방대한 실시간 자료(real time data)의 속성과 이에 따른 시계열 자료의 치우침(쏠림)에 일정 부분 기인하고 있다. 특히, 금융 시계열의 특징인 자산 가격의 상승보다는 하락이 변동성에 미치는 영향이 크음을 의미하는 비대칭-변동성 현상(asymmetry (leverage) effect)을 반영하는 비대칭 변동성 모형의 연구가 최근 활발하게 진행되고 있다 (Choi 등, 2021; Lee와 Hwang, 2022). 분계(threshold)-함수를 통한 비대칭 변동성 모형으로는 Threshold-ARCH 모형이 사용하기 편하며, 일차 모형인 T-ARCH(1) 모형은 다음과 같은 점화식으로 구성된다.

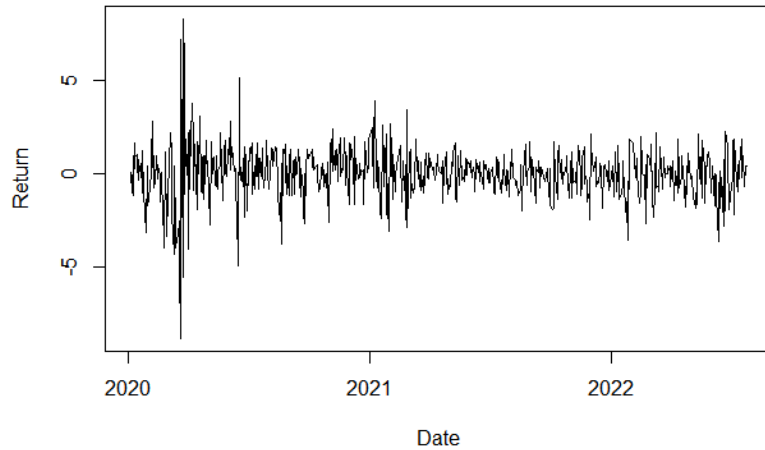
$$h_t = \alpha_0 + \alpha_{11}(\epsilon_{t-1}^+)^2 + \alpha_{12}(\epsilon_{t-1}^-)^2, \quad (2.2)$$

여기서 $\epsilon_{t-1}^+ = \max(\epsilon, 0)$ 와 $\epsilon_{t-1}^- = \max(-\epsilon, 0)$ 는 분계-함수(threshold function)로서 분계점은 영(zero)임을 주목하기 바란다. 모수 α_{11} , α_{12} 는 비대칭성을 반영하고 있으며 금융 시계열 이론에 따르면 실제 자료에서는 $\alpha_{11} \leq \alpha_{12}$ 인 경우가 대부분이다. 이처럼 기존의 분계점을 이용한 비대칭 변동성 모형은 분계점 영(zero)을 기준으로 비대칭성을 보여주었다. 최근 분계점-변동성 모형에 대한 자세한 내용은 Lee와 Hwang (2022)와 그 안에 제시된 문헌들을 참고하기 바란다.

본 연구에서는 변동성의 분계점이 영(zero)으로 고정되지 않고 다음과 같이 원점에서 m -이동한 비대칭



(a) KOSPI Daily closing price



(b) Return rate

Figure 1: Daily closing price and return rate.

모형을 새로이 제안하고 연구하도록 한다.

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_{11} ((\epsilon_{t-1} - m)^+)^2 + \alpha_{12} ((\epsilon_{t-1} - m)^-)^2. \quad (2.3)$$

이 모형은 비대칭 모형임과 동시에 변동성(h_t)의 최소값이 $\epsilon_{t-1} = m$ 에서 발생하여 α_0 임에 주목하기 바란다. 분계점이 이동된 비대칭 변동성 효과를 반영하기 위해 $m \neq 0$ 일 때 분계점 m 을 기준으로 수익률의 기울기가 다른

Table 1: Descriptive statistics for KOSPI return (data span : January 2, 2020 – July 26, 2022)

Mean	0.02
Trimmed mean (10%)	0.06
Median	0.11
Min	-8.77
Max	8.25
Standard deviation	1.41
Skewness	-0.17
Kurtosis	5.97

변동성 모형이며 분계점 $m = 0$ 인 경우는 전통적인 T-ARCH(1) 모형으로 식 (2.2)와 같다. 여기서 $\alpha_{12} > \alpha_{11}$ 경우, 수익률 m 을 기준으로 같은 양이면 음의 수익률을 가질 때가 양의 수익률을 가질 때보다 변동성이 더 큰 비대칭 효과를 보인다. $\alpha_{12} = \alpha_{11}$ 일 때는 수익률 m 을 기준으로 대칭으로 변동성이 수익률의 부호에 영향을 받지 않는 대칭적 모형이 된다.

식 (2.2)의 T-ARCH(1)을 다음과 같이 임계점이 여러 개인 모형으로 확장할 수 있다.

$$\epsilon_t = \sqrt{h_t} e_t, \quad h_t = \sum_{i=1}^k \alpha_{0i} I_{R_i} + \sum_{i=1}^k \alpha_{1i} \epsilon_{t-1}^2 I_{R_i},$$

여기서 I 는 지시함수(indicator function)이며 R_1, \dots, R_k 는 실수공간 $(-\infty, \infty)$ 의 분할(exclusive partition)이다. 특히 $k = 2$ 이며 $R_1 = (-\infty, 0)$, $R_2 = [0, \infty)$ 인 경우는 식 (2.2)의 T-ARCH(1) 모형이다. $k > 2$ 인 다중 임계점 모형의 특징과 실제 자료에의 응용은 Lee와 Hwang (2022)를 참고하길 바란다. 다중 임계점 모형의 원점에서 m -이동한 비대칭 버전은 다음과 같다.

$$h_t = \sum_{i=1}^k \alpha_{0i} I_{R_i} + \sum_{i=1}^k \alpha_{1i} (\epsilon_{t-1} - m)^2 I_{R_i}.$$

본 논문에서는 논의의 간편성을 위해 식 (2.3) 모형만을 다루도록 한다. 분계점 m 을 관심 모수로 하는 이동된 비대칭-변동성 모형의 통계적 추론은 아직 연구된 바 없으며 특히 m 에 대한 미분 불가능(non-differentiable) 성질로 인해 모수 추정에 어려움이 생긴다. 자료 분석 절차에서는 이동량 m 을 모수로 간주하는 대신에 다양한 시나리오로 고정한 후, 결과된 모형 간 비교를 위해 로그 가능도(log likelihood), AIC 및 BIC를 모형-선택기준으로 사용하였다. 또한, 모형 예측력을 비교/평가하기 위해 모수적 붓스트랩(parametric bootstrap) 방법으로 예측분포를 구성한 후, CP (coverage probability)와 예측 오차(prediction error) 요약 통계량을 고려하여 비교/평가하였다. 제안 모형의 분석-예시를 위해 Covid-19 팬데믹 기간에 국내 금융 시계열 자료의 변동성 기준점이 영(zero)에서 이동했는지(즉, $m \neq 0$) 추론하고자 종합주가지수(KOSPI)를 분석하여, 기준점이 영에서 좌측으로 이동되었음을 확인할 수 있었다.

3. 자료분석 응용 : 팬데믹 기간 KOSPI 자료

종합주가지수(KOSPI)는 한국의 주가 현황을 종합적으로 보여주는 대표적인 지표이다. 본 절에서는 원점이 이동된 비대칭 변동성 모형을 Covid-19 팬데믹 기간의 종합주가지수에 적용하고 평가하고자 한다. 식 (2.3) 시계열 모형에 적합하기 위해 사용된 자료는 2020년 1월 2일에서 2022년 7월 26일까지 총 633개의 종합주가지수의 일별 증가 자료이다. 시간 t 에서 일별 증가 데이터 $\{P_t\}$ 라고 할 때, 일별 백분위 로그 수익률(log-return) $\{X_t\}$ 은 다음과 같이 계산하며 간략히 “수익률”로 부르기로 한다.

$$X_t = (\ln P_t - \ln P_{t-1}) \times 100.$$

먼저, 일별 수익률의 분포를 살펴보면 다음과 같다. Figure 1은 일별 증가와 일별 수익률의 시계열 그림이다. 일별 증가 시계열 그림을 보면 2020년을 보면 급격히 하락한 뒤 상승하는 시점을 관찰할 수 있다. Covid-19가 퍼지기 시작한 3월 우리나라를 포함한 글로벌 주가가 크게 하락하였다가 각국의 적극적인 금융 완화정책으로 크게 반등했다. 또한, 주가 폭락을 기회로 인식한 개인투자자들의 주식시장 참여가 크게 늘어났고 이 기간은 유례없는 현상으로 볼 수 있다. KOSPI의 기술 통계량은 Table 1을 통해 확인할 수 있다. 자료의 비대칭 변동성 모형 분석이 필요한지를 알아보기 위해서 삼차 모멘트 값인 왜도와 사차 모멘트 값인 첨도를 계산하였다. 왜도 값은 -0.17로 왼쪽으로 비스듬한 수익률 분포임을 확인할 수 있다. 첨도(kurtosis)는 정규분포 기준 값인 3보다 큰 5.97로 계산되어 급첨(leptokurtic) 성질을 가지고 있으며 비대칭 변동성 모형 분석이 필요함을 암시한다.

변동성 분석을 위한 모형 수식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X_t &= \mu + \epsilon_t, & \epsilon_t &= \sqrt{h_t}e_t, \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_{11}((\epsilon_{t-1} - m)^+) + \alpha_{12}((\epsilon_{t-1} - m)^-)^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

KOSPI 자료가 원점을 기준으로 변동성 비대칭이 있는지 확인해 보자. 분계점이 영(zero)에서 이동한 모형의 성능을 판단하기 위한 비교-모형으로 식(2.2)의 T-ARCH(1) 모형을 사용하였다. 각 모형의 표준화 오차 $\{e_t\}$ 의 분포는 표준정규분포를 가정하였다. R의 nlm함수를 이용하여 모수를 추정하였으며 모수 추정을 위한 초기값으로 R의 rugarch 패키지를 이용하여 T-ARCH(1)의 모형 적합 결과를 이용하였다. T-ARCH(1)의 적합 결과는 다음과 같다.

T-ARCH(1) :

$$\begin{aligned} X_t &= 0.0035 + \epsilon_t, & \epsilon_t &= \sqrt{h_t}e_t, \\ h_t &= 1.0567 + 0.1493((\epsilon_{t-1})^+) + 0.6145((\epsilon_{t-1})^-)^2. \end{aligned}$$

T-ARCH(1)은 모형 (2.3)에서 이동량 m 이 영(zero)인 모형이다. 따라서 식 (3.1) 모수 추정을 위한 초기값으로 $\mu = 0.0035$, $\alpha_0 = 1.0567$, $\alpha_{11} = 0.1493$, $\alpha_{12} = 0.6145$ 을 사용하였다. 분계점 m 을 -2부터 2까지 0.1의 간격으로 변경하면서 총 21개의 시나리오에 대한 모수를 추정하였다. 분계점 m 에 따른 모형 비교를 로그가능도(log likelihood), AIC, BIC를 이용하였으며 분계점 m 에 따른 모형의 적합 추정식과 로그-가능도, AIC, BIC는 Table 2에 정리하였다. 이 표로부터 최대 로그-가능도와 최소 AIC, BIC를 갖는 $m = -0.2$ 를 선택할 수 있다. 즉, 모형선택 기준 통계량으로 판단하기에 원점에서 왼쪽으로 0.2만큼 이동한 비대칭-변동성 모형이 팬데믹 기간 KOSPI 수익률 자료를 잘 설명한다고 할 수 있다.

Engle과 Ng (1993)에 의해 제안된 NIC (new impact curve)는 변동성 비대칭성을 확인할 수 있는 그래프로 x 축은 직전(평균수정) 수익률, y 축은 변동성 h_t 를 그린 그림이다. 다양한 국내 금융 시계열의 NIC에 대해서는 Yoon 등 (2014)을 참고하길 바란다. Figure 2는 원점이 -0.2로 이동된 T-ARCH(1)의 NIC 그림이며 KOSPI의 수익률 변동성에 나타나는 비대칭 효과를 확인할 수 있다.

4. 모수적 붓스트랩을 통한 모형 예측력 비교 : 종합주가지수(KOSPI)

금융 시계열 모델을 구축하는 가장 중요한 목표 중 하나는 정확하게 미래 수익률과 변동성을 예측하는 것이다. 경쟁 모형 비교를 할 때, 더 나은 모델이 가져야 하는 가장 중요한 속성은 더 높은 예측성능이다 (Kim과 Hwang, 2020). 본 연구는 시계열 예측력을 평가하기 위해 모수적 붓스트랩(parametric bootstrap)을 이용한 예측분포를 추정하고자 한다. 모수적 붓스트랩은 Miguel과 Olave (1999)가 제안한 방법으로 응용을 위한 자세한 내용은 Kim과 Hwang (2020), Tsay (2010, 4장), Choi 등 (2021)과 Lee와 Hwang (2022)을 참고하기

Table 2: Estimated equations of T-ARCH models with non-zero origin

Model(<i>m</i>)	Estimated equation	Log likelihood	AIC	BIC
-2.0	$X_t = 0.0388 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.3253 + 0.0247((\epsilon_{t-1} + 2)^+)^2 + 4.4139((\epsilon_{t-1} + 2)^-)^2$	-1042.191	3.3107	3.3388
-1.8	$X_t = 0.0382 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.2743 + 0.0299((\epsilon_{t-1} + 1.8)^+)^2 + 4.4058((\epsilon_{t-1} + 1.8)^-)^2$	-1037.783	3.2967	3.3249
-1.6	$X_t = 0.0305 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.2437 + 0.0352((\epsilon_{t-1} + 1.6)^+)^2 + 3.5670((\epsilon_{t-1} + 1.6)^-)^2$	-1034.095	3.2851	3.3132
-1.4	$X_t = 0.0288 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.2176 + 0.0415((\epsilon_{t-1} + 1.4)^+)^2 + 2.8211((\epsilon_{t-1} + 1.4)^-)^2$	-1030.940	3.2751	3.3032
-1.2	$X_t = 0.0239 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.1935 + 0.0491((\epsilon_{t-1} + 1.2)^+)^2 + 2.2450((\epsilon_{t-1} + 1.2)^-)^2$	-1028.169	3.2663	3.2945
-1.0	$X_t = 0.0253 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.1678 + 0.0588((\epsilon_{t-1} + 1)^+)^2 + 1.7937((\epsilon_{t-1} + 1)^-)^2$	-1025.695	3.2585	3.2866
-0.8	$X_t = 0.0276 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.1326 + 0.0720((\epsilon_{t-1} + 0.8)^+)^2 + 1.4873((\epsilon_{t-1} + 0.8)^-)^2$	-1023.078	3.2502	3.2784
-0.6	$X_t = 0.0226 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.0970 + 0.0882((\epsilon_{t-1} + 0.6)^+)^2 + 1.2346((\epsilon_{t-1} + 0.6)^-)^2$	-1020.667	3.2426	3.2707
-0.4	$X_t = 0.0140 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.0745 + 0.1061((\epsilon_{t-1} + 0.4)^+)^2 + 0.9872((\epsilon_{t-1} + 0.4)^-)^2$	-1019.170	3.2378	3.2660
-0.2	$X_t = 0.0085 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.0621 + 0.1261((\epsilon_{t-1} + 0.2)^+)^2 + 0.7786((\epsilon_{t-1} + 0.2)^-)^2$	-1018.530	3.2358	3.2640
0	$X_t = 0.0034 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.0567 + 0.1493((\epsilon_{t-1})^+)^2 + 0.6145((\epsilon_{t-1})^-)^2$	-1018.677	3.2363	3.2644
0.2	$X_t = 0.0032 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.0517 + 0.1788((\epsilon_{t-1} - 0.2)^+)^2 + 0.4905((\epsilon_{t-1} - 0.2)^-)^2$	-1019.277	3.2382	3.2663
0.4	$X_t = 0.0030 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.0436 + 0.2185((\epsilon_{t-1} - 0.4)^+)^2 + 0.3994((\epsilon_{t-1} - 0.4)^-)^2$	-1020.110	3.2408	3.2690
0.6	$X_t = 0.50 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.0304 + 0.2772((\epsilon_{t-1} - 0.6)^+)^2 + 0.3309((\epsilon_{t-1} - 0.6)^-)^2$	-1021.035	3.2437	3.2719
0.8	$X_t = 0.0067 + \epsilon_t,$ $h_t = 1.0125 + 0.3603((\epsilon_{t-1} - 0.8)^+)^2 + 0.2799((\epsilon_{t-1} - 0.8)^-)^2$	-1021.981	3.2467	3.2749
1.0	$X_t = 0.0076 + \epsilon_t,$ $h_t = 0.9927 + 0.4761((\epsilon_{t-1} - 1.0)^+)^2 + 0.2402((\epsilon_{t-1} - 1.0)^-)^2$	-1023.073	3.2502	3.2783
1.2	$X_t = 0.0080 + \epsilon_t,$ $h_t = 0.9719 + 0.6546((\epsilon_{t-1} - 1.2)^+)^2 + 0.2081((\epsilon_{t-1} - 1.2)^-)^2$	-1024.361	3.2543	3.2824
1.4	$X_t = 0.0065 + \epsilon_t,$ $h_t = 0.9524 + 0.9260((\epsilon_{t-1} - 1.4)^+)^2 + 0.1818((\epsilon_{t-1} - 1.4)^-)^2$	-1025.975	3.2594	3.2875
1.6	$X_t = 0.0012 + \epsilon_t,$ $h_t = 0.9441 + 1.1646((\epsilon_{t-1} - 1.6)^+)^2 + 0.1589((\epsilon_{t-1} - 1.6)^-)^2$	-1028.173	3.2663	3.2945
1.8	$X_t = 0.0039 + \epsilon_t,$ $h_t = 0.9616 + 0.7468((\epsilon_{t-1} - 1.8)^+)^2 + 0.1363((\epsilon_{t-1} - 1.8)^-)^2$	-1030.811	3.2747	3.3028
2.0	$X_t = 0.0108 + \epsilon_t,$ $h_t = 0.9589 + 0.6015((\epsilon_{t-1} - 2.0)^+)^2 + 0.1192((\epsilon_{t-1} - 2.0)^-)^2$	-1032.960	3.2815	3.3096

바란다. 모수적 붓스트랩 과정에서 추정된 모수를 참값으로 가정하므로 모수 추정의 불확실성은 고려되지 않

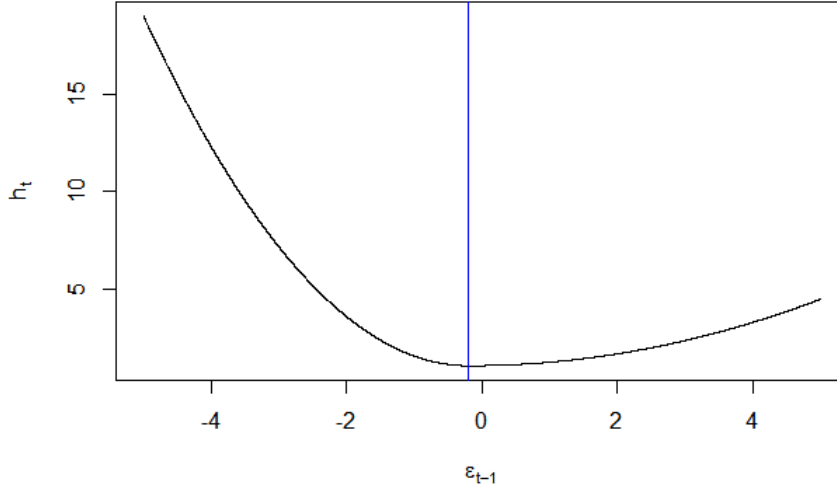


Figure 2: Asymmetric NIC of KOSPI return rate ($m = -0.2$).

는다 (Miguel과 Olave, 1999). 원점 이동된 T-ARCH(1) 모형 (3.1)에 대한 모수적 붓스트랩 알고리즘은 다음과 같다. 모수적 붓스트랩 모형은

$$X_t = \mu + \epsilon_t, \quad \epsilon_t = \sqrt{h_t} e_t,$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_{11} ((\epsilon_{t-1} - m)^+)^2 + \alpha_{12} ((\epsilon_{t-1} - m)^-)^2$$

이며 자료는 T 개로 구성된 $\{X_1, X_2, \dots, X_T\}$ 이다.

Step 1: 준-최대가능도(quasi maximum likelihood; QML)방법으로 모수를 추정한다. 추정식은 Table 2에 수록하였다.

Step 2: 모형을 통해 얻은 잔차로부터 표준화 잔차(standardized residuals)의 추정값 $\hat{\epsilon}_t = \epsilon_t / \sqrt{\hat{h}_t}$ 을 계산한다.

Step 3: 중심화 잔차 $\hat{\epsilon}_t - \hat{\epsilon}$ 를 생성한 후, 누적분포함수 \hat{F} 를 구한다. 여기서 $\hat{\epsilon} = \sum \hat{\epsilon}_t / T$ 이다.

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I_{[\hat{\epsilon}_t - \hat{\epsilon}, \infty)}(x).$$

Step 4: 중심화 잔차로부터 얻은 분포 \hat{F} 로부터 랜덤 추출하여 e_{T+j}^* , $j = 1, 2, \dots, l$ 을 생성한다. $j = l$ 은 l 시차 후 예측을 위한 잔차이다. 본 논문에서는 일 시차 $l = 1$ 을 고려한다.

Step 5: Step 1에서 추정된 모형과 랜덤 추출한 잔차를 기반으로 새로운 시계열 표본 $\{X_{T+j}^*\}$ 과 조건부 분산 $\{h_{T+j}^*\}$ 을 생성한다.

Step 6: Step 4와 Step 5를 B 번 반복하여 예측 분포(predictive distribution)를 구한다. 본 연구에서는 B 를 1,000과 3,000으로 선택하였다.

Table 3: Coverage probability (nominal confidence level = 0.95)

m	$B = 1000$	$B = 3000$	m	$B = 1000$	$B = 3000$
-2	94.2%	94.8%	0	94.8%	95.2%
-1.8	94.0%	94.6%	0.2	94.9%	93.7%
-1.6	94.1%	94.8%	0.4	94.7%	95.3%
-1.4	94.4%	94.9%	0.6	94.6%	95.4%
-1.2	94.5%	95.1%	0.8	94.5%	94.1%
-1	94.4%	92.9%	1	94.5%	94.0%
-0.8	94.4%	94.0%	1.2	94.5%	94.0%
-0.6	94.6%	94.9%	1.4	94.3%	94.6%
-0.4	94.6%	96.7%	1.6	94.4%	95.7%
-0.2	94.9%	95.1%	1.8	94.7%	94.8%

Table 4: Summary statistics for 1-step ahead prediction errors

m	MSE	MAD	MAPE	WMAPE	MSE	MAD	MAPE	WMAPE
-2	6.14154	0.99971	137.729	100.850	6.97491	0.99783	137.368	100.029
-1.8	5.36563	0.99960	120.899	99.2554	5.98589	0.99961	120.835	99.9883
-1.6	4.60219	0.99874	127.26	99.8213	4.98739	0.99885	127.214	99.9122
-1.4	4.00080	0.99841	125.915	99.4585	4.98568	0.99807	125.987	99.8337
-1.2	3.44107	0.99942	124.69	99.8929	3.97769	0.99765	124.448	99.7914
-1	2.95980	0.99929	113.859	99.9851	2.98214	0.99864	113.807	99.8093
-0.8	2.57970	0.99817	113.067	99.9239	2.98042	0.99857	113.327	99.8839
-0.6	2.30974	0.99709	114.782	99.1839	2.98310	0.99823	114.724	99.8499
-0.4	2.10726	0.99702	112.337	99.4868	2.97980	0.99958	112.159	99.9847
-0.2	1.98357	0.99972	106.271	99.0269	1.97798	0.99640	106.144	99.6669
0	1.99517	0.99668	116.882	99.9476	1.97896	0.99919	116.204	99.9459
0.2	2.04142	0.99903	112.532	99.3508	2.98441	0.99936	112.885	99.7878
0.4	2.21839	0.99809	110.577	99.2093	2.97972	0.99765	110.064	99.7254
0.6	2.47323	0.99816	117.529	99.7672	2.98792	0.99699	117.605	99.9768
0.8	2.82159	0.99926	117.248	99.5742	2.98095	0.99950	117.424	99.8912

원점 이동한 T-ARCH(1) 모형의 예측력을 비교하기 위해 모수적 붓스트랩을 이용하였다. 전체 633개 데이터 모두 이용하여 1-시차 후($l = 1$) 예측을 분석하였으며 반복 수는 $B = 1,000$ 과 $B = 3,000$ 을 사용해 비교/평가하였다. B 번의 모수적 붓스트랩으로 구한 예측분포에서 (0.075, 0.975) 분위수를 구성하여 명목 신뢰도 95%에 속한 실제 수익률의 포함 비율, 즉 coverage probability (CP)를 계산한다. 각 모형의 coverage probability (CP)는 Table 3에 정리하였다.

$B = 1,000$ 과 $B = 3,000$ 에서 분계점 $m = -0.2$ 인 모형일 때, CP가 명목 신뢰도 95%에 가까웠다. 따라서 CP-기준으로 분계점 $m = -0.2$ 인 T-ARCH(1) 모형이 예측력이 가장 정확한 모형으로 판단되어 가장 우수하다는 결론을 내릴 수 있다. 모수적 붓스트랩으로 구한 시계열 표본 $\{X_{t+1}^{(i)}\}_{i=1}^B$ 의 평균을 MMSE-예측값으로 계산하여 예측오차 MSE(평균제곱오차), MAD(평균절대오차), MAPE(평균절대백분위오차) 그리고 WMAPE(가중평균절대백분위오차)를 구하였다. MAPE를 계산할 때 분모가 영(zero)에 가까우면 비율이 왜곡될 가능성이

있다. 이를 보완하기 위해 MAPE와 WMAPE를 함께 이용하였다.

$$\begin{aligned} \text{MSE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (X_{T+1+i} - X_{T+i}(1))^2, \\ \text{MAD} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |X_{T+1+i} - X_{T+i}(1)|, \\ \text{MAPE} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \frac{X_{T+i}(1)}{X_{T+1+i}} - 1 \right| \times 100, \\ \text{WMAPE} &= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (|X_{T+i}(1) - X_{T+1+i}|)}{\sum_{i=0}^{n-1} |X_{T+1+i}|} \times 100. \end{aligned}$$

모든 m 에 대한 요약 통계량은 Table 4에 정리하였다. 반복수 $B = 1,000$ 에서는 MSE와 MAD 기준으로 분계점이 $m = -0.2$ 인 모형과 분계점이 영(zero)인 T-ARCH(1) 모형이 최적이고, $B = 3,000$ 에서 분계점이 $m = -0.2$ 인 모형이 최적으로 선택하고 있다. MAPE와 WMAPE 기준으로는 $B = 1,000$ 과 $B = 3,000$ 모든 경우에서 최적인 모형은 분계점이 $m = -0.2$ 모형이다. 전체적으로 분계점이 $m = -0.2$ 인 모형, 즉 원점이 -0.2 로 이동한 모형의 예측력이 가장 우수하다고 볼 수 있다.

5. 결론 및 추후 연구

본 연구에서는 원점 이동한 비대칭 변동성 모형을 제안하였으며 Covid-19 기간의 국내 종합주가지수(KOSPI)의 상세한 분석을 통해서 제안된 모형의 유용성 및 타당성을 보여주었다. 팬데믹 기간 종합주가지수에 대해서 분계점이 원점 좌측으로 이동한 $m = -0.2$ 모형이 로그 가능도(log likelihood), AIC, BIC 기준으로 가장 우수하여 추천되었다. 추천된 모형의 예측력을 평가하고자 모수적 붓스트랩을 이용하였으며, 이를 통해 분계점이 $m = -0.2$ 인 모형이 예측력 입장에서 가장 우수하였다. Covid-19와 같은 특수한 상황에서의 금융 시계열에 대한 추가적인 연구 및 분석은 의미 있는 미래 연구주제가 될 것이다. 본 연구에서는 제안한 변동성 함수가 불연속 지점인 분계점 m 에서 미분 불가능 성질로 인해 모수 추정에 이론적인 어려움이 존재하여 이를 우회하기 위해 분계점 m 을 고정된 상수로 간주하여 변화시키면서 분석하였으며, 분계점 m 을 모수로 간주하여 추정하고 추정량에 대해 추론하는 이론적인 연구를 추후 과제로 남겨두고자 한다. 제안한 모형에 따르면 Covid-19 기간 KOSPI 자료에서는 평균수정한 수익률(ϵ_t)이 음수(-0.2)일 때 변동성이 최소값을 가진다. 즉 일정 부분 음의 수익률에서 최소 리스크로 (시장 참여자들이) 인식한다는 의미이며 이 기간 KOSPI가 전반적으로 계속 상승하는 시기임을 고려하면 타당한 모형이라 할 수 있겠다. 반대의 경우, 예를 들어, 2008년 금융 위기 당시의 KOSPI는 전반적으로 하락하는 기간이므로 제안된 모형을 적용하면 평균수정한 수익률(ϵ_t)이 양수일 때(즉, m 이 양수일 때) 변동성이 최소값(최소 리스크 값)을 가질 것으로 예상할 수 있다. 따라서, 제안한 모형을 특수한 시기 다양한 금융 시계열 실제 자료에 적합해 원점 이동 현상을 확인해 보는 것은 흥미로운 미래 연구 과제가 될 것이다. 모의실험(simulation)과 관련해서, 4절에서 모수적 붓스트랩을 이용한 반복 수 1,000과 3,000의 모의 난수를 생성한 후 모의 예측분포(Table 3)와 모의 예측 오차의 평가 통계량들(Table 4)을 통해 모형들을 비교하였다. 본 연구에서는 수행하지 않았으나, 모수 추정과 같은 통계적 추론에 관한 다양한 모의실험 연구도 유익한 과제이며 이를 미래 연구로 남겨두고자 한다.

References

- Bollerslev T (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**, 307–327.
- Choi MS, Park JA, and Hwang SY (2012). Asymmetric GARCH processes featuring both threshold effect and bilinear structure, *Statistics & Probability Letters*, **82**, 419–426.
- Choi SW, Yoon JE, Lee SD, and Hwang SY (2021). Asymmetric and non-stationary GARCH(1, 1) models: Parametric bootstrap to evaluate forecasting performance, *Korean Journal of Applied Statistics*, **34**, 611–622.
- Engle RF (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**, 987–1008.
- Engle RF and Ng VK (1993). Measuring and testing the impact of news on volatility, *Journal of Finance*, **48**, 1749–1778.
- Kim DR and Hwang SY (2020). Forecasting evaluation via parametric bootstrap for threshold-INARCH models, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **27**, 177–187.
- Lee HR and Hwang SY (2022). Multiple-threshold asymmetric volatility models for financial time series, *Korean Journal of Applied Statistics*, **35**, 347–356.
- Miguel JA and Olave P (1999). Bootstrapping forecast intervals in ARCH models, *TEST: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research*, **8**, 345–346.
- Tsay RS (2010). *Analysis of Financial Time Series* (3rd ed), Wiley, New York.
- Yoon JE, Lee JW, and Hwang SY (2014). News impact curves of volatility for asymmetric GARCH via LASSO, *Korean Journal of Applied Statistics*, **27**, 159–168.

Received August 15, 2023; Revised September 11, 2023; Accepted September 12, 2023

원점이 이동한 비대칭-변동성 모형의 제안 및 응용

이예진^a, 황선영^a, 이성덕^{1,b}

^a숙명여자대학교 통계학과; ^b충북대학교 정보통계학과

요약

본 논문에서는 비대칭 변동성을 다루고 있다. 대표적인 비대칭 모형인 분계점-ARCH에서 원점이 영(zero)에서 이동한 모형을 제안하고 있다. 제안된 모형은 변동성의 최소값이 비-영(non-zero)에서 생기는 특수한 구조의 비대칭 모형이며 AIC 등의 모형선택기준과 더불어 모수적-붓스트랩을 통한 예측분포를 이용하여 원점으로부터의 이동량을 결정할 수 있다. 팬데믹 기간의 국내 종합주가지수(KOSPI) 자료 분석을 통해 모형의 응용 절차를 제시하였다.

주요용어: 비대칭 변동성, 원점 이동한 변동성, 모수적 붓스트랩

본 연구는 한국연구재단의 지원을 받았습니다 (NRF-2021R1F1A1047952).

¹교신저자: (28644) 충북 청주시 서원구 충대로 1, 충북대학교 정보통계학과. E-mail: sdlee@chungbuk.ac.kr