

추적자를 이용한 후퇴 침식 파이핑 현상 탐지법 개발 연구

정 원* · 김병욱** · 서일원*** · 박용성****

Jeong, Won* , Kim, Byunguk** , Seo, Il Won*** , Park, Yong Sung****

Detecting Backward Erosion Piping Using a Tracer

ABSTRACT

Internal erosion is one of the main causes of levee damage and collapse, and representative of this is backward erosion piping. This type of internal erosion accounts for one-third of the damage to levees, meaning it is important to predict and prevent it. In this work, experiments were conducted with the aim of detecting piping in advance by using a tracer. Experiments were undertaken by changing the head difference, soil diameter, and the installation of the cutoff wall. A tracer was injected twice, once at the beginning of the experiment and once after the piping occurred. A key finding was that the piping process significantly affected the concentration variation of the tracer in a soil layer. Hence, a tracer concentration curve monitored at downstream could provide information about piping occurrence. It is expected that the results of this study can be used to prevent levee damage and collapse caused by piping.

Key words : Levee, Piping, Tracer, Small-scale experiment, Head difference, Concentration curve

초록

내부 침식은 제방 손상 및 붕괴의 주요 원인 중 하나이며, 그 대표적인 유형으로 후퇴 침식 파이핑을 들 수 있다. 후퇴 침식 파이핑은 내부 침식 관련 제방 손상의 약 1/3 정도를 차지하며 이를 예측하고 예방하는 것은 제방의 안전성 유지를 위해 중요하다. 본 연구에서는 추적자를 이용해 파이핑 현상을 예측하여 사전에 예방하는 것을 목적으로 실험을 실시하였다. 실험은 상류측과 하류측의 수두차, 유사의 크기, 차수벽의 유무 세 가지 조건을 변경하여 진행하였다. 추적자인 로다민은 실험을 시작할 때와 파이핑이 발생했다면 발생한 직후, 총 두 번 주입하였다. 실험을 진행하는 동안 파이핑 형성 과정을 영상으로 기록하였고 추적자의 농도와 유출구에서의 유량의 시계열을 측정하였다. 실험을 통해 본 연구에서는 유사의 종류에 따라 파이핑이 발생하는 수두차가 다르며 수두차가 클수록 파이핑이 쉽게 발생한다는 점을 관찰하였다. 또한 파이핑이 발생한 시점 직후에 추적자의 농도가 급격하게 증가하는 그래프의 양상을 확인했고 이를 통해 추적자의 농도 시계열 자료를 획득함으로써 파이핑의 발생 유무를 발견할 수 있다는 점을 확인하였다. 파이핑으로 인한 제방 손상 및 붕괴를 예방하는 데 있어서 본 연구의 활용도가 높으리라 기대된다.

검색어 : 제방, 파이핑, 추적자, 소규모 실험, 수두차, 농도곡선

* 서울대학교 건설환경공학부 석사과정, 공학사 (Seoul National University · jeongone1005@snu.ac.kr)

** 정회원 · 서울대학교 건설환경공학부 박사과정, 공학석사 (Seoul National University · kim.byunguk@snu.ac.kr)

*** 중신회원 · 서울대학교 건설환경공학부 명예교수, 서울대학교 건설환경종합연구소 책임연구원, 공학박사 (Seoul National University · seoilwon@snu.ac.kr)

**** 중신회원 · 교신저자 · 서울대학교 건설환경공학부 부교수, 서울대학교 건설환경종합연구소 겸임연구원, 공학박사

(Corresponding Author · Seoul National University · dryspark@snu.ac.kr)

Received November 18, 2022/ revised December 5, 2022/ accepted December 27, 2022

1. 서론

내부 침식은 제방 손상 및 붕괴의 주요 원인 중 하나이며 (Hoffmans and van Rijn, 2017), 그 대표적인 유형으로 후퇴 침식 파이핑을 들 수 있다(Akrami et al., 2021). 후퇴 침식 파이핑은 내부 침식 관련 제방 손상의 약 1/3 정도를 차지하며(Robbins et al., 2020) 이를 예측하고 예방하는 것은 제방의 안전성 유지를 위해 중요하다. 파이핑 현상은 주로 작고 얇은 곳의 침식이 제방 아래에서 상류로 진행될 때 발생하며 유사가 이동하는 과정에서 침식이 일어나는 과정에서 심화되는 것이 대부분이며(Robbins et al., 2021), 이러한 누수나 유사의 침식 이후에 땅의 모양이나 불규칙함으로 인해 입계값에 도달하게 되면 결국 후퇴 침식 파이핑 현상이 발생하게 된다(Hoffmans and van Rijn, 2017). 파이핑 실험 관련 선행연구는 Elsevier 사의 출판지인 SCOPUS에서 “Backward Erosion Piping”과 “Experiment”를 키워드로 최근 10개년의 연구를 조사했다. 실험 규모를 분류할 때 소규모는 누수 길이가 1 m 이내일 때, 중규모는 1~5 m 이내일 때, 대규모는 5 m 이상일 때로 구분한다(van Beek, 2015). 조사 결과, 실험을 진행한 16개의 선행 연구들 중 소규모 실험이 63 %로 가장 많은 비율을 차지했고, 중규모와 대규모 실험이 각각 19 %와 13 %, 세 가지 규모의 실험을 모두 진행한 연구가 6 %의 가장 적은 비율을 차지했다. 소규모 실험에서 수행한 연구는 투수계수와 유사 크기가 파이핑에 미치는 영향(Xiao et al., 2018)에 관한 연구나 급격한 수두차의 변화를 주었을 때의 파이핑 현상에 미치는 영향 (Vandenboer et al., 2019) 등에 대해 진행되었다. 이제까지 진행된 선행연구들에서 알 수 있듯이 파이핑 현상 자체에 관한 연구는 많이 진행되었지만 파이핑 현상이 발생하기 전에 미리 예방하고 예측하는 내용에 대한 연구는 현재까지 진행된 것이 없었다. 그 중에서도 추적자를 활용하여 파이핑 현상을 감지하는 연구는 아직

까지 이루어지지 않았다. 이에, 본 연구는 파이핑 현상 분석을 위한 소규모 추적자 실험 장치를 구축하고, 이를 통해 추적자를 이용한 파이핑 감지 방법을 개발하는 것을 목표로 한다.

2. 연구방법

2.1 실험 장치

상하류 수두차와 하상토 조건에 따른 파이핑 현상의 발생을 관찰하고, 이와 동시에 하상토 내부에서 유하는 추적자의 움직임을 파악하기 위해 Fig. 1과 같은 소규모 파이핑 실험 장치(Piping Tracer Test Apparatus, PiTTA)를 설계하였다. 본 실험장치는 실제 보 구조물과 이를 지지하는 하상토, 그리고 이에 가해지는 상하류 수위차이를 재현하였다. 실험장치의 규격은 Xiao et al.(2019) 과 Chen et al.(2015)의 실험 장치를 벤치마킹하였으며, 상류 고수조의 높이를 조절하여 상하류의 수두차를 설정할 수 있도록 하였다 (Vandenboer et al., 2019). 하류에 위치한 유출구의 형태는 원형의 형태를 채택하였는데, 이는 파이핑의 발생 시작 위치를 고정하고, 넓은 형태의 유출구에 비해 파이핑 발생에 필요한 입계 수두경사가 낮기 때문에 발생 양상을 쉽게 파악할 수 있는 장점이 있다(Yao et al., 2007).

2.2 실험 재료

실험에 사용한 유사의 종류는 선행연구에서 사용된 유사의 입도 자료는 아래의 Fig. 2와 같다. Fig. 2는 선행연구와 본 연구에서 설정한 수두경사와 유사 입경을 비교한 것이며 대부분의 선행연구에서 사용한 유사의 입경이 $d_{50}=0-0.5$ mm 사이에 분포하는 것을 알 수 있으며 본 연구에서도 선행연구에서 사용한 유사 입경과 가까운 크기의 유사를 사용하여 실험을 진행하였다. 유사의 투수계수를 산정하기 위한 정수위 투수계수 산정 실험 장치를 KS F2322에

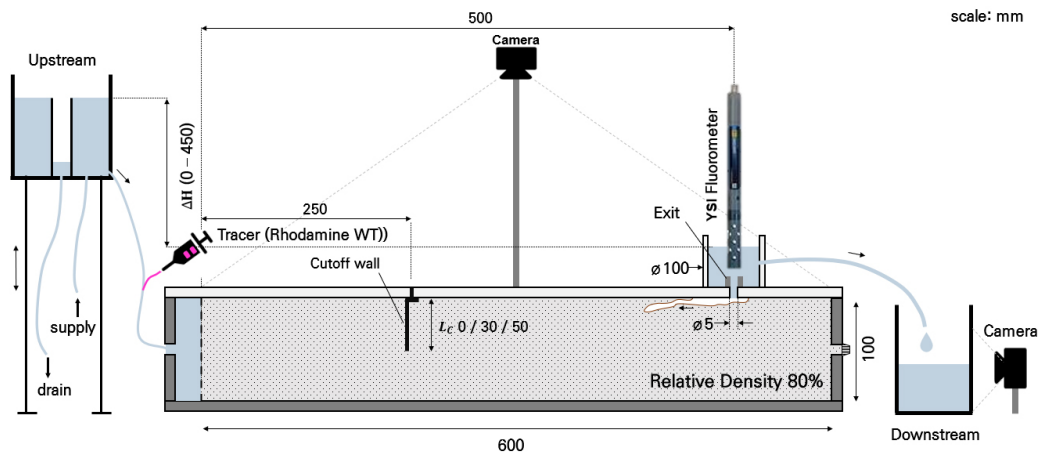


Fig. 1. Schematic Diagram of the Piping Experimental Device Used in This Work

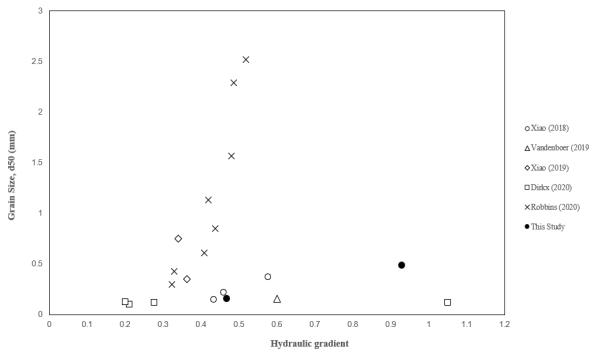


Fig. 2. Particle Size Distribution of Soil Used in Previous Studies (Dirks et al., 2020; Robbins et al., 2020; Vandenoer et al., 2019; Xiao et al., 2018; Xiao et al., 2019) vs This Study

Table 1. Size and Hydraulic Conductivity of the Soil Used in the Experiment

	No.6	No.7
Δh	19	19
d_{50} (mm)	0.49	0.16
K (cm/s)	0.05	0.015

의거하여 제작한 후 Darcy의 법칙을 이용하여 산정하였고 Table 1에 나타내었다. Table 1에서 Δh 는 투수계수 실험 장치에서의 수두차, d_{50} 은 유사 의 직경, K 는 산정한 투수계수이다.

2.3 실험 방법

소규모 파이핑 실험장치를 이용한 본 실험은 유사 를 설치할 때 매 실험마다 다른 조건이 형성될 수 있는 경우를 방지하며 실험의 반복성(Repeatability)을 확보하기 위해 유사 설치 과정을 정립하였다. 유사 설치 과정은 파이핑 발생 유무에 영향을 미치는 다짐도를 조절하기 위해 상대밀도(Relative Density, RD) 값을 이용하였다. 상대 밀도는 최대 다짐 조건과 최소 다짐 조건을 기준으로 다짐 정도를 나타낼 수 있는 지표이며 이를 80 %에 맞춘 후 필요 유사량을 설정하였다.

실험 장치에 물을 담아두고 필요 유사량의 1/3을 포설한 후 다짐하고 이 과정을 총 3회 반복하였다. 그 후 상류 밸브를 조절하여 최소한의 유량으로 하류 유지 수위에 도달할 때까지 흘러 하상 내 남은 공기를 모두 제거하였다. 이후 본 실험을 진행하기 위한 단계는 크게 준비 단계, 측정 단계, 데이터 취득 단계로 나누어 진행하였다. 먼저 파이핑 현상 관측용 카메라와 하류 측 수위 측정용 카메라를 설치한 후에 100 ppm의 로다민(Rhodamine WT) 6 mL를 펄스 주입하였다. 주입 시점은 실험을 시작할 때 1회 주입하며 파이핑 발생 정도에 따라 다회 추가 주입하였다. 이후, 하류에서 측정되는 로다민 농도가 실험 시작 시점에서의 농도에 근사하였을 때 실험을 종료하였다. 상단과 측면에 설치한 캐

Table 2. Details of the Experimental Case

Case	Soil	d_{50}	$\Delta H/L$	l_c/L
Series 1	No.6	0.49	0.06	0
			0.30	
			0.48	
			0.60	
			0.72	
			0.84	
			0.90	
Series 2	No.7	0.16	0.12	0
			0.18	
			0.24	
			0.30	
			0.36	
			0.48	
			0.60	
Series 3	No.6	0.49	0.72	0.06
			0.72	0.10

리를 통해 파이핑 정사 영상과 유량 시계열 자료를 취득하였다. 추적자 로 사용한 로다민은 형광성 물질이어서 광학측정장비(YSI-600OMS, YSI inc., Yellow Springs, OH)를 이용하여 농도 곡선을 취득하였다.

2.4 실험 케이스

실험 케이스는 아래의 Table 2와 같다. 수두경사인 $\Delta H/L$ 과 유사 의 입경 d_{50} 에 따라 Series 1과 Series 2로 구분하였다. 차수벽 을 설치한 Series 3에서는 Series 1에서 사용한 하상토 종류를 동일하게 설정하였고 수두경사는 0.72로 고정된 후에 실험을 진행 하였다. 차수벽은 침투길이의 비로 산정하여 l_c/L 로 표기하였다.

3. 결과 및 분석

3.1 추적자 농도변화 분석 결과

3.1.1 Series 1

Series 1에서 어떠한 하상변화가 없는 수두경사인 0.06부터 0.3, 0.48 중에서 아래의 Fig. 3은 수두경사가 0.48일 때의 파이핑 정사 영상 중 일부이다. 이때의 농도 시계열 자료에서 처음 추적자를 주입한 후에 큰 변화 없이 완만한 형태를 띠는 것을 확인할 수 있었다(Fig. 4). 아래의 Fig. 5는 Series 1에서 수두경사가 가장 큰 0.9일 때의 파이핑 정사 영상 중 일부이다. 초기 하상변화는 유출구 인근에서부터 발생하였고 상하류 수두경사로 인해 가해지는 압력으로 물이 침투하며 이 과정에서 후퇴 침식 파이핑 현상이 발생하는 것을 실험을 통해 관측하였다. Fig. 6은 이때의 농도

시계열 자료이다. 해당 케이스에서는 실험 시작과 파이핑 발생 이후, 총 두 번 추적자를 주입하였는데 처음 주입한 이후에서도 농도 시계열 자료가 눈에 띄게 변하는 양상을 확인할 수 있었고,

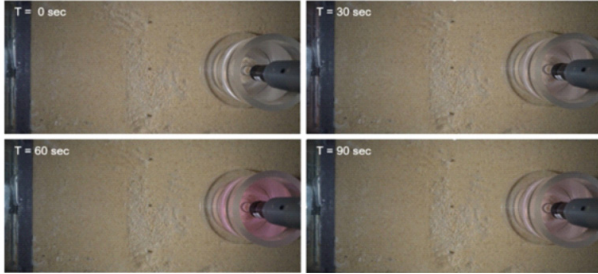


Fig. 3. Changes in the Riverbed during the Experiment for Case S1024 ($\Delta H/L=0.48$, $d_{50}=0.49mm$)

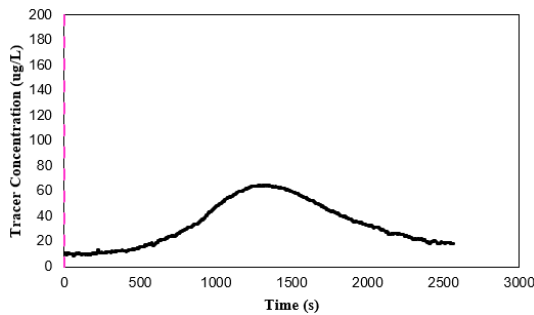


Fig. 4. The Tracer Concentration Curve for Case S1024 ($\Delta H/L=0.48$, $d_{50}=0.49mm$)

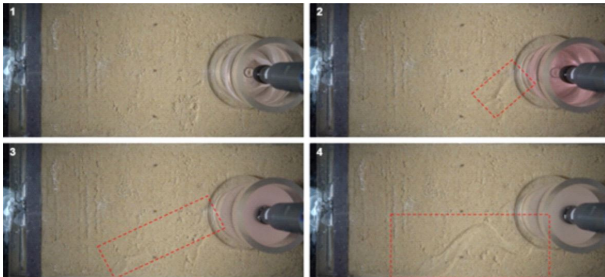


Fig. 5. Changes in the Riverbed during the Experiment for Case S1045 ($\Delta H/L=0.9$, $d_{50}=0.49mm$)

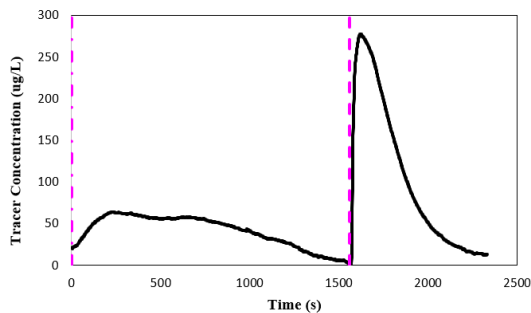


Fig. 6. The Tracer Concentration Curve for Case S1045 ($\Delta H/L=0.9$, $d_{50}=0.49mm$)

파이핑이 발생이 종료된 후의 두 번째 주입에서는 대부분의 유선이 침식된 파이프 형태의 공간으로 형성되었으며, 이에 추적자의 경로도 하상내의 공극이 아닌 그 공간을 통해 이송하여 하류에 빠르게 도달하였다. 이는 하류에서 측정된 추적자의 농도곡선의 빠른 상승 시점으로 파악할 수 있다.

3.1.2 Series 2

Series 2에서도 파이핑 현상이 발생하지 않을 때 추적자는 검출되는 현상을 관찰하였다(Fig. 7).

파이핑이 발생하기 시작하는 임계 수두경사는 0.3이며, Series 1의 실험결과와 비교하면 더욱 낮은 임계값에서 파이핑이 발생하는 것으로 관찰되었다. 이는 Series 2에서 사용한 유사의 입경은 0.14 mm로, Series 1에서 사용한 유사의 입경인 0.45 mm에 비하여 작고, 이로 인해 투수계수가 30 % 수준으로 낮기 때문이며, 동일한 수두차에 의해 동일한 압력을 받았을 때, Series 2의 경우 빠른 침투유속과 작은 입경으로 침식에 더욱 취약하기 때문으로 추측된



Fig. 7. Changes in the Riverbed during the Experiment for Case S2012 ($\Delta H/L=0.24$, $d_{50}=0.16mm$)

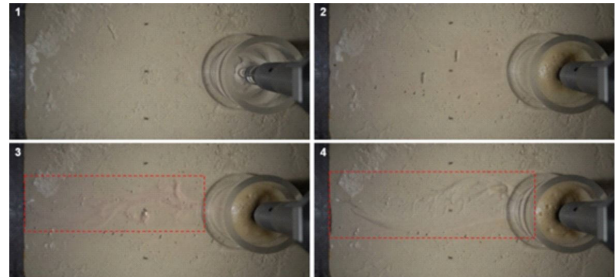


Fig. 8. Changes in the Riverbed during the Experiment for Case S2018 ($\Delta H/L=0.36$, $d_{50}=0.16mm$)

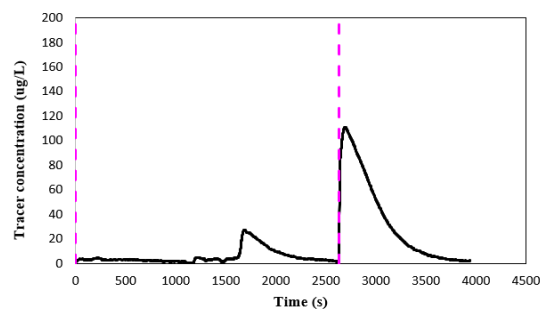


Fig. 9. The Tracer Concentration Curve for Case S2018 ($\Delta H/L=0.36$, $d_{50}=0.16mm$)

다. 수두경사가 0.36일 땀 파이핑 현상이 발생하는 과정에서 추적자가 함께 검출되는 모습 또한 확인할 수 있었다(Fig. 8). 이때의 농도 시계열 자료를 나타낸 Fig. 9에서도 파이핑이 발생하는 과정에서 농도가 증가하는 양상을 띠었고 파이핑이 발생한 이후인 두 번째 주입 이후에서는 농도가 눈에 띄게 증가하는 것을 확인할 수 있었다.

3.2 파이핑 발생에 따른 유량 분석

유출구로 유출되는 유량을 측정할 결과 파이핑이 발생하지 않은 경우에는 동일한 조건에서 시간에 따른 유량 변화는 없는 것으로 관찰되었다. 아래의 Table 3에 모든 실험 케이스에서 측정된 파이핑 전과 후의 유량값, 파이핑 시작 시점을 기록하였고 상하류 수두차가 커질수록 유량이 증가하며 파이핑 시작 시점 또한 수두차가 커질수록 점점 짧아지는 경향성을 보였다. Fig. 10은 d_{50} 이 0.49, 0.16 mm일 때의 파이핑 발생 이전과 이후의 유량을 비교한 그래프이다.

Table 3. Flow Rate before and after Piping Occurs (Q_b , Q_a), When Piping Begins to Occur (T_p)

Case	Flow rate (mL/s)		T_p
	Q_b	Q_a	
S1003	16.65	-	-
S1015	93.62	-	-
S1024	133.88	-	-
S1030	96.58	97.94	166
S1036	160.65	160.44	118
S1042	178.55	178.55	142
S1045	142.03	160.02	168
S2006	8.95	-	-
S2009	8.53	-	-
S2012	13.12	-	-
S2015	32.52	118.51	945
S2018	25.17	87.68	1239
S2024	37.73	123.46	921
S2030	46.81	164.77	366

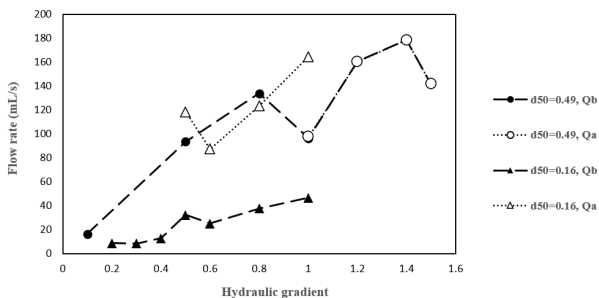


Fig. 10. Flow Rate according to the Hydraulic Gradient

수두경사가 커질수록 유출구에서 빠져나가는 유량 또한 증가하는 양상을 보이는 것을 확인할 수 있었다.

3.3 차수벽 유무의 영향

차수벽 유무에 따른 영향을 알아보기 위해 각각 길이 3 cm (C1136)와 5 cm (C1236) 차수벽을 설치하여 같은 방식으로 각각 3회 반복하여 실험을 진행하였다. 차수벽을 설치한 후에 실험을 진행했을 때에도 차수벽을 설치하지 않은 케이스와 마찬가지로 아래의 사진과 같이 파이핑이 발생한다는 것은 동일하다는 것을 알 수 있었다. 가장 큰 차이점은 차수벽이 있을 때의 케이스에서는 파이핑의 진행이 차수벽 부근에서 멈추는 것을 확인할 수 있었다. 케이스 C1136 (Fig. 11)에서는 파이핑의 진행 방향이 유출구의 측면으로 진행됐는데, 이 과정에서 차수벽이 영향을 끼치지 않는 부분인 실험 장치의 측면을 통해 파이핑이 진행되는 모습을 확인할 수 있었다, 또한 케이스 C1236 (Fig. 12)에서는 파이핑이 진행되는 과정에서 차수벽 부근에서 그 진행을 멈췄고, 차수벽 뒤쪽 부근에서 유사가 아래로 꺼지는 현상을 확인할 수 있었다. 두 케이스 모두 반복해서 실시한 3회의 케이스에서 일관된 현상이 관찰되었다.

농도 시계열 자료(Fig. 13)에서는 파이핑 현상이 발생한 후에 추적자를 주입하자마자 농도 시계열 자료가 급변하는 양상을 띠는 다른 실험 케이스와는 다르게, 파이핑 현상이 발생한 후에 추적자를 주입했을 때도 파이핑이 발생하기 전에 주입한 이후와 비슷한

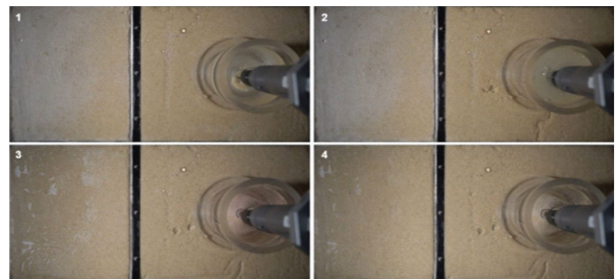


Fig. 11. Changes in the Riverbed during the Experiment for Case C1136

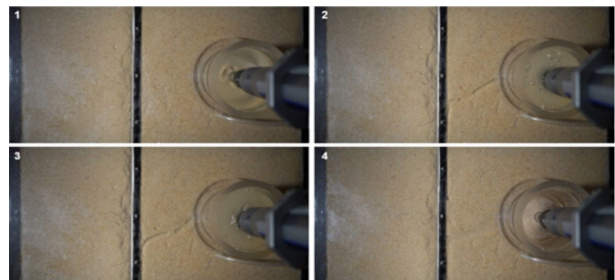


Fig. 12. Changes in the Riverbed during the Experiment for Case C1236

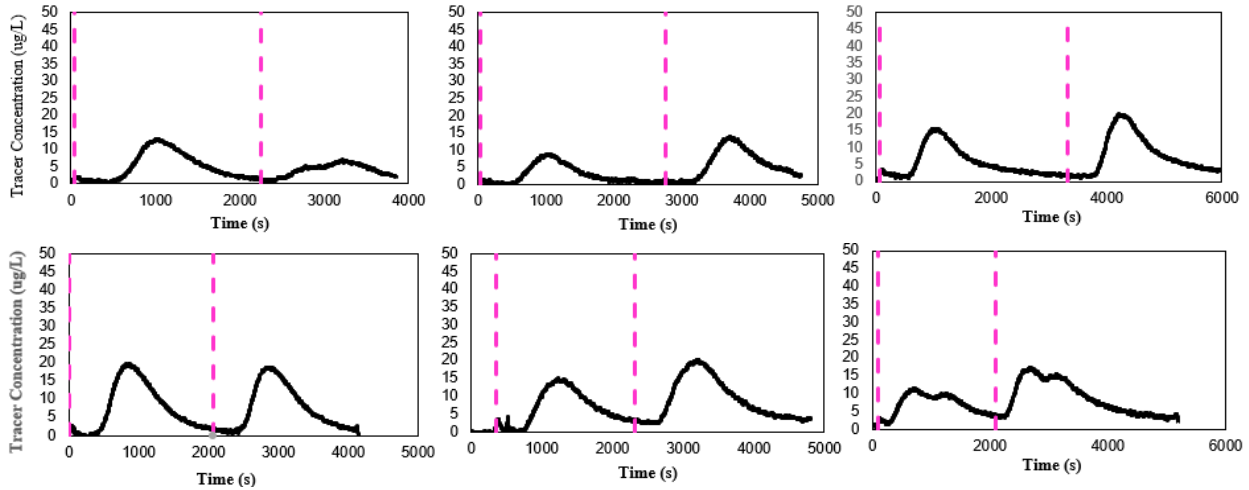


Fig. 13. Tracer Concentration Curves C1136, C1236 ($\Delta H/L=0.72, d_{50} = 0.49\text{mm}$)

양상을 띠었다. 이는 차수벽으로 인해 전체 침투길이에 대한 파이핑의 길이가 제한되었기 때문이다. 이러한 현상은 3회의 반복실험에서 모두 일관된 양상을 보이는 것을 확인하였다.

3.4 침투 시간 분석

Darcy's law를 활용하여 침투 길이 L , 투수계수 K , 수두차 ΔH 를 활용하여 침투 시간을 산정하는 식을 다음과 같이 도출하였다(Eq. (1)). 그 후 추적자를 주입한 시간 이후 가장 높은 농도를

Table 4. Ratio of Penetration Time and Time at Highest Concentration since Tracer Injection

Case	ΔH	T	ΔT	$\frac{\Delta T}{T}$	$\frac{\Delta H}{d_{50}}$	Piping
S1003	3	16667	5837	0.350	61	X
S1015	15	3333	1995	0.599	306	X
S1024	24	2083	1339	0.643	490	X
S1030-T1	30	1667	977	0.586	612	X
S1030-T2	30	1667	1015	0.609	612	X
S1036-T1	36	1389	541	0.390	735	X
S1036-T2	36	1389	551	0.397	735	X
S1042	42	1190	517	0.434	857	X
S1045-T1	45	1111	226	0.203	918	X
S1045-T2	45	1111	57	0.051	918	O
S2006	6	27778	12205	0.439	375	X
S2009	9	18519	15365	0.830	563	X
S2012	12	13889	7287	0.525	750	X
S2015-T1	15	11111	2058	0.185	938	X
S2015-T2	15	11111	34	0.003	938	O
S2018-T1	18	9259	1686	0.182	1125	X
S2018-T2	18	9259	57	0.006	1125	O
S2024-T1	24	6944	814	0.117	1500	X
S2024-T2	24	6944	23	0.003	1500	O
S2030-T1	30	5556	412	0.074	1875	O
S2030-T2	30	5556	39	0.007	1875	O

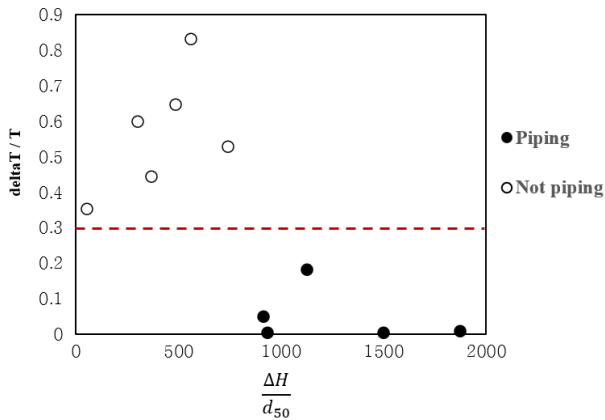


Fig. 14. Distribution of $\Delta T/T$ Values according to the Presence or Absence of Piping

기록했을 때의 시간을 ΔT 로 설정한 후에 산정한 침투 시간과의 비 $\frac{\Delta T}{T}$ 를 이용하여 파이핑 발생 유무의 차이를 파악하고자 하였다. 실험 과정에서 추적자를 두 번 주입한 경우, 첫 번째 주입 이후인 T1과 두 번째 주입 이후인 T2로 나누어 분석을 진행하였다. 파이핑 발생 여부를 구분할 때 약간의 하상 변화만 발생한 케이스에 대해서는 “발생하지 않음”으로 구분하였고 Table 4에 그 결과를 정리하였다.

$$\frac{L}{T} = K \frac{\Delta H}{L}, L = KT \frac{\Delta H}{L}, T = \frac{L^2}{K \Delta H} \quad (1)$$

분석 결과, $\frac{\Delta H}{d_{50}}$ 가 커질수록, 즉 수두차가 증가할수록 $\frac{\Delta T}{T}$ 값이 감소하는 경향성을 보였다. 또한 완전히 파이핑이 발생한 경우에는 $\frac{\Delta T}{T}$ 값이 눈에 띄게 감소하여 0에 가까운 값을 가지는 것을 확인할 수 있었다. 실험을 통해 취득한 농도 시계열 자료를 통해 파이핑 발생 유무를 파악하기 위해 파이핑이 발생했을 때와 발생하지 않았을 때의 $\frac{\Delta T}{T}$ 값을 그래프를 통해 비교했을 때 0.2와 0.3 사이의 값을 기준으로 파이핑이 발생하지 않은 경우는 윗쪽, 파이핑이 발생한 경우는 아랫쪽에 분포하는 것을 확인할 수 있었고 파이핑이 완전히 발생한 케이스의 경우에는 0과 가까운 값을 나타냈다(Fig. 14). 이러한 결과를 현장에 적용한다면 실제 실험을 수행한 후에 농도 시계열 자료 분석을 통해 파이핑 발생 유무를 쉽게 파악할 수 있을 것이라 기대한다.

4. 결론

본 연구에서는 추적자를 이용하여 파이핑 현상을 예측하는 연구에 활용이 가능한지, 추적자를 통해 파이핑 여부를 알 수 있는지

확인하는 것을 목표로 한다. 실험 결과, 상하류 수두차가 클수록 침투유량이 증가하며, 하상도의 입경이 작을수록 파이핑이 발생할 수 있는 임계 수두경사가 낮아지는 것을 확인하였다. 또한 파이핑 발생에 대한 차수벽의 영향을 실험한 결과 차수벽은 침투수의 유량을 감소시키며 실험장치 상단을 따라 발생하는 파이핑 현상을 억제함을 확인하였다. 결론적으로 소규모 실내 실험을 통해 파이핑 발생 여부와 관계 없이 추적자를 활용하여 파이핑 현상을 감지하는 것이 가능함을 확인했고, 파이핑이 발생하기 전과 후의 농도 시계열 자료를 통해 파이핑 현상을 감지하는 것이 가능함을 확인했다.

감사의 글

이 논문은 국토교통부의 스마트시티 혁신인재육성사업으로 지원되었습니다. 한국수자원공사 “수중구조물 안전성 조사기법 및 현장검증 연구(C5202114851)”의 지원으로 수행되었으며 서울대학교 공학연구원 및 건설환경종합연구소의 지원에도 감사드립니다.

본 논문은 2022 CONVENTION 논문을 수정·보완하여 작성되었습니다.

References

- Akrami, S., Bezuijen, A., van Beek, V. and Terwindt, J. (2021). “Influence of a permeable sand layer on the mechanism of backward erosion piping using 3D pipe depth measurements.” *Acta Geotechnica*, Vol. 16, No. 12, pp. 3881-3898.
- Chen, J., Wang, S., Liang, Y., Wang, Y. and Luo, Y. (2015). “Experimental investigation of the erosion mechanisms of piping.” *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Vol. 52, No. 5, pp. 301-309.
- Dirkx, W. J., van Beek, R. and Bierkens, M. (2020). “The influence of grain size distribution on the hydraulic gradient for initiating backward erosion.” *Water*, Vol. 12, No. 9, 2644.
- Hoffmans, G. and van Rijn, L. V. (2017). “Hydraulic approach for predicting piping in dikes.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 56, No. 2, pp. 268-281.
- Robbins, B. A., Griffiths, D. V. and Fenton, G. A. (2021). “Random finite element analysis of backward erosion piping.” *Computers and Geotechnics*, Vol. 138, 104322.
- Robbins, B. A., Montalvo-Bartolome, A. M. and Griffiths, D. V. (2020). “Analyses of backward erosion progression rates from small-scale flume experiments.” *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 146, No. 9.
- van Beek, V. M. (2015). *Backward erosion piping initiation and progression*, Doctoral Thesis, Delft University of Technology, The Netherlands.
- Vandenboer, K., Celette, F. and Bezuijen, A. (2019). “The effect of sudden critical and supercritical hydraulic loads on backward

- erosion piping: small-scale experiments.” *Acta Geotechnica*, Vol. 14, No. 3, pp. 783-794.
- Xiao, Y. P., Cao, H. and Zhai C. (2018). “Analytical and experimental investigation of a disturbed zone around a pipe in sand.” *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Vol. 40, No. 4.
- Xiao, Y., Cao, H. and Luo, G. (2019). “Experimental investigation of the backward erosion mechanism near the pipe tip.” *Acta Geotechnica*, Vol. 14, No. 3, pp. 767-781.
- Yao, Q., Ding, L., Sun, D., Liu, C. and Zhang, Q. (2007). “Experimental studies on piping in single-and two-stratum dike foundations.” *Water Resource and Hydropower Engineering*, Vol. 38, No. 2, pp. 13-18.