

4학년 수학 검정 교과용 도서의 규칙 찾기 단원에 제시된 패턴 활동의 지도 방안 분석

방정숙(한국교원대학교, 교수)

이수진(한국교원대학교 대학원, 학생)[†]

패턴의 규칙을 찾는 활동은 초등학생들의 대수적 사고를 신장하는 데 유용하다. 본 논문은 초등학생들에게 패턴 활동을 지도하는 세 가지 주요 활동, 즉 패턴의 구조를 분석하는 활동, 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동, 규칙을 찾아 표현하는 활동을 중심으로 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 초등학교 4학년 검정 교과용 도서의 '규칙 찾기' 단원에 제시된 패턴 활동의 지도 방안을 분석하였다. 분석 결과 10종 도서에서 증가 수 패턴, 증가 기하 패턴, 계산식 패턴을 중심으로 세 가지 활동이 제시되어 있었다. 패턴의 구조를 분석하는 활동은 대부분 증가 기하 패턴을 다룰 때 제시되어 있었는데, 주로 패턴을 이루는 모형의 개수를 구하는 데 초점을 두었다. 반면 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동은 세 가지 패턴에서 고루 제시되어 있었고, 대개 가까운 항을 구하는 문항이 많았다. 규칙을 찾아 표현하는 활동은 자신의 언어로 규칙을 이야기해 보거나 써보도록 제시되어 있었다. 이와 같은 분석 결과를 토대로 본 연구는 초등학생들의 대수적 사고를 신장하기 위한 패턴 활동의 지도 방안에 대해 교과용 도서의 구성 및 활용 측면에서 구체적인 시사점을 제공한다.

I. 서론

패턴의 규칙을 파악하는 활동은 학생들의 수학적 사고 능력을 신장하는 데 도움이 된다. 예를 들어 곱셈구구, 수열 등 수 패턴의 규칙성을 활용하여 수 감각 및 수 세기 능력을 발달시킬 수 있으며 대칭이나 모양 등의 기하적 속성, 색이나 개수 등의 물리적 속성의 규칙을 활용하여 수학적 탐구 능력을 신장시킬 수 있다(Reys et al., 2015). 또한 규칙을 인식하고 기

호화하는 능력은 귀납적 사고의 기초가 된다(남승인, 2000).

최근 패턴의 규칙을 파악하는 활동은 초등학교에서 대수적 사고가 강조됨에 따라 더욱 그 중요성이 부각되어 왔다. 예를 들어 Reys 외(2015)는 패턴과 관계를 다루는 연구로 대수를 설명하면서 초등학교에서 패턴의 규칙을 찾고 그 이유를 정당화하는 것이 대수적 사고의 주요 부분이라고 강조하였다. 보다 구체적으로 패턴의 일부 항이나 배열 단계에서 공통성을 추측하고 이를 전체 항이나 단계로 확장하여 그 공통성이 적용되는지 탐색하면서 규칙을 일반화하고 다양한 방법으로 표현하며 정당화하는 과정을 통해 학생들의 대수적 사고를 신장시킬 수 있다(Blanton et al., 2011; Ferrara & Sinclair, 2016; Radford, 2010). 결국, 패턴의 규칙을 파악하는 활동은 학생들이 수학적 아이디어를 일반화하고 다양하게 표현하며 정당화 및 추론할 수 있는 발판이 된다는 측면에서 초등학교 학생들에게 여러 가지 패턴 활동을 지도하는 것이 중요하다.

초등학교에서 패턴 활동을 의미 있게 지도하여 대수적 사고 능력을 신장하는 것이 중요하다는 주장과 더불어 최근 여러 가지 연구가 진행되어왔다. 우선 국외 연구를 살펴보면 패턴의 구조를 탐색하기 위한 발문의 중요성이나 적절한 교수 개입의 필요성을 강조하는 연구(예, Moss & McNab, 2011; Twohill, 2018), 패턴의 규칙을 찾아 표현하는 과정의 지도 순서를 다룬 연구(예, Hourigan & Leavy, 2015; Radford, 2010), 패턴의 배열 순서와 패턴의 변화를 연결하여 사고하도록 지도했을 때의 효과를 분석한 연구(예, Callejo & Zapatera, 2017), 상대적으로 긴 기간 동안 패턴 활동을 꾸준히 지도하였을 때의 효과를 분석한 연구(예, Mulligan et al., 2020; Wijns et al., 2021) 등이 있다. 이처럼 국외 연구에서는 패턴 활동을 통한 학생들의

* 접수일(2022년 12월 19일), 심사(수정)일(2023년 1월 4일), 게재확정일(2023년 1월 4일)

* MSC 2000 분류 : 97U20

* 주제어 : 패턴, 규칙 찾기, 초등학교 수학 교과서

† 교신저자 : fun_2014@naver.com

대수적 사고 능력 자체를 면밀하게 분석하는 것을 뛰어넘어 다양한 패턴 활동을 중심으로 어떻게 지도하는 것이 효과적인지 그 지도 방안을 탐색한 연구도 상당히 진행되고 있음을 알 수 있다.

한편, 패턴 활동과 관련된 국내 연구는 주로 학생들의 사고 과정을 분석하는 것에 초점을 두어 학생들이 패턴을 인식하는 사고 유형이나 수준 분석, 일반화 과정 및 어려움 등을 다루는 경우가 많았다(예, 유미경, 류성립, 2013; 이명기, 나귀수, 2012; 최혜진 외, 2007). 본 연구와 관련된 패턴 활동의 지도 방안을 도출한 연구도 있었는데, 예를 들어 규칙성 영역의 학습 자료를 개발한 연구(남승인, 2000)와 패턴 활동의 지도 방안을 도출하여 학생들에게 적용한 연구가 있었다(김남균, 김은숙, 2009; 방정숙, 선우진, 2016a). 그러나 교과서에 제시된 패턴 활동의 지도 방안을 분석한 연구는 많지 않았다. 예외적으로 권성룡(2007)은 제7차 수학과 교육과정에 제시된 규칙성과 함수 영역을 분석하였는데, 지도 방안보다는 규칙성과 함수 영역의 단원 구성에 대한 시사점을 도출하는 데 초점을 두었다. 또한, 방정숙과 선우진(2016b)은 2009 개정 수학과 교육과정 1~6학년에 제시된 패턴 및 대응 관계에 대한 지도 방안을 분석하였으나 2009 개정 교육과정의 경우 1종의 국정 교과서가 개발되었기 때문에 현행 3~4학년 검정 체제의 다양한 패턴 활동을 분석하기에는 한계가 있었다. 가장 최근에, 도주원(2021)은 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 초등 교과서의 규칙성 영역 단원에 제시된 발문의 특성을 분석하였으나 효과적인 패턴 활동의 지도 방안에 중점을 두지는 않았다.

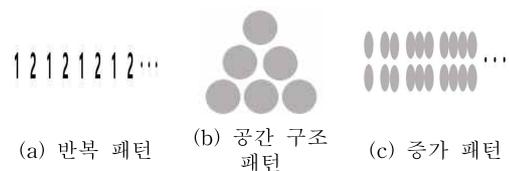
요약하면 국내에서 패턴 활동을 다루는 연구는 꾸준히 진행되어왔으나 정작 지도 방안을 자세히 탐색한 연구는 상대적으로 부족하다. 특히 우리나라에서의 높은 교과서 활용도를 고려한다면 패턴 활동과 관련하여 교과서에 어떤 패턴 활동이 어떻게 제시되는지 면밀하게 분석하는 것이 필요하다. 특히, 2022년에는 처음으로 3~4학년 수학과 교과서가 검정 체제로 전환되면서 10종의 교과서가 출판되었기 때문에, 여러 가지 교과서에서 패턴 활동을 어떻게 제시하고 있는지 분석하여 지도 방안에 대한 시사점을 도출하는 것은 시기적절하다고 판단된다. 더욱이 2022 개정 수학과 교육과정의 고시가 임박해 있고 이에 따라 3~4학년 수학과 검정 교과서가 개발된다는 점을 고려하면, 현행 검정 교과서

에 제시된 패턴 지도 활동을 분석하는 것이 후속 교과서 개발에도 중요한 시사점을 제공할 수 있을 것으로 기대된다. 다만, 3~4학년 수학과 교과서 중 패턴 활동을 다루고 있는 것은 4학년 1학기 교과서이므로 본 연구에서는 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 4학년 1학기 검정 교과서에 제시된 다양한 패턴 활동을 분석하여 학생들의 대수적 사고를 신장하기 위한 패턴 지도 방안과 관련한 시사점을 제공하고자 한다.

II. 이론적 배경

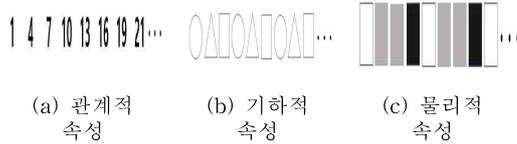
1. 패턴의 유형

패턴이란 반복 가능한 규칙성을 뜻한다(Papic et al., 2011). 수학에서 다루지는 패턴의 유형은 분류 기준에 따라 다양하게 분류될 수 있다. 우선 패턴의 생성 방식에 따라 반복 패턴(repeating patterns), 공간 구조 패턴(spatial structure patterns), 증가 패턴(growing patterns)으로 구분되며(Papic & Mulligan, 2007), 예시를 제시하면 [그림 1]과 같다. 반복 패턴이란 기본 단위가 일정하게 반복되는 것으로 기본 단위에 따라 AB형, ABC형, ABBC형 등 다양하게 분류된다. 그리고 공간 구조 패턴은 배열(Arrays), 격자(Grids), 삼각형 등의 형태로 일정한 규칙성을 가지고 공간을 채우는 것이다. 마지막으로 증가 패턴은 각 항의 구성 요소가 체계적으로 증가하거나 감소하는 것이다.



[그림 1] 패턴의 생성 방식에 따른 분류 예시

패턴의 유형은 관계적 속성, 기하적 속성, 물리적 속성 등 항의 유형에 따라 분류할 수 있으며(Reys et al., 2015), 예시를 제시하면 [그림 2]와 같다. 관계적 속성은 수열이나 함수 관계를 나타내는 것을 의미하며 기하적 속성은 도형의 성질이나 모양을 기초로 한다. 그리고 물리적 속성에는 색이나 크기, 방향 등이 포함된다.



[그림 2] 패턴의 속성에 따른 분류 예시

수학에서 다루지는 패턴 활동은 주로 패턴의 생성 방식과 속성을 결합한 형태인 반복 기하 패턴, 증가 수 패턴 등으로 제시된다. 이 때 패턴의 속성 중 관계적 속성은 주로 수 패턴을 통해, 기하적 속성과 물리적 속성은 주로 기하 패턴을 통해 제시된다. 또한 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서를 살펴보면 반복 패턴은 주로 초등학교 1, 2학년에서, 증가 패턴은 초등학교 4학년에서 다루어진다. 이에 본 연구에서는 우선 4학년 1학기 6단원 규칙 찾기에서 주로 다루는 패턴의 유형을 참조하여 증가 수 패턴, 증가 기하 패턴으로 구분하였다. 또한 교과서에서 관련 성취기준, 즉, ‘[4수04-02] 규칙적인 계산식의 배열에서 계산 결과의 규칙을 찾고, 계산 결과를 추측할 수 있다’를 바탕으로(교육부, 2015) 패턴 활동을 제시하였다는 측면에서 계산식 패턴을 추가하여 기본적으로 총 3가지 패턴의 유형과 관련된 지도 방안을 분석하였다.

2. 패턴 활동의 지도 방안

패턴 활동을 지도하는 방안을 다룬 선행 연구를 분석한 결과 패턴 활동의 지도 방안은 패턴의 구조를 분석하는 활동, 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동, 규칙을 찾아 표현하는 활동으로 구분할 수 있다. 각 활동에 대한 구체적인 내용은 다음과 같다.

첫째, 패턴의 구조를 분석하는 활동은 각 항의 변하는 부분과 변하지 않는 부분, 모양이나 색 등 그 구성 요소를 분해하여 면밀하게 살펴보는 것이다(방정숙, 선우진, 2016b). 구체적인 지도 방안으로는 보고 똑같이 그리기, 기억해서 그리거나 재현하기, 주어진 패턴의 구조를 다른 모형으로 만들기 등의 구체적인 조작 활동이 주를 이룬다(방정숙, 선우진, 2016b; 최지영, 방정숙, 2008, 2014; Moss & McNab, 2011; Mulligan et al., 2020; Tsamir et al., 2017; Twohill, 2018; Wijns

et al., 2021). 예를 들어, 최지영과 방정숙(2014)은 제시된 증가 기하 패턴을 체계적으로 탐구하는 것은 이후에 학생 스스로 패턴의 일반화를 이끌어내는데 도움이 된다고 하였다. Moss와 McNab(2011)의 연구에서는 학생들이 패턴을 분석할 때 그대로 유지되는 부분에 집중하도록 유도하는 발문을 통해 변하지 않는 부분을 살펴보도록 하였다. 이러한 활동을 통해 학생들은 스스로 변하지 않는 부분을 자신만의 언어로 표현할 수 있게 되었다. Twohill(2018)의 연구에서도 “항의 순서를 나타내는 숫자와 다리 길이의 관계를 찾을 수 있나요?” 등의 발문을 통해 학생들이 패턴의 구조를 분석하는 데 주목하도록 도움을 주었다. 이처럼 패턴의 구조를 분석하는 활동에서는 학생들이 직접 패턴을 만들거나 그려보는 조작 활동과 구조 분석을 돕는 교사의 적절한 발문과 개입이 중요하다.

둘째, 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동은 제시된 패턴의 가까운 다음 항 또는 먼 항에 올 패턴을 구하거나, 제시된 패턴의 중간 빈 항을 구하는 것이다(Papic et al., 2011; Pittalis et al., 2020; Wijns et al., 2021). 이 중 가까운 다음 항에 올 패턴을 구하거나 중간 빈 항을 구하는 활동은 직전 항들의 규칙을 파악하여 특정한 항을 구하는 형태로 ‘재귀적 패턴(recursive pattern)’을 활용한 것이다(Pittalis et al., 2020). 제시된 패턴의 먼 항을 구하는 활동은 패턴 일부의 공통성을 파악한 후 이것이 다른 항에도 적용된다는 사실을 인지하고 이 공통성을 어떤 항을 구하더라도 적용할 수 있어야 가능하다(Radford, 2010). 이는 패턴의 일반화를 하는데 기초가 되는 활동으로 재귀적 패턴을 활용하여 단순히 다음에 올 항을 구하는 활동보다 규칙을 일반화할 수 있는 기회를 제공하여 자연스럽게 대수적 사고를 신장시킬 수 있게 하는 것이다(권성룡, 2007). 특정한 항을 구하는 활동을 할 때 항의 순서를 나타내는 수와 이에 해당하는 항을 지속적으로 연결하여 생각하고 표현하도록 하면 자연스럽게 두 양 사이의 관계를 연결하여 사고하는 능력을 함양시킬 수 있다(권성룡, 2007; Ferrara & Sinclair, 2016; Moss & McNab, 2011). 다시 말해 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동에서는 가까운 항, 중간 빈 항, 먼 항을 구하는 활동을 적절히 제시하고 배열의 순서를 나타내는 수와 해당 순서의 패턴을 연결하여 사고하도록 지도하는 것이 중요하다.

셋째, 규칙을 찾아 표현하는 활동은 패턴의 규칙을 자신의 언어, 제스처, 그림, 식 등으로 나타내는 것이다. 이는 패턴을 일반화하는 활동인데 Radford(2006, 2010)는 규칙을 제시할 수는 없지만 이어지는 항을 차례로 구하여 패턴을 확장해나갈 수 있는 것을 산술적(arithmetic) 일반화라고 하였고, 패턴의 공통성을 알아차리고 모든 수열의 항에 대한 공통성을 일반화하여 언어, 제스처, 그림, 식 등으로 표현하는 것을 대수적 일반화라고 구분하였다. 주어진 패턴의 규칙을 찾아 표현하는 활동에서 더 나아가 자신만의 규칙을 만들어 표현하는 활동으로 확장할 수 있다(Moss & McNab, 2011).

이상의 내용과 같이 패턴 활동을 지도하는 방안과 관련된 선행 연구를 분석하고 정리하여 세 가지 주요 활동을 도출하였다. 본 연구에서는 이를 활용하여 2015 개정 4학년 1학기 검정 교과서의 6단원 ‘규칙 찾기’에 제시된 패턴 활동의 지도 방안을 분석하고자 한다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 분석 대상

본 연구의 목적은 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 4학년 1학기 검정 교과서(이후 4학년 검정 교과서라 칭함)의 규칙 찾기 단원에 제시된 패턴 지도 방안을 분석하여 학생들의 대수적 사고를 신장하기 위한 시사점을 도출하는 데 있으므로, 기본적인 분석 대상은 10종의 검정 교과서이다. 다만 교과서에 제시되지 않은 패턴 활동이 수학 익힘에서 제시된 경우도 있고, 교과서나 수학 익힘의 패턴 활동이나 문항에 대한 의도나 설명이 지도서에 제시되기도 하므로 수학 익힘과 지도서까지 추가적인 분석 대상으로 하였다. 4학년 검정 교과서는 금성출판 1종, 대교출판 1종, 두산동아 2종, 미래엔 1종, 비상교육 1종, 아이스크림 1종, 천재교육 2종, YBM 1종으로 총 10종이고, 분석 대상이 된 교과용 도서는 교과서, 수학 익힘, 지도서이기 때문에 결과적으로 총 30권¹⁾이 분석 대상이었다.

2. 분석 기준 및 분석 방법

본 연구에서는 4학년 검정 교과서에 제시된 패턴 지도 방안을 분석하기 위해 국내외 선행 연구를 분석하여 도출한 세 가지 주요 활동(즉, 패턴의 구조를 분석하는 활동, 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동, 규칙을 찾아 표현하는 활동)을 분석 기준으로 설정하였다. [표 1]은 패턴을 지도하는 세 가지 주요 활동과 각 활동에 해당하는 활동 예시 및 주요 선행 연구를 정리한 것이다. 이는 4학년 검정 교과서에 제시된 패턴 지도를 분석하기 위한 기준이기 때문에, 예를 들어, 패턴에서 두 변수 사이의 관계를 탐색하는 활동 등과 같이 초등학교에서의 패턴 지도 전반을 다루는 활동은 아님에 유의할 필요가 있다. 구체적인 분석 절차는 다음과 같다. 먼저 4학년 규칙 찾기 단원의 교과서, 수학 익힘, 지도서를 확인하였다. 그 결과 교과서의 도입 차시는 출판사에 따라 이전 학년에 배운 내용을 복습하거나 본 차시에 나오는 내용을 간단히 도입하는 등 성격이 달라 분석 대상에서 제외하고 교과서에서는 본 차시, 단원 평가 차시, 특화 차시²⁾만을 분석 대상으로 하였다. 그리고 지도서의 경우 교과서와 수학 익힘에 제시된 활동 및 문항의 의도를 파악하기 위한 자료로 활용하였다. 다음으로 4학년 교과서에 활용된 패턴의 유형을 분석하였다. 모든 검정 교과서에 활용된 증가수 패턴, 증가 기하 패턴, 계산식 패턴을 중심으로 지도 방안을 분석하였다. 다만, 소수의 검정 교과서에서 반복 기하 패턴, 공변하는 두 양의 관계를 다루는 패턴 등을 예외적으로 다루고 있어서 이를 ‘기타’로 구분하여 분석하였다. 또한 본 차시와 특화 차시를 분석할 때는 아이콘으로 구분된 ‘활동’을 단위로 하여 각 활동에 제시된 문항과 발문을 분석하였다. 그리고 단원 평가 차시의 경우는 각각의 문항을 단위로 분석하였다.

세 가지 주요 활동을 분석함에 있어서 각 활동별도 유형을 나눠 교과서별로 빈도를 세는 것은 본 연구에서 별반 의미가 없다고 판단하여 각 활동을 교과서에

병권 외(2022a, 2022b, 2022c), 장혜원 외(2022a, 2022b, 2022c), 한대회 외(2022a, 2022b, 2022c)이다.

1) 강원 외(2022a, 2022b, 2022c), 김성여 외(2022a, 2022b, 2022c), 류희찬 외(2022a, 2022b, 2022c), 박교식 외(2022a, 2022b, 2022c), 박만구 외(2022a, 2022b, 2022c), 박성선 외(2022a, 2022b, 2022c), 신항균 외(2022a, 2022b, 2022c), 안

2) 여기서 특화 차시는 도입 차시, 본 차시, 단원 평가 차시를 제외하고 단원 내에서 수학 교과 역량 등을 강조하기 위해 구성된 차시를 뜻한다. 출판사별로 이 차시를 지칭하는 용어가 다양하여 특화 차시로 총칭한다.

서 어떻게 제시했는지 질적으로 상세하게 분석하는 데 초점을 두었다. 이에 연구자 1인이 일차적으로 각 활동별로 구체적인 예시를 중심으로 교과서에 제시된 방법을 분류하였고, 그 다음 연구자 2인이 1차 분석 결과를 점검하면서 같은 유형으로 분류된 방법이라고 하더라도 하위로 나눠 상세하게 분석할 필요가 있는지를 논의하였다. 이를 통해 외형적으로 유사한 발문이라고 하더라도 학생들이 그 발문을 통해 무엇에 초점을 두게 하는지, 또는 특정한 항을 구하게 할 때 어느 항을 구하게 하는지에 따라 어디에 초점을 두게 하는지 등을 구체적인 교과서 예시와 함께 상세하게 분석함으로써 본 연구의 목적에 부합하고 분석의 신뢰도를 높이고자 노력하였다.

세 가지 주요 활동을 분석한 방법은 다음과 같다. 첫째, ‘패턴의 구조를 분석하는 활동’을 분석할 때는 교과서에 제시된 패턴의 전체적인 구성, 패턴의 각 항을 구성하고 있는 수나 모양에 대해 어떻게 탐구하도록 발문하였는지에 초점을 두었다. 예를 들어 증가 기하 패턴을 구성하고 있는 모형의 개수를 수나 식으로 바꾸어 증가 양상을 탐색하게 하는 활동, 주어진 계산식을 계산기로 확인해보면서 변화하는 모습을 탐색하는 활동 등이 포함된다. 둘째, ‘규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동’을 분석할 때는 특정한 항의 위치에 초점

을 두었다. 예를 들어 특정한 항의 위치가中间的 빈 항 구하기, 가까운 이어지는 항 구하기 등이 이에 포함된다. 셋째, ‘규칙을 찾아 표현하는 활동’을 분석할 때는 패턴의 유형별로 어떤 유형의 과제들로 규칙을 표현하게 하였는지에 초점을 맞추었다. 예를 들어 주어진 패턴의 규칙 찾아 말하기, 나만의 새로운 규칙을 만들어 표현하기 등이 이에 포함된다. 분석 결과를 서술할 때 교과서와 수학 익힘에 모두 제시된 내용은 ‘교과서’라고 서술하였으며 수학 익힘에만 제시되었을 경우는 ‘수학 익힘’이라고 구분하여 명시하였다.

IV. 연구 결과

1. 패턴의 구조를 분석하는 활동에 대한 분석

패턴의 구조를 분석하는 활동을 세 가지 패턴의 유형별로 살펴보면 다음과 같다. 전반적으로 증가 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동은 모든 교과서에서 다루었으나, 증가 수 패턴의 구조를 분석하는 활동은 1종의 수학 익힘에서, 계산식 패턴의 구조를 분석하는 활동은 1종의 교과서와 2종의 수학 익힘에서 다루었다. 이외에 반복 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동을 다룬 교과서도 2종 있었다. 패턴의 유형별 활동 예시는

[표 1] 패턴을 지도하는 세 가지 주요 활동

활동	활동 예시	주요 선행연구
패턴의 구조를 분석하는 활동	<ul style="list-style-type: none"> · 제시된 패턴을 똑같이 그리거나 만들기 · 패턴의 구조와 관련된 발문하기 	방정숙, 선우진(2016b) 최지영, 방정숙(2008, 2014) Moss & McNab (2011) Mulligan et al. (2020) Tsamir et al. (2017) Twohill (2018) Wijns et al. (2021)
규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동	<ul style="list-style-type: none"> · 직전 항의 규칙을 적용하여 다음 항 구하기 · 주변 항의 규칙을 적용하여 중간 빈 항 구하기 · 규칙을 찾아 먼 항 구하기 · 위치 번호 카드를 활용하여 수치적 구조와 기하의 구조 연결하기 	권성룡(2007) Ferrara & Sinclair (2016) Moss & McNab (2011) Mulligan et al. (2020) Papic et al. (2011) Pittalis et al. (2020) Radford (2010) Wijns et al. (2021)
규칙을 찾아 표현하는 활동	<ul style="list-style-type: none"> · 패턴의 규칙을 자신의 언어, 제스처, 그림, 식 등으로 표현하기 · 새로운 규칙을 만들어 표현하기 	Moss & McNab (2011) Radford(2006, 2010)

[표 2]와 같으며 세부 분석 결과는 다음과 같다.

[표 2] 패턴의 구조를 분석하는 활동 예시

패턴의 유형	활동 예시
증가 수 패턴	- 제시된 규칙에 알맞은 수의 배열을 수 배열표에서 찾아 색칠하기
증가 기하 패턴	- 모형을 이용하여 주어진 패턴 순서대로 만들기 - 패턴을 이루고 있는 모형의 개수를 세어 수나 식으로 나타내기
계산식 패턴	- 주어진 계산식의 배열을 계산기를 활용하여 확인하기 - 주어진 규칙을 표현하고 있는 계산식의 배열 찾아 표시하기
기타	- 반복 기하 패턴에서 모형의 위치 변화 분석하기 - 반복 기하 패턴을 이루고 있는 모형의 개수를 세어 수로 나타내기

가. 증가 수 패턴의 구조를 분석하는 활동

증가 수 패턴의 구조를 분석하는 활동은 1종의 수학 익힘에서만 주어진 규칙에 알맞은 수의 배열을 찾아 수 배열표에 색칠하도록 제시되었다([그림 3] 참고). 증가 수 패턴의 구조를 분석하는 활동이 거의 이뤄지지 않는 이유는 2학년 2학기 규칙 찾기 단원에서 덧셈표와 곱셈표를 활용하여 증가 수 패턴을 분석하는 학습을 했기 때문인 것으로 파악된다.

1	2	4	8	16
3	6	③	24	48
5	10	20	40	⑤
7	14	28	56	112
9	⑨	36	72	144

5 ③, ⑤, ⑨에 알맞은 수를 각각 구해 보세요.

6 세로(↓)로 16씩 커지는 수의 배열을 모두 찾아 색칠해 보세요.

한대희 외(2022b, p.89)

[그림 3] 증가 수 패턴의 구조를 분석하는 활동

나. 증가 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동

10종의 모든 교과서가 증가 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동을 다루었는데, 주로 제시된 증가 기하 패턴을 구성하고 있는 모형을 여러 가지 방법으로 탐색

하면서 패턴의 구조를 분석하는 데 초점을 두었다. 이때 증가 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동은 크게 두 가지 유형으로 나뉘었다.

첫 번째 유형은 주어진 증가 기하 패턴을 똑같이 만들어보게 하는 활동이다. 이는 4종의 교과서에서 다루었는데, 예를 들어, [그림 4]와 같이 위치 번호 카드의 역할을 하는 순서가 제시되고 그에 따라 차례대로 조작 활동을 하도록 구성되었다. 학생들은 직전 항의 모형에 증가한 만큼의 모형을 추가하여 다음 패턴을 만들면서 패턴의 구조를 탐색할 수 있다.



• 김 모형을 사용하여 위 모양을 차례대로 만들어 보세요.

김성여 외(2022a, p.140)

[그림 4] 증가 기하 패턴을 똑같이 만드는 활동의 예시

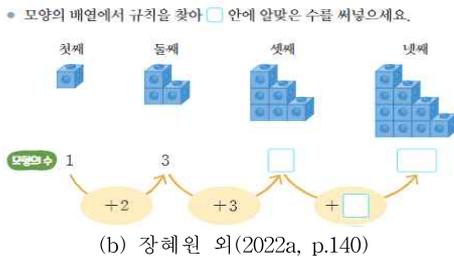
두 번째 유형은 증가 기하 패턴을 이루고 있는 모형의 개수를 표현하는 활동인데, 어떻게 표현하게 하느냐에 따라 다시 두 가지 방법으로 세분할 수 있었다. 첫째 방법은 각 순서에 제시된 모형의 개수를 세어 수로 표현하는 것이다. 예를 들어 [그림 5]의 (a)를 보면, 제시된 기하 패턴을 보고 각 항을 구성하는 모형의 개수를 세어 수 패턴으로 표현하게 하였다. 이 방법에서 [그림 5]의 (b)처럼 패턴의 순서에 따른 모형의 개수를 수로 표현하게 할 뿐만 아니라 규칙적으로 증가하는 양까지 주목하게 하기도 하였다. 이렇게 수 사이의 증가량을 함께 보도록 제시하면 학생들은 각 순서에 해당하는 모형의 개수가 커지는 것뿐만 아니라 규칙적으로 증가하고 있는 양 또한 수의 크기로 시각화할 수 있을 것으로 예상된다(장혜원 외, 2022c).

둘째 방법은 증가 기하 패턴을 이루고 있는 모형의 개수를 식으로 나타내게 하는 것이다. 이 중 덧셈식으로 나타내는 방법은 특정한 항에 해당하는 모형의 개수를 증가 양상이 나타나도록 앞선 순서의 항에 해당하는 모형의 개수와 구하는 항에서 증가한 모형의 개수의 합을 나타내는 수식을 쓰도록 제시하였다. 이 활

동은 [그림 6]의 (a)와 같이 첫 번째 순서를 기준으로 더하기를 사용하여 각 순서에서 증가하는 양을 차례로 나열하여 배열 순서가 뒤로 갈수록 덧셈식의 길이가 늘어나도록 쓰게 하는 것과 [그림 6]의 (b)와 같이 직전 순서의 모형의 개수에 증가한 모형의 개수를 합하여 쓰게 하는 것이 있었다. 또한 [그림 6]의 (b)와 같은 활동은 식과 결과값인 수를 함께 쓰게 하여 기하 패턴을 수 패턴과 계산식 패턴의 두 가지 형태로 바꿔 보게 함으로써 증가하고 있는 과정과 결과를 동시에 볼 수 있어 패턴의 구조를 분석하는 데 도움이 될 것으로 예상된다. 그리고 [그림 6]의 (c)와 같이 덧셈식 뿐만 아니라 곱셈구구를 활용하여 표현할 수 있는 패턴의 경우에는 각 순서에 해당하는 모형의 개수를 규칙적인 곱셈식으로 나타내게 함으로써 학생들이 다양한 방법으로 패턴의 규칙을 파악할 수 있게 하였다. 이처럼 기하 패턴을 계산식으로 바꾸어 패턴이 증가하는 과정을 차례대로 탐색할 경우 기하 패턴이 어떻게 증가하고 있는지 분석하기 용이할 것으로 예상된다(강완 외, 2022c).



(a) 박교식 외(2022a, p.135)



(b) 장혜원 외(2022a, p.140)

[그림 5] 증가 기하 패턴에서 모형의 개수를 수로 나타내는 활동의 예시

• 나무 막대의 배열에서 규칙을 찾아 식으로 나타내어 보세요.

순서	첫째	둘째	셋째	넷째	다섯째
의수	1	1+3	1+3+3		

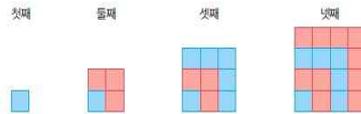
(a) 안병곤 외(2022a, p.140)

• 사각형 모양을 만드는 데 필요한 쌓기나무의 수를 식으로 나타내어 구해 보세요.

순서	식	쌓기나무의 수(개)
첫째	1	1
둘째	1+3=4	4
셋째		
넷째		

(b) 강완 외(2022a, p.146)

모형의 배열에서 규칙을 찾아봅시다.



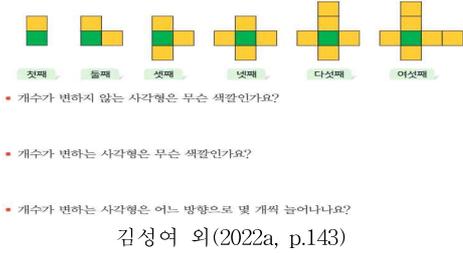
• 작은 정사각형 조각의 수를 세어 보고, 규칙을 찾아보세요.

첫째	둘째	셋째	넷째
1	1+3	4+5	
1×1	2×2		

(c) 박만구 외(2022a, p.131)

[그림 6] 증가 기하 패턴에서 모형의 개수를 식으로 나타내는 활동의 예시

이렇듯 패턴의 구조를 분석하는 활동은 패턴을 이루는 모형의 개수에 초점을 맞추어 다루는 경향이 두드러졌다. 다만 김성여 외(2022a)에서는 패턴의 구조를 분석하는 데 도움이 되는 발문을 제시하였다. 구체적으로 [그림 7]에 제시된 배열을 살펴보면, 사각형의 수가 증가한다는 것과 사각형의 방향이 회전한다는 두 가지의 변인을 가지고 있어서 학생들에게 어려울 수 있다. 이때 ‘개수가 변하지 않는 사각형’, ‘개수가 변하는 사각형’, ‘개수가 변하는 방향’에 초점을 둔 구체적인 발문을 제시함으로써 학생들이 패턴이 증가하는 방향과 개수를 함께 탐색할 수 있게 하였다.



[그림 7] 증가 기하 패턴의 구조를 분석하기 위한 발문의 예시

다. 계산식 패턴의 구조를 분석하는 활동

계산식 패턴의 구조를 분석하는 활동은 1종의 교과서와 2종의 수학 익힘에서 다루졌는데, 교과서의 경우에는 [그림 8]의 (a)와 같이 주어진 계산식의 배열을 계산기를 사용하여 계산 결과를 확인해보면서 패턴의 구조를 파악하게 하였다. 이는 제시된 계산식을 계산기에 입력하여 답을 확인한다는 측면에서 증가 기하 패턴에서 제시된 패턴을 똑같이 만들어보는 유형과 유사하다고 볼 수 있다. 수학 익힘의 경우에는 [그림 8]의 (b)와 같이 계산식의 배열에 알맞은 설명을 연결하는 문제가 제시되었다. 이는 학생들이 직접 패턴의 구조를 파악하기보다는 구체적으로 주어진 계산식 패턴의 구조에 대한 설명이 옳은지 판단하는 형태였다.

첫째	$1 \times 1 = 1$
둘째	$11 \times 11 = 121$
셋째	$111 \times 111 = 12321$
넷째	$1111 \times 1111 = 1234321$
다섯째	$11111 \times 11111 = \square$
여섯째	\square

① 계산기를 사용하여 넷째까지 계산 결과를 확인해 보세요.
(a) 박성선 외(2022a, p.148)

1 계산식의 배열에 맞는 설명을 한 친구의 이름을 써 보세요.

$30 \times 10 = 300$ $30 \times 20 = 600$ $30 \times 30 = 900$ $30 \times 40 = 1200$ \square	$162 \times 9 = 1458$ $54 \times 27 = 1458$ $18 \times 81 = 1458$ $6 \times 243 = 1458$ \square	$130 \div 10 = 13$ $260 \div 20 = 13$ $390 \div 30 = 13$ $520 \div 40 = 13$ \square
--	---	---

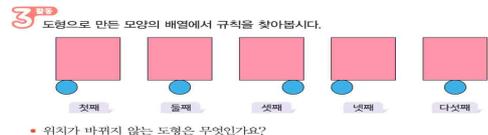
지호: 3으로 나누어 떨어지는 수로 3을 곱하여 커지는 수를 곱했더니 같이 같아요.
 유준: 2배, 3배, 4배씩 커지는 두 수와 1 나누면 커지는 수가 같아요.
 예나: 30이 10씩 커지는 수를 곱했더니 같이 30씩 커져요.

(b) 박교식 외(2022b, p.80)

[그림 8] 계산식 패턴의 구조를 분석하는 활동의 예시

라. 기타 패턴의 구조를 분석하는 활동

2종의 교과서는 반복 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동도 제시하였다. 구체적으로, [그림 9]의 (a)의 경우 ‘위치가 바뀌지 않는 도형’, ‘위치가 바뀌는 도형’, ‘위치가 바뀌는 방향’을 묻는 발문을 제시하여 학생들이 주어진 패턴의 구조를 쉽게 분석하도록 돕고 있음을 알 수 있다. 한편, [그림 9]의 (b)와 같이 2학년 2학기 규칙 찾기에서 다루지는 형태의 활동을 제시하기도 하였는데, 거의 모든 교과서에서는 이와 같은 활동을 준비차시에서 다뤘다.



원을 놓은 규칙을 찾아 수로 나타내어 봅시다.

첫째	둘째	셋째	넷째	다섯째	여섯째	일곱째
1	2	4	1	2	4	\square

• 원을 놓은 규칙을 찾아 설명해 보세요.
 • 찾은 규칙을 수로 나타내어 보세요.
 (b) 신항균 외(2022a, p.133)

[그림 9] 반복 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동

2. 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동에 대한 분석

규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동을 세 가지 패턴의 유형별로 살펴보면 다음과 같다. 증가 수 패턴은 9종의 교과서에서 비중 있게 다루었고, 증가 기하 패턴과 계산식 패턴은 10종의 교과서에서 모두 다루었다. 이 외에도 반복 기하 패턴과 관련된 활동, 공변하는 두 양의 관계를 활용하여 해결하는 활동, 문제 상황을 글과 그림으로 제시한 활동 등이 있었다. 패턴의 유형별 활동 예시는 [표 3]과 같으며 세부 분석 결과는 다음과 같다.

[표 3] 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동 예시

패턴의 유형	활동 예시
증가 수 패턴	- 빈칸에 알맞은 수 채워 넣기
증가 기하 패턴	- 특정한 항에 알맞은 패턴 구하기 - 특정한 항에 알맞은 패턴을 만드는 데 필요한 모형의 개수 구하기
계산식 패턴	- 특정한 항에 알맞은 계산식 구하기
기타	- 반복 기하 패턴의 특정한 항 그리기 - 글과 그림으로 제시된 규칙이 포함된 문제 상황의 특정한 항 구하기 - 공변하는 두 양의 관계 파악을 통해 특정한 항 그리기

가. 증가 수 패턴의 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동

증가 수 패턴에서 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동은 빈칸에 알맞은 수를 채워 넣는 활동으로 제시되었는데 이는 다시 네 가지 유형으로 구분할 수 있었다. 첫 번째 유형은 완성된 수 배열표의 빈칸을 채우는 것이다([그림 10]의 (a) 참고). 이 유형에서는 빈칸을 둘러싼 형태로 수들이 배치되어 있어 가로, 세로 방향의 규칙을 파악하고 이를 바탕으로 직전 항을 활용하여 특정한 항에 들어갈 수를 구할 수 있다.

두 번째 유형은 미완성된 수 배열표에서 표시된 빈칸을 채우는 것이다([그림 10]의 (b) 참고). 이는 첫 번째 유형과는 달리 구해야 하는 빈칸 주위에 모든 수가 제시되어 있는 것이 아니기 때문에 직전 항을 활용할 수 없어 수의 규칙을 파악하여 빈칸의 수를 찾아야 하는 형태이다. 예를 들어 [그림 10]의 (b)의 경우 구해야 하는 항의 주변 항을 먼저 구하거나 전체적인 패턴의 구조를 파악한 후 이를 적용해야 한다.

세 번째 유형은 가로로 제시된 수 배열의 빈칸을 채우는 것이다([그림 10]의 (c) 참고). 이 유형은 첫 번째, 두 번째 유형과 달리 오른쪽으로 진행되는 수 배열의 규칙을 파악하면 된다. 이 유형을 다루고 있는 6종 교과서 중 5종의 교과서에서는 가로, 세로의 규칙을 모두 파악해야 하는 수 배열표의 특정한 항을 구하는 문제를 먼저 제시하고 그 다음에 가로 방향 수 배열의 빈칸을 구하는 문제를 제시하였다. 세 번째 유형이 제시된 수의 바로 다음 항에 알맞은 수를 구하는

형태였다면 2종의 교과서에서는 특화 차시에서 주어진 수 배열의 다다음 항을 구하는 유형도 제시하였다.

네 번째 유형은 제시된 수를 수 배열표의 알맞은 빈칸에 배치하는 것이다([그림 10]의 (d) 참고). 학생들은 문항에 주어진 수 배열표의 규칙과 제시된 수를 비교하며 특정한 항을 구할 수 있다. 이 활동은 모두 특정한 항을 직접 구하는 활동 다음에 제시되어 있었다.

수 배열표를 보고 다음에 대해 보세요.

1	3	9	27	81
2	6	18	54	162
3	9	27	81	
4	12	36	108	324
5	15		135	405

* 가로(-)에서 규칙을 찾아보세요.

* 빈칸에 알맞은 수를 써넣으세요.

(a) 한대희 외(2022a, p.133)

수 배열표에서 규칙을 찾아봅시다.

13900	14600	15300	16000	16700
15900	16600	17300	18000	
17900	18600	19300		
19900	20600			
21900				

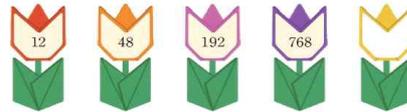
* 수 배열표에서 규칙을 찾아보세요.

* 찾은 규칙을 친구들과 이야기해 보세요.

*  에 알맞은 수를 구해 보세요.

(b) 강완 외(2022a, p.141)

5 수의 배열에서 규칙을 찾아봅시다.



* 규칙을 찾아 이야기해 보세요.

* 빈칸에 알맞은 수를 써넣으세요.

(c) 박교식 외(2022a, p.130)

다예와 민준이가 갖고 있는 기차표의 좌석 번호를 보고 좌석 배치도에서 알맞은 좌석을 찾아봅시다.



* 좌석 배치도에서 다예와 민준이의 좌석을 찾아 ○표하세요.

(d) 박성선 외(2022a, p.139)

[그림 10] 증가 수 패턴의 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동 예시

표 형태 또는 가로 방향의 수 배열이 아닌 다른 형태의 수 배열의 특정한 항을 구하는 유형도 2종의 교과서에서 다루졌다. 1종의 교과서에서는 나선형, 별집형, 삼각형, 계단형 등 다양한 수 배열 형태가 제시되어 있었는데 이는 사각형의 표 형태와는 달리 상하좌우뿐만 아니라 다양한 방향에서 수의 관계를 파악하여 빈칸을 구하는 유형으로 간주할 수 있다([그림 11]의 (a),(b) 참고). 다른 1종의 교과서에도 계단형 수 배열의 빈칸을 구하는 유형이 제시되었다([그림 11]의 (c) 참고).

2 나선 모양에 있는 수의 배열에서 규칙을 찾아봅시다.

- 방향에서 규칙을 찾아보세요.
- 세로(↓)에서 규칙을 찾아보세요.
- 안에 알맞은 수를 써넣으세요.

(a) 한대희 외(2022a, p.135)

1 삼각형 모양에 있는 수의 배열을 보고 물음에 대해 보세요.

첫째

둘째

셋째

넷째

- 삼각형 모양에 있는 수의 배열에서 규칙을 찾아보세요.
- 안에 알맞은 수를 써넣으세요.

(b) 한대희 외(2022a, p.135)

수의 배열에서 규칙을 찾아봅시다.

1		3		
2		5		
4		6		
7		8	9	10
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	13	14	15

- ① 수를 어떻게 배열했는지 규칙을 찾아 이야기해 보세요.
- ② 다섯째 줄 에 알맞은 수를 구해 보세요.

(c) 박성선 외(2022a, p.139)

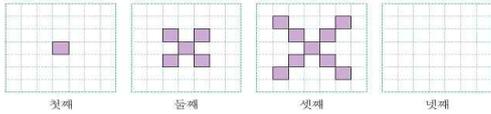
[그림 11] 다양한 형태의 수 배열에서 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동의 예시

나. 증가 기하 패턴의 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동
 증가 기하 패턴에서 규칙을 찾아 특정한 항을 구하

는 활동은 크게 두 가지 유형으로 구분할 수 있었다. 첫 번째 유형은 규칙을 파악하여 특정한 항의 패턴을 구하는 활동이다. 이는 9종의 교과서에서 제시되었는데 모두 묻는 순서에 해당하는 패턴을 그려보는 유형이었다([그림 12]의 (a) 참고). 9종의 교과서 모두 주어진 증가 기하 패턴에서 이어지는 다음 항을 구하는 활동이 제시되었고, 2종의 교과서와 1종의 수학 익힘에는 중간 빈 항에 알맞은 모양을 구하는 활동이 제시되었다([그림 12]의 (b) 참고). 8종의 교과서에는 패턴을 그려보는 활동만 있었는데 1종의 교과서와 1종의 수학 익힘에는 직접 그려보는 유형보다 앞서 묻는 순서에 알맞은 패턴을 보기에서 고르는 유형도 제시되었다. 또 다른 1종의 교과서는 주어진 순서에 해당하는 패턴을 직접 만들어보도록 제시하였다. 특정한 항에 해당하는 패턴을 구하는 활동의 변형으로 1종의 교과서의 특화 차시에서는 패턴의 모양을 제시된 수 배열표와 비교하여 증가한 부분의 모형에 해당하는 수를 표에서 찾아 비밀번호를 맞추는 활동이 제시되었다.

두 번째 유형은 특정한 항에 알맞은 패턴을 만드는 데 필요한 모형의 개수를 구하는 활동이다. 이 활동은 10종의 교과서에서 모두 제시되었는데 묻는 순서에 해당하는 패턴을 구성하는데 필요한 모형의 개수를 구하는 유형과 [그림 12]의 (c)와 같이 두 종류의 모형으로 이루어진 패턴이 제시되고 묻는 순서에 해당하는 패턴에서 각각의 종류별 모형의 개수를 구하는 유형이 있었다. 여기서 후자의 경우는 종류별 모형의 개수를 각각 구하는 대신에 모형의 개수 간의 차를 묻는 경우도 있었다. 또한 특정한 항에 필요한 모형의 개수를 식을 써서 구하는 유형도 있었다. 이는 식을 활용하여 증가 기하 패턴의 구조를 분석하였던 문항들과 연계된 것으로 패턴이 증가하는 과정을 수식으로 시각화하여 특정한 항에 해당하는 모형의 개수를 구하는 것이다. 지금까지 제시된 두 번째 유형은 모두 특정한 항에 대응되는 모형의 개수가 얼마인지 구하는 활동이었던 반면에, 역으로 모형의 개수를 문제에서 먼저 제시하고 이것이 몇 번째 항에 해당하는지 구하게 하는 경우도 있었다. 구체적으로, [그림 12]의 (d)를 보면 구하려는 것과 알고 있는 것을 물어봄으로써 학생들에게 모형의 개수를 구하는 것이 아니라 몇째인지를 찾아야 한다는 점을 상기시키고 있다.

도형의 배열에서 규칙을 찾아봅시다.



- 도형의 배열에서 규칙을 찾아 친구들과 이야기해 보세요.
- 넷째에 알맞은 도형을 그려 보세요.

(a) 안병곤 외(2022a, p.136)

순서	첫째	둘째	셋째	넷째
모형의 수	11	14	17	20

•둘째와 넷째에 알맞은 모양을 그려 보세요.

(b) 한대회 외(2022b, p.93)

도형의 배열에서 규칙을 찾아, 다섯째에 알맞은 흰색 바둑돌과 검은색 바둑돌은 각각 몇 개인지 구해 보세요.

(c) 류희찬 외(2022b, p.84)

새가 날아가는 모습을 다음과 같이 나타내었습니다. 새 17마리가 만드는 대형은 몇째인지 구해 보세요.

(d) 안병곤 외(2022a, p.148)

[그림 12] 증가 기하 패턴의 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동의 예시

특정한 항의 패턴을 만드는데 필요한 모형의 개수를 구하는 활동은 특정한 항에 알맞은 패턴을 구하는 활동과 함께 제시되는데 9종의 교과서 중 8종에서 해당하는 항에 알맞은 패턴을 구하는 활동이 먼저 나온다. 반면 1종의 교과서는 모형의 개수를 식으로 나타내고 그림으로 그려서 확인해보는 순서로 제시되었다.

다. 계산식 패턴의 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동

계산식 패턴에서 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동 중 제시된 배열 안의 특정한 항에 해당하는 식

전체를 쓰는 활동은 모든 교과서에 있었고 2종의 교과서에는 해당하는 식 중 일부만 쓰도록 제시된 문항도 있었다. 이 유형의 활동은 다양하게 변형되어 제시되었다. 우선 [그림 13]의 (a)와 같이 특정 항의 계산 결과를 제시하고 그에 해당하는 계산식을 쓰는 유형이 있었다. 이 유형에서는 대개 문제에서 제시된 배열 순서와 인접한 항의 계산 결과를 제시함으로써 학생들이 이어서 계산식과 계산 결과를 구하면 쉽게 해결할 수 있는 형태였다. 또 다른 변형으로는 [그림 13]의 (b)와 같이 계산 결과를 제시하고 이에 해당하는 식의 순서를 구하는 것이 있었다. 이와 같은 유형들은 공통적으로 계산식의 결과값이 계속 변화하는 형태였던 반면에, [그림 13]의 (c)와 같이 계산 결과가 동일한 계산식 패턴에서 규칙을 찾아보게 하고 그 규칙에 부합하는 계산식을 여러 개 만들어보는 유형도 3종의 교과서에 제시되었다.

다른 이는 규칙이 있는 덧셈식을 만들고 있습니다. 같은 규칙으로 계산 결과가 49가 되는 덧셈식을 만들어 보세요.

$$1+2+1=4$$

$$1+2+3+2+1=9$$

$$1+2+3+4+3+2+1=16$$

$$1+2+3+4+5+4+3+2+1=25$$



(a) 신항균 외(2022a, p.139)

덧셈식의 배열에서 규칙을 찾아봅시다.

첫째	$9+1=10$
둘째	$98+12=110$
셋째	$987+123=1110$
넷째	
다섯째	$98765+12345=111110$

- 규칙을 찾아보세요.
- 넷째 덧셈식을 써 보세요.
- 규칙을 이용하여 항이 11111110인 덧셈식은 몇째인지 찾아보세요.

(b) 박교식 외(2022a, p.137)

덧셈식과 뺄셈식에서 규칙을 찾아 상자를 열어 봅시다.

$1+6=7$	$12-6=6$
$2+5=7$	$11-5=6$
$3+4=7$	$10-4=6$

- 덧셈식과 뺄셈식의 규칙을 찾아 말해 보세요.
- 식에서 찾은 규칙에 따라 빈칸에 알맞은 식을 써 보세요.

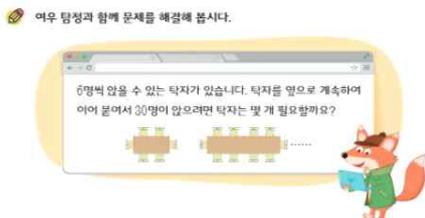
(c) 박만구 외(2022a, p.132)

[그림 13] 계산식 패턴의 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동의 예시

라. 기타 패턴의 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동

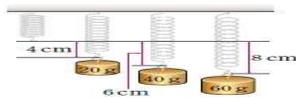
1종의 교과서에는 반복 기하 패턴의 특정한 항을

그려보는 활동이 제시되었다. 위치가 바뀌는 도형, 위치가 바뀌지 않는 도형을 묻는 발문을 통해 반복 기하 패턴의 구조를 분석한 후 다음 항을 그려보는 활동이 제시되어 구조 분석을 통해 파악한 규칙을 바탕으로 특정한 항을 그릴 수 있게 유도하였다. 다른 1종의 교과서에서는 [그림 14]의 (a)와 같이 문제 상황을 글과 그림으로 설명하였으며 문제는 선형관계($y=2x+2$)를 나타내는 활동을 제시하였다. 이는 특화 차시에 제시한 문제로 Polya의 문제 해결 4단계 발문을 통해 그림을 그려 규칙을 찾아 해결하도록 구성되었다. 그림을 그려 각 순서에 타자가 하나씩 늘어날 때 앉을 수 있는 사람 수가 어떻게 변화하는지에 대한 규칙을 파악하고 30명이 앉을 때 필요한 타자 수를 구하도록 제시하고 있다. 이는 타자의 개수가 증가함에 따라 앉을 수 있는 사람의 수도 일정하게 증가하는 규칙을 활용하여 특정한 항을 구하는 활동이다. 또 다른 1종의 수학 익힘에서는 [그림 14]의 (b)와 같이 공변하는 두 양의 관계를 파악하여 이어지는 특정한 항을 구하는 활동이 제시되었다. 구체적으로 추의 무게가 증가할수록 일정하게 늘어나는 용수철 길이의 관계를 탐구하여 특정 무게의 추를 달았을 때 용수철의 늘어난 길이를 구하는 것으로 추의 무게 변화와 용수철의 길이 변화를 함께 생각하게 하는 활동이다.



(a) 박성선 외(2022a, p.156)

[11~12] 추의 무게에 따라 늘어난 용수철의 길이를 측정하였습니다. 표문에 답해 보세요.



11 추의 무게와 늘어난 용수철의 길이에서 규칙을 찾아보세요.

12 80g의 추를 달았을 때 용수철의 늘어난 길이를 구해 보세요.

(b) 한대희 외(2022b, p.101)

[그림 14] 기타 패턴의 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동의 예시

3. 규칙을 찾아 표현하는 활동에 대한 분석

규칙을 찾아 표현하는 활동을 세 가지 패턴의 유형별로 살펴보면 다음과 같다. 증가 수 패턴은 9종의 교과서에서 다뤄졌으며 증가 기하 패턴과 계산식 패턴은 10종의 교과서에 제시되었다. 이 외에도 반복 기하 패턴과 관련한 활동, 공변하는 두 양 사이의 규칙적인 관계를 표현하는 활동, 실생활에서 다양한 규칙을 찾아보는 활동이 있었다. 패턴의 유형별 활동 예시는 [표 4]와 같으며 세부 분석 결과는 다음과 같다.

[표 4] 규칙을 찾아 표현하는 활동 예시

패턴의 유형	활동 예시
증가 수 패턴	- 수 배열 또는 수 배열표에서 규칙을 찾아 표현하기 - 새로운 규칙을 만들어 표현하기
증가 기하 패턴	- 모양의 배열에서 규칙을 찾아 표현하기 - 새로운 규칙을 만들어 표현하기
계산식 패턴	- 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈식의 배열에서 규칙을 찾아 표현하기 - 수 배열표에서 계산식으로 나타낼 수 있는 규칙을 찾아 표현하기 - 규칙을 통해 계산식의 배열 만들고 표현하기
기타	- 반복 기하 패턴의 규칙을 찾아 표현하기 - 생활 속에서 찾을 수 있는 다양한 규칙을 표현하기 - 공변하는 두 양 사이의 관계에서 규칙을 찾아 표현하기

가. 증가 수 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동

증가 수 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동은 크게 두 가지 유형으로 구분되었다. 첫 번째 유형은 수 배열 또는 수 배열표에서 규칙을 찾아 표현하는 것이다. 9종의 교과서 모두 첫 활동으로 [그림 15]의 (a)와 같이 수 배열표를 제시하고 특정 방향을 한정하여 규칙을 찾아보게 하였다. 예를 들어, 가로, 세로 등의 방향을 제시하여 규칙을 찾아 표현하게 한 후에는 동일한 수 배열표에서 또 다른 규칙을 찾아 표현하게 하였다. 이러한 활동 다음에는 [그림 15]의 (b)와 같이 방향을 제한하지 않고 학생들 스스로 수 배열표에서 다양한 규칙을 찾아 표현할 수 있게 하였다.

두 번째 유형은 새로운 규칙을 만들고 표현해 보는 것이다. 이는 4종의 교과서에 제시된 것으로 예를 들어 [그림 15]의 (c)와 같이 우선 학생들은 규칙을 스스로 정하여 새로운 수 배열표를 만들게 된다. 학생들은 이 활동 전에 교과서에 제시된 수 배열표에서 다양한 규칙을 찾고 표현하는 활동을 하기 때문에 이를 참고하여 스스로 만든 규칙에 따라 수를 배열하고 그 규칙을 표현할 수 있을 것으로 기대된다. 또한 친구가 만든 수 배열표에서 규칙을 찾아 이야기하게 함으로써 다양한 유형의 규칙을 접하고 표현할 수 있는 기회를 가질 수 있다.



(a) 강완 외(2022a, p.140)

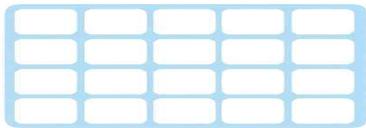
2 수 배열표에서 규칙을 찾아봅시다.

11001	21101	31201	41301	
12001	22101	32201	42301	52401
13001		33201	43301	53401
14001	24101	34201		54401
15001	25101	35201	45301	55401

* 규칙을 찾아보세요.

(b) 박교식 외(2022a, p.129)

* 규칙을 정하여 빈칸에 수를 배열해 보세요.



* 내가 만든 수 배열표의 규칙을 써 보세요.

* 짝이 만든 수 배열표에서 규칙을 찾아 이야기해 보세요.

(c) 박교식 외(2022a, p.131)

[그림 15] 증가 수 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동 예시

나. 증가 기하 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동
 증가 기하 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동은 크게 두 가지 유형으로 구분되었다. 첫 번째 유형은 모양의 배열에서 규칙을 찾아 표현하는 것이다([그림 16]의 (a) 참고). 이는 패턴을 구성하는 모형의 규칙적인 증가 양상을 수나 식 또는 학생들의 언어로 표현하

는 것이다. 1종의 교과서는 동일한 증가 기하 패턴을 제시하고 앞선 문항에서 규칙을 표현한 방법 이외의 다른 방법으로 규칙을 표현하게 하였다. 이와 같은 활동을 통해 학생들은 동일한 패턴의 규칙을 다양한 방법으로 표현할 수 있다는 것을 학습할 수 있다. 7종의 교과서는 증가 기하 패턴의 구조를 분석하는 활동 다음에 규칙을 표현하는 활동을 배치하였다. 예를 들어 패턴을 직접 만들어보는 조작 활동을 통해 패턴의 구조를 분석하여 규칙을 찾는 다음 바로 그 규칙을 말로 표현하도록 유도한 것이다(한대희 외, 2022c).

두 번째 유형은 새로운 규칙을 정하여 표현하는 것이다([그림 16]의 (b) 참고). 이는 3종의 교과서에 제시되어 있었는데, 이미 정해져 있는 패턴의 규칙을 찾아보는 것에서 더 나아가 나만의 규칙을 만들어 모양을 직접 만들어보거나 새로운 증가 기하 패턴을 수나 식, 또는 자신의 언어로 표현하게 하는 활동이다. 이 중 1종의 교과서는 만든 규칙을 짝과 바꾸어 상대방이 만든 규칙을 자신의 언어로 표현해 보는 활동도 제시되었다.



* 바둑돌로 만든 모양의 배열에서 규칙을 찾아 보세요.

(a) 장혜원 외(2022a, p.139)

흰 바둑돌은 ○으로, 검은 바둑돌은 ●으로 그려 나만의 규칙을 만들어 보세요. (바둑돌은 한 가지 색만 사용해도 되고, 두 가지 색 모두 사용해도 됩니다.)

(1) 나만의 규칙을 정하여 다섯째까지 그림으로 나타내어 보세요.



(b) 강완 외(2022a, p.156)

[그림 16] 증가 기하 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동 예시

다. 계산식 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동
 계산식 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동은 크게 세 가지 유형으로 구분되었다. 첫 번째 유형은 덧

셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈식의 배열에서 규칙을 찾아 학생들의 언어로 표현하는 것으로 모든 교과서에 제시되었다([그림 17]의 (a) 참고). 사칙 연산의 배열에서 규칙을 찾는 활동은 계산되는 두 수 또는 계산되는 수와 그 곱셈 사이의 관계를 탐색해야 해결 가능한 활동이다. 예를 들어 계산 결과가 같은 덧셈식이나 뺄셈식에서 계산되는 두 수의 규칙을 표현하는 유형의 문제를 해결하기 위해 학생들은 더해지는 수와 더하는 수의 관계, 또는 빼지는 수와 빼는 수의 관계를 생각해야 한다. 또한 [그림 17]의 (b)와 같이 나뉘는 수의 변화에 따라 몫이 규칙적으로 변하는 계산식의 경우 나뉘는 수와 몫의 관계를 탐색해야 한다.

첫째	$101 + 10 = 111$
둘째	$202 + 20 = 222$
셋째	$303 + 30 = 333$
넷째	$404 + 40 = 444$
다섯째	$505 + 50 =$ <input type="text"/>
여섯째	<input type="text"/>

① 덧셈식의 배열에서 규칙을 찾아 이야기해 보세요.

(a) 박성선 외(2022a, p.146)

2 나눗셈식에서 규칙을 찾아봅시다. <그림 17>

순서	나눗셈식
첫째	$363 \div 3 = 121$
둘째	$3663 \div 3 = 1221$
셋째	$36663 \div 3 = 12221$
넷째	$366663 \div 3 = 122221$
다섯째	<input type="text"/>

- 나눗셈식에서 규칙을 찾아보세요.
- 다섯째 빈칸에 알맞은 나눗셈식을 써넣으세요.



(b) 김성여 외(2022a, p.147)

* 색칠된 수의 배열에서 규칙이 있는 계산식을 만들어 보세요.

$4 + 18 = 22 \times 2$,
 $11 \times 2 = 22 \times 2$ 이므로
 $4 + 18 = 11 \times 2$ 이다.

$4 + 18 = 11 \times 2$	$11 - 4 = 18 - 11$
$3 + 19 = 11 \times 2$	$11 - 3 = 19 - 11$

(c) 박교식 외(2022a, p.141)

두 자리 수 중에서 하나를 정하고, 그 수가 계산 결과가 되는 여러 가지 덧셈식과 뺄셈식을 규칙적으로 써넣어 봅시다.

계산 결과가 <input type="text"/> 이 되는 덧셈식	계산 결과가 <input type="text"/> 이 되는 뺄셈식
<input type="text"/>	<input type="text"/>

(d) 박만구 외(2022a, p.133)

[그림 17] 계산식 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동 예시

두 번째 유형은 제시된 수 배열표에서 계산식으로 나타낼 수 있는 규칙을 찾아 표현하는 것이다. 이는 5

종의 교과서에 제시되어 있었는데 수 배열에서 특정 방향을 지정하여 규칙을 찾거나 [그림 17]의 (c)와 같이 수 배열의 일부분을 색칠하여 그 부분에서 규칙적인 계산식을 찾아 쓰게 하는 경우가 있었다. 또는 수 배열표만 제시하고 자유롭게 규칙적인 계산식을 찾게 하기도 하였다.

세 번째 유형은 계산 결과에 해당하는 수를 정하고 같은 계산 결과가 나오도록 여러 가지 덧셈식과 뺄셈식을 규칙적으로 만들어보는 것이다([그림 17]의 (d) 참고). 이는 학생들이 하나의 수를 곱셈값으로 정하고 그 곱셈값이 동일하게 산출되게 하기 위해 계산되는 두 수가 어떤 관계를 가져야 하는지 그 변화를 파악하는 활동이다.

라. 기타 패턴에서 규칙을 찾아 표현하는 활동

반복 기하 패턴에서 규칙을 표현하는 활동은 앞선 문항에서 반복 기하 패턴의 구조를 분석할 수 있도록 도움을 주는 발문이 제시되었고 이와 관련지어 규칙을 표현하게 되어 있었다. 또한 생활 속에서 찾을 수 있는 다양한 규칙을 표현하는 활동도 있었는데 이는 도로명 주소, 우편번호 등을 활용한 문항이었다. 그리고 공변에 주목하여 추의 무게와 그에 따라 일정하게 늘어나는 용수철 길이의 관계를 표현하게 하는 문항도 있었다. 이 외에도 악보 속에 숨은 반복 패턴을 설명하게 하는 문항도 있었다.

V. 논의 및 제언

본 연구에서는 10종의 4학년 수학 검정 교과용 도서 ‘규칙 찾기’ 단원에 제시된 패턴 활동의 지도 방안을 분석하였다. 연구 결과를 토대로 학생들의 대수적 사고를 신장시키기 위해 패턴 활동과 관련된 후속 교과용 도서 개발에서 재고할 필요가 있는 시사점을 논의하면 다음과 같다.

첫째, 패턴의 구조를 분석하는 활동에서 학생들이 패턴의 구조에 주목할 수 있는 발문이나 하위 활동을 적극적으로 제공할 필요가 있다. 본 연구 결과, 4학년 검정 교과서에서 패턴의 구조를 분석하는 활동은 주로 증가 기하 패턴을 중심으로 패턴을 이루고 있는 모형의 개수를 구하는 데 초점이 있는 것으로 드러났다.

반면에 증가 수 패턴, 계산식 패턴 등 다른 유형의 패턴을 다룬 활동에서는 규칙을 찾아 표현하는 문항이 먼저 제시되기도 하였다. 문항의 특성이나 난이도, 활동 목표 등에 따라 패턴 지도 순서를 달리할 수는 있으나 학생들이 패턴의 구조를 충분히 탐색하는 활동의 중요성이 간과되어서는 안된다. 패턴의 규칙을 찾기 위해서는 우선 패턴을 구성하는 항들의 공통성을 파악할 수 있어야 하고, 이와 같은 공통성이 후속 항에도 일관되게 유지되는지 추론할 필요가 있다(Radford, 2010). 이를 위해 우선 패턴의 구조를 분석할 수 있도록 각 항의 공통점과 차이점에 주목하게 할 장치가 필요하다. 이런 측면에서 증가 기하 패턴을 이루고 있는 모형의 개수만 수로 쓰게 하기보다는 식으로 나타내는 활동이 더 효과적이다. 또한 증가 기하 패턴에서 변하는 부분이나 변하지 않는 부분에 초점을 둔 발문을 제공하면 학생들이 패턴의 구조를 파악하는 데 용이하다(Moss & McNab, 2011). 그러나 이와 같은 발문이나 하위 활동은 검정 교과서에 별반 제시되어 있지 않았다. 또한 교과서 지면의 한계로 인해 대부분 넷째나 다섯째까지만 패턴을 제시하는 경우가 많았는데, 그때까지 반영된 규칙이 이어지는 순서에서도 일정하게 유지되는지 추론해 보게 하는 발문은 제시되지 않았다. 이에 차기 교과서에서는 학생들이 패턴의 구조를 효과적으로 분석하고 여러 항에 걸쳐 규칙을 추론하는 데 도움이 되는 발문이나 활동을 제공할 것을 제안한다.

둘째, 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동에서 추론을 바탕으로 먼 항을 구하는 활동을 제시할 필요가 있다. 본 연구 결과, 현행 4학년 검정 교과서에서는 증가 수 패턴, 증가 기하 패턴, 계산식 패턴, 기타 패턴에 이르기까지 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동이 매우 비중 있게 다루어지고 있었다. 다만 학생들이 구해야 하는 특정한 항이 교과서에 제시된 배열 안에 있거나 가까운 순서에 해당하는 수나 패턴 또는 계산식만을 쓰게 하는 경우는 재고할 필요가 있다. 왜냐하면 학생들이 주어진 수, 도형, 또는 계산식의 전체적인 구조나 여러 가지 규칙을 파악하지 않고도 직전 항들의 변화나 특정한 배열만 보고도 답을 쉽게 찾을 수 있는 경우가 있기 때문이다. 패턴 활동을 통해 학생들의 대수적 사고를 신장시키기 위해서는 패턴의 구조를 파악하여 이를 적용해 보는 기회가 주어져야 한다(Radford, 2010). 이에 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동에서

학생들이 패턴의 구조를 분석하여 파악한 규칙을 먼 항에 적용해보는 과정에서 왜 그렇게 되는지 추론하고 정당화하는 과정이 중요하다(권성룡, 2007; Moss & McNab, 2011). 다만 얼마나 먼 항이 4학년 수준에 적합한지에 대한 연구는 필요해 보인다. 결과적으로, 중간 빈 항, 이어지는 다음 항 등 가까운 순서에 있는 특정한 항을 구하는 활동과 더불어 이때 탐색한 추론을 확장하여 적용해 볼 수 있는 수준에서 먼 항을 구하는 활동도 제시할 것을 제안한다.

셋째, 규칙을 찾아 특정한 항을 구하는 활동에서 학생들이 탐색한 규칙을 역으로 적용할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다. 예를 들어 증가 수 패턴의 규칙을 찾아 수 배열표에서 알맞은 수를 써넣는 활동 이외에 문제에서 수를 제시하고 그 수의 위치를 찾게 하는 활동, 증가 기하 패턴의 규칙을 찾아 특정한 순서에 알맞은 도형을 그려보거나 모형의 개수를 구하는 활동 이외에 역으로 특정 도형이나 모형의 개수를 제시하고 그에 대응되는 순서를 찾게 하는 활동, 계산식 패턴의 규칙을 찾아 특정한 계산 결과가 나오는 계산식을 만들어보는 활동 이외에 문제에서 계산 결과를 먼저 제시하고 그 결과에 알맞은 계산식이 몇째에 나올지 찾게 하는 활동 등이다. 이와 같은 활동은 각 패턴의 유형별로 소수의 검정 교과서에서만 제시되었다. 학생들이 공변하는 두 양이 있을 때, 독립변수와 종속변수를 혼동하는 경우가 많다는 선행 연구를 고려한다면(Pang & Kim, 2018), 특정한 항을 구하는 활동에서 구해야 하는 것이 어떤 변수인지 명확하게 인지하게 하는 것이 필요하다. 이에 현행 교과서에서 많이 다루고 있는, 몇째에 해당하는 수나 모양을 찾는 대신에 역으로 문제에서 제시된 수나 모양에 대응되는 순서가 몇째인지 찾아보는 활동을 통해 학생들이 독립변수에도 주목하게 하는 것은 의미가 있다.

넷째, 규칙을 찾아 표현하는 활동에서는 배열 순서에 따른 증가 기하 패턴의 변화나 계산식 패턴을 구성하는 두 수의 관계에 주목하여 규칙을 표현하게 할 필요가 있다. 사실 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서에서, 한 양이 변할 때 다른 양이 그에 종속하여 변하는 대응 관계는 5학년에서 다루어진다. 그러나 본 연구에서 살펴보았듯이 4학년 검정 교과서에서 증가 기하 패턴을 다룰 때 대부분 배열 순서를 제시하고 있다. 물론 교육과정의 성취기준을 고려하여 배열 순

서 자체를 변화하는 양으로 명시적으로 다루지 않지만, 학생들은 규칙을 표현하는 과정에서 배열 순서에 따른 수, 모양, 계산식 등을 구해야 하기 때문에 두 양을 모두 고려할 수밖에 없게 된다. 실제 지도서를 살펴보면 모양이 늘어나는 규칙을 찾을 때 순서에 따른 모형의 개수를 대응 관계로 찾을 수 있게 설명되기도 하고(박만구 외, 2022c), 규칙을 표현하는 활동의 예시 답안에 배열 순서와 패턴이 연계되어 서술되기도 한다(류희찬 외, 2022c; 안병곤 외, 2022c). 이와 관련하여, 국외 연구에서는 배열 순서를 위치 번호 카드로 제시하거나 수치적 구조로 명시함으로써 배열 순서와 증가 기하 패턴의 변화를 연결할 수 있게 했을 때(Callejo & Zapatera, 2017; Moss & McNab, 2011), 학생들이 자신의 말로 규칙을 일반화할 수 있었고 패턴의 수치적 구조와 기하적 구조를 연결할 수도 있다는 점이 드러났다. 한편 계산식 패턴의 경우 계산 결과가 동일한 값이 되는 덧셈식과 뺄셈식에서 두 수의 관계, 나눗셈식에서 나누는 수가 동일한 경우 나뉘는 수와 몫의 관계 등 한 수가 변할 때 다른 수가 어떻게 변화하는지 즉, 두 수의 관계를 탐색하는 문항이 이미 여러 검정 교과서에 제시되어 있었다. 이런 측면에서 패턴의 배열 순서를 교과서에 제시할 때 변화하는 양으로 명시하여 표현하는 방법을 재고할 필요가 있다.

마지막으로, 교과서의 패턴 활동에서 다양한 배열의 형태 및 유형을 제시할 것을 제안한다. 2015 개정 수학과 교육과정에서 학생들이 다양한 규칙을 찾아 표현할 것을 성취기준으로 제시하고 있지만(교육부, 2015), 본 연구 결과 4학년 검정 교과서에서 대다수의 패턴 활동이 증가 수 패턴, 증가 기하 패턴, 계산식 패턴을 분석하고 규칙을 찾는 것이 주를 이루었다. 특히 증가 수 패턴, 증가 기하 패턴의 경우는 오른쪽으로 진행하면서 증가하는 규칙, 계산식 패턴의 경우는 아래로 진행하면서 계산 결과가 증가하는 규칙이 많았다. 이명기와 나귀수(2012)는 같은 패턴의 유형이라도 학생들에게 생소하며 다양한 맥락을 제시하는 것이 일반화에 도움이 된다고 하였고, Mulligan 외(2020)도 각도, 대칭 등 다양한 형태의 패턴 유형을 활용했을 때 학생들의 일반화 수준을 높일 수 있었다고 보고하고 있다. 이런 측면에서 10종의 검정 교과서에서 많지는 않지만 다양한 형태의 수 배열을 활용하거나, 공변하는 두 양의 관계를 그림으로 제시하는 등 기타 패턴이 있는 것

은 고무적이다. 2022 개정 수학과 교육과정에 따라 차기 검정 교과용 도서를 개발할 때, 본 연구에서 드러난 교과용 도서의 패턴 활동에 대한 분석을 토대로 현행보다 다양한 패턴의 유형과 의미 있는 패턴 활동이 제시되기를 바란다.

참 고 문 헌

- 강완, 백석윤, 전인호, 이경화, 김연, 이미연 외 15인 (2022a). 수학 4-1. 대교출판.
- 강완, 백석윤, 전인호, 이경화, 김연, 이미연 외 15인 (2022b). 수학 익힘 4-1. 대교출판.
- 강완, 백석윤, 전인호, 이경화, 김연, 이미연 외 15인 (2022c). 수학 4-1 지도서. 대교출판.
- 교육부(2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8]. 교육부.
- 권성룡(2007). 초등 수학 교과서의 규칙성과 함수 영역의 활동 고찰. 초등수학교육 10(2), 111-123.
- 김남균, 김은숙(2009). 초등학교 6학년의 패턴의 일반화를 통한 대수 학습에 관한 연구. 수학교육논문집, 23(2), 399-428.
- 김성여, 강언진, 강요한, 고창수, 김보현, 김영준 외 9인(2022a). 수학 4-1. 아이스크림.
- 김성여, 강언진, 강요한, 고창수, 김보현, 김영준 외 9인(2022b). 수학 익힘 4-1. 아이스크림.
- 김성여, 강언진, 강요한, 고창수, 김보현, 김영준 외 9인(2022c). 수학 4-1 지도서. 아이스크림.
- 남승인(2000). 수학적 사고력 신장을 위한 규칙성 영역의 학습 자료 개발. 수학·과학교육연구, 23, 91-121.
- 도주원(2021). 초등수학의 규칙성 영역 단원에 제시된 발문의 특성 분석. 초등수학교육, 24(4), 189-202.
- 류희찬, 유현주, 이종영, 조영미, 탁병주, 최인숙 외 20인(2022a). 수학 4-1. 금성출판사.
- 류희찬, 유현주, 이종영, 조영미, 탁병주, 최인숙 외 20인(2022b). 수학 익힘 4-1. 금성출판사.
- 류희찬, 유현주, 이종영, 조영미, 탁병주, 최인숙 외 20인(2022c). 수학 4-1 지도서. 금성출판사.
- 박교식, 정영옥, 고정화, 권석일, 남진영, 박진형 외 27인(2022a). 수학 4-1. 두산동아.

- 박교식, 정영옥, 고정화, 권석일, 남진영, 박진형 외 27인(2022b). 수학 익힘 4-1. 두산동아.
- 박교식, 정영옥, 고정화, 권석일, 남진영, 박진형 외 27인(2022c). 수학 4-1 지도서. 두산동아.
- 박만구, 강경은, 김대진, 김도경, 김수정, 김은혜 외 8인(2022a). 수학 4-1. 천재교육.
- 박만구, 강경은, 김대진, 김도경, 김수정, 김은혜 외 8인(2022b). 수학 익힘 4-1. 천재교육.
- 박만구, 강경은, 김대진, 김도경, 김수정, 김은혜 외 8인(2022c). 수학 4-1 지도서. 천재교육.
- 박성선, 류성림, 김상미, 권성룡, 김남균, 강호진 외 11인(2022a). 수학 4-1. YBM.
- 박성선, 류성림, 김상미, 권성룡, 김남균, 강호진 외 11인(2022b). 수학 익힘 4-1. YBM.
- 박성선, 류성림, 김상미, 권성룡, 김남균, 강호진 외 11인(2022c). 수학 4-1 지도서. YBM.
- 방정숙, 선우진(2016a). 초등학생의 함수적 사고 신장을 위한 기하 패턴 지도 사례의 분석. 수학교육학연구, 26(4), 769-789.
- 방정숙, 선우진(2016b). 초등학교 수학 교과서에 제시된 패턴 지도방안에 대한 분석. 초등수학교육, 19(1), 1-18.
- 신향균, 김태환, 조보영, 김리나, 정나영, 최혜령, 외 8인(2022a). 수학 4-1. 비상교육.
- 신향균, 김태환, 조보영, 김리나, 정나영, 최혜령, 외 8인(2022b). 수학 익힘 4-1. 비상교육.
- 신향균, 김태환, 조보영, 김리나, 정나영, 최혜령, 외 8인(2022c). 수학 4-1 지도서. 비상교육.
- 안병근, 나귀수, 김민경, 이광호, 류현아, 최지선 외 14인(2022a). 수학 4-1. 두산동아.
- 안병근, 나귀수, 김민경, 이광호, 류현아, 최지선 외 14인(2022b). 수학 익힘 4-1. 두산동아.
- 안병근, 나귀수, 김민경, 이광호, 류현아, 최지선 외 14인(2022c). 수학 4-1 지도서. 두산동아.
- 유미경, 류성림(2013). 초등수학영재와 일반학생의 패턴의 유형에 따른 일반화 방법 비교. 학교수학, 15(2), 459-479.
- 이명기, 나귀수(2012). 패턴의 유형에 따른 학생들의 일반화 방법 조사. 학교수학, 14(3), 357-376.
- 장혜원, 서동엽, 김민희, 김선, 김주숙, 김차명 외 8인(2022a). 수학 4-1. 미래엔.
- 장혜원, 서동엽, 김민희, 김선, 김주숙, 김차명 외 8인(2022b). 수학 익힘 4-1. 미래엔.
- 장혜원, 서동엽, 김민희, 김선, 김주숙, 김차명 외 8인(2022c). 수학 4-1 지도서. 미래엔.
- 최지영, 방정숙(2008). 초등학교 4학년 학생들의 대수적 사고 분석. 수학교육논문집, 24(2), 205-225.
- 최지영, 방정숙(2014). 초등학교 6학년 학생들의 함수적 관계 인식 및 사고 과정 분석. 수학교육학연구, 24(2), 205-225.
- 최혜진, 이해은, 유수경(2007). 유치원과 초등학교 1학년 아동의 패턴인식능력에 대한 연구. 열린유아교육연구, 12(1), 223-240.
- 한대희, 고은성, 이수진, 조형미, 한상의, 신희영 외 11인(2022a). 수학 4-1. 천재교육.
- 한대희, 고은성, 이수진, 조형미, 한상의, 신희영 외 11인(2022b). 수학 익힘 4-1. 천재교육.
- 한대희, 고은성, 이수진, 조형미, 한상의, 신희영 외 11인(2022c). 수학 4-1 지도서. 천재교육.
- Blanton, M., Levi, L., Crites, T., & Dougherty, B. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. In B. Dougherty, & R. Zbiek (Eds.), *Essential understandings series*. National Council of Teachers of Mathematics. 방정숙, 최지영, 이지영, 김정원 공역(2017). 대수적 사고의 필수 이해. 교우사.
- Callejo, M. L., & Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20(4), 309-333.
- Ferrara, F., & Sinclair, N. (2016). An early algebra approach to pattern generalisation: Actualising the virtual through words, gestures and toilet paper. *Educational Studies in Mathematics*, 92(1), 1-19.
- Hourigan, M., & Leavy, A. (2015). Geometric growing patterns: What's the rule?. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 20(4), 31-39.
- Moss, J., & McNab, S. L. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students' reasoning and

- generalizing about functions and co-variation. In J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 277-301). Springer.
- Mulligan, J., Oslington, G., & English, L. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM - Mathematics Education*, 52(4), 663-676.
- National Council of Teachers of Mathematic (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Pang, J., & Kim, J. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: A generalized arithmetic perspective. In C. Kieran (Ed.) *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 141-165). Springer.
- Papic, M., & Mulligan, J. T. (2007). The growth of early mathematical patterning: An intervention study. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceeding of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Mathematics: Essential research, essential practice* (Vol. 2, pp. 591-600). Adelaide: MERGA.
- Papic, M. M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(3), 237-268.
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631-674.
- Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 2-21). Mérida, Mexico: PME-NA.
- Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *Pentose Nucleic Acid (PNA)*, 4(2), 37-62.
- Reys, R., Lindquist, M., Lamdin, D. V., & Smith, N. L. (2015). *Helping children learn mathematics* (11th ed.). John Wiley & Sons. 박성선, 김민경, 방정숙, 권점례 공역(2017). 초등교사를 위한 수학과 교수법. 교우사.
- Twohill, A. (2018). Observations of structure within shape patterns. In C. Kieran (Ed.) *Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12-year-olds* (pp. 213-235). Springer.
- Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E. S., Barkai, R., & Tabach, M. (2017). Repeating patterns in kindergarten: Findings from children's enactments of two activities. *Educational Studies in Mathematics*, 9(1), 83-99.
- Wijns, N., Verschaffel, L., De Smedt, B., De Keyser, L., & Torbeyns, J. (2021). Stimulating preschoolers' focus on structure in repeating and growing patterns. *Learning and Instruction*, 74, 101444.

An Analysis of Pattern Activities of a Finding Rules Unit in Government-Authorized Mathematics Curricular Materials for Fourth Graders

Pang, JeongSuk

Korea National University of Education

E-mail : jeongsuk@knue.ac.kr

Lee, Soojin[†]

Graduate School of Korea National University of Education

E-mail : fun_2014@naver.com

The activity of finding rules is useful for enhancing the algebraic thinking of elementary school students. This study analyzed the pattern activities of a finding rules unit in 10 different government-authorized mathematics curricular materials for fourth graders aligned to the 2015 revised national mathematics curriculum. The analytic elements included three main activities: (a) activities of analyzing the structure of patterns, (b) activities of finding a specific term by finding a rule, and (c) activities of representing the rule. The three activities were mainly presented regarding growing numeric patterns, growing geometric patterns, and computational patterns. The activities of analyzing the structure of patterns were presented when dealing mainly with growing geometric patterns and focused on finding the number of models constituting the pattern. The activities of finding a specific term by finding a rule were evenly presented across the three patterns and the specific term tended to be close to the terms presented in the given task. The activities of representing the rule usually encouraged students to talk about or write down the rule using their own words. Based on the results of these analyses, this study provides specific implications on how to develop subsequent mathematics curricular materials regarding pattern activities to enhance elementary school students' algebraic thinking.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20

* Key Words : patterns, finding rules, elementary mathematics textbooks

† Corresponding Author