

## 탐구형 소프트웨어를 활용한 합동과 대칭 수업에서 나타나는 초등학생의 귀납적 추론과 시각화에 관한 연구

박 지 연 (서울우솔초등학교, 교사)

김 민 경 (이화여자대학교, 교수)<sup>†</sup>

본 연구에서는 초등학교 5학년 2학기 '합동과 대칭' 단원을 대상으로 탐구형 소프트웨어를 활용한 수업에서 학생들에게서 나타난 귀납적 추론 능력의 수준과 시각화 구성 요소의 양상이 어떠한지 파악하고자 하였다. 이를 위해 초등학교 5학년 1개 반, 총 19명을 대상으로 탐구형 소프트웨어 중 GeoGebra를 활용한 합동과 대칭 수업을 진행하고 학생들의 활동 결과물을 중심으로 분석하였다. 연구 결과 학생들의 귀납적 추론 능력 수준이 비슷한 수준을 유지하거나 발전되는 형태로 나타났고 학생들이 소프트웨어의 다양한 기능을 활용하여 도형의 새로운 성질을 귀납적으로 추론하는 모습이 나타났다. 또한 시각화 측면에서 학생들이 조건에 맞는 도형을 빠르고 쉽게 그릴 수 있었고 지필 환경과는 다르게 '측정', '대칭' 기능을 활용하여 복잡하면서도 정확히 합동과 대칭인 외적 표상을 변형, 조작하는 모습이 나타났다. 이러한 분석 결과를 바탕으로 도형 영역에서 탐구형 소프트웨어의 활용에 대한 시사점을 도출하였다.

### I. 서론

4차 산업 혁명 시대의 도래에 따라 교육에서도 소프트웨어, 인공지능 등 다양한 기술을 도입하여 미래 사회의 변화에 대비하고자 노력하고 있다. 이러한 변화에 따라 교육부(2021)는 학생들이 미래 사회가 요구하는 역량 함양을 위해 AI 소프트웨어 교육을 비롯한 디지털 기초소양 강화를 강조하고 디지털·AI 교육환경에 맞는 교수·학습 및 평가체제를 구축하고자 하였다. 특히 수학 교과와 2022 개정 교육과정에서는 수학 내용 특성에 적합한 교구나 공학 도구를 선택하여 효율적인 교수·학습이 이루어지도록 하여 학생들의 디지털 소양 함양을 도모해야 하고 학생이 주도적으로 교구가 공학 도구를 활용하여 탐구해야 한다는 점을 명시적으로 언급하였다(교육부, 2022). 즉, 수학 교과에서 학생들의 역량 함양과 교수·학습의 유용성을 위해 소프트웨어와 같은 다양한 디지털 기술을 사용해야 한다는 것이다. 그렇지만 실제 교육 현장에서 소프트웨어를 활용한 수업의 빈도는 미미한 수준으로(정소영, 2017) 적극적으로 소프트웨어를 도입할 수 있는 수학의 영역을 탐색하고 교수·학습 방법을 구상하는 것이 필요하다.

NCTM(2000)에 의하면, 기술은 도형 영역의 학습에 중요한 역할을 한다. 소프트웨어와 같은 도구를 사용하면 학생들은 다양한 2차원 도형을 모델링하고 상호작용하는 경험을 할 수 있고 이를 통해 시각화와 공간 추론 능력을 향상시킬 수 있다. 또한, 이근주, 조민식(2006)은 기하 교육이 기하학적 직관 능력과 이를 바탕으로 한 추론 능력을 발달시키는 것을 주요 목적으로 하고 컴퓨터 환경에서 탐구형 기하 소프트웨어의 역동적인 특성은 시각화와 조작적 이해를 촉진시켜 추론과 증명 지도 등 도형 영역의 교수·학습에서 그 효과가 입증되고 있으며 귀납

\* 접수일(2023년 5월 4일), 심사(수정)일(2023년 5월 31일), 게재확정일(2023년 6월 20일)

\* MSC2000분류 : 97U70

\* 주제어 : 도형, 탐구형 소프트웨어, 귀납적 추론, 시각화

<sup>†</sup> 교신저자: mkkim@ewha.ac.kr

\* 본 논문은 제1저자의 학위논문의 일부 내용을 보완하고 재수정한 것임.

적 탐구 대상의 범위를 확대시키고 동일 시간 내 더 많은 탐색을 할 수 있도록 하여 심층적인 탐구가 가능하다고 주장하였다. 또한 류성립(2001)은 탐구형 소프트웨어를 기하 학습에 활용한다면 시각적 직관력을 키우고 도형의 여러 성질과 관계를 직관적으로 쉽게 이해할 수 있으며 도형의 관계를 파악하고 추정하는 실험의 기회를 제공하는 추론으로서의 탐구 활동이 가능하다고 주장하였다. 그러므로 도형 영역에서 탐구형 소프트웨어를 활용한 교육을 적용한다면 학생들의 도형 개념 형성을 효과적으로 도울 수 있고 구체적으로 귀납적 추론 능력과 시각화를 촉진시킬 수 있다고 보았다. 도형 영역 중 특히 합동과 대칭 단원은 개념과 원리에 대한 명확한 이해를 기반으로 도형의 기본적인 개념과 공간 감각이 효과적으로 형성될 수 있도록 지도해야 하는 단원이다(교육부, 2019a). 즉, 도형의 개념 형성을 위해서 합동, 대칭과 관련된 다양한 평면도형을 소프트웨어를 통해 구현하고 합동과 대칭의 개념과 성질에 대해 탐색하는 과정이 필요하고 이를 통해 공간 감각과 추론 능력의 함양을 추구해야 한다는 것이다.

이처럼 도형 개념 형성 과정에서 활용할 수 있는 대표적인 탐구형 소프트웨어인 GeoGebra는 오픈 소스 자바 소프트웨어로써, 도형의 구성 요소를 자유롭게 조작하고 직관적으로 관찰할 수 있어 도형의 역동성을 한눈에 확인할 수 있다(김효영, 2021). 지금까지 GeoGebra를 활용한 도형 학습에 관련된 선행연구를 살펴보면, GeoGebra를 활용한 도형 수업이 대부분 중고등학생을 대상으로 하는 경우가 많았고 GeoGebra를 활용한 프로그램을 적용하고 도형에 대한 이해도의 향상이 나타남을 확인하였다(김수연, 2017; 박유립, 2016; 정대성, 2014). 또한 최근 진행되고 있는 초등학생을 대상으로 하는 연구를 살펴보면, GeoGebra를 활용한 수업 후 도형에 대한 이해와 학습 태도를 분석하는 경우가 많았다(권윤신, 류성립, 2013; 김효영, 2021; 정소영, 2017). 그렇지만 아직 초등학생 대상 GeoGebra의 활용 연구에서 학생들의 도형 개념 형성 과정을 구체적으로 분석하여 도형 개념의 학습에 시사점을 주는 연구는 드물었다. 또한 수업에서 합동과 대칭 개념을 다루거나 도형 개념 형성 과정에서 중요한 요소인 귀납적 추론 능력과 시각화를 구체적으로 살펴본 연구는 거의 수행되지 않았다. 이에 초등학생들을 대상으로 합동과 대칭 개념을 형성하는 연구를 수행함으로써 학생들의 귀납적 추론 능력과 시각화의 양상이 어떠한지 살펴볼 필요가 있다.

따라서 본 연구에서는 초등학교 5학년 2학기 3단원 ‘합동과 대칭’에서 탐구형 소프트웨어인 GeoGebra를 활용한 수업을 통해 학생들의 개념 형성 과정이 어떻게 이루어지는지 탐색하고자 한다. 특히 탐구형 소프트웨어를 활용했을 때 학생들의 귀납적 추론 능력의 수준이 어떻게 나타나는지, 시각화의 구체적인 양상이 어떠한지 심층적으로 분석하고자 한다. 이를 바탕으로 도형 영역의 수업에서 탐구형 소프트웨어가 갖는 의미와 탐구형 소프트웨어를 효과적으로 활용하는 방안에 대한 시사점을 제안하고자 한다.

## II. 연구의 배경

### 1. 이론적 배경

#### 가. 귀납적 추론의 의미와 범주

수학 교과에서 귀납적 추론의 의미를 구체적으로 살펴보면, O'Daffer와 Thornquist(1993)는 귀납적 추론을 하나의 집단에서 몇 가지 구체적 요소에 대한 정보를 사용하여 그 집단의 다른 요소 또는 모든 요소에 대한 일반화를 끌어내는 수학적 추론으로 정의하고 있다. 또한, 우정호(2000)는 귀납적 추론을 관찰된 특수한 사례의 공통적인 성질에 주목해 사례 전체에 대해서 성립하리라고 예상되는, 숨겨져 있는 일반적 법칙을 추측하는 것이라고 보았다. 이러한 연구자들의 견해를 종합하고 도형 영역의 특징을 고려하였을 때 도형 영역에서 귀납적 추론을 ‘구체적인 사례의 수집을 통해 도형의 공통 성질에 주목하여 도형의 개념과 일반적인 성질을 추측하는 능력’이라

고 정리할 수 있다.

일반적인 귀납적 추론의 범주와 평가 관점과 관련하여 전평국 외(2002)는 일반적인 추론 과정과 본질적인 사고 기능에 대한 문헌 검토 결과에 근거하여 귀납적 추론의 평가 범주를 자료수집, 규칙 찾기, 일반화로 설정하였다. 이를 정리한 결과는 <표 II-1>과 같고 평가 범주인 자료수집, 규칙 찾기, 일반화라는 사고 기능에 대한 증거를 얻을 수 있으면 학생들의 귀납적 추론 능력을 이해할 수 있는 것으로 판단하였다. 자료수집은 규칙을 찾아 일반화하기 위해 먼저 구체적인 몇 가지 사례를 수집하는 단계이다. 규칙 찾기는 수집된 구체적인 자료 안에 포함된 여러 가지 변수들 사이의 규칙성을 찾는 단계로, 귀납 추론의 본질적인 사고 기능과 관련하여 핵심적인 평가 범주라 할 수 있다. 일반화는 구체적인 사례로부터 찾은 규칙을 정확한 수학적 기호와 문자, 수식을 사용하여 나타내는 단계이다. 또한 각 추론의 평가 범주별 평가 단계는 아래와 같이 4단계를 기본으로 하였다.

<표 II-1> 귀납적 추론 능력의 평가 범주와 관점(전평국 외, 2002, p. 433)

평가 범주	평가 관점	평가 단계	
자료수집	1) 자료의 적절성	3	일반적인 규칙을 찾기에 적절하고 정확한 자료를 충분히 수집
	2) 자료의 정확성	2	자료의 충분성과 적절성, 정확성에서 부분적으로 부족한 자료 수집
	3) 자료의 충분성	1	문제 해결에 적절하지 않지만, 규칙을 찾기 위한 의도로 자료 수집
	4) 자료의 체계성	0	규칙을 찾기 위한 의도 없이 단순히 자료를 나열하였거나 시도하지 않음
규칙 추측	1) 자료 분석 능력 (비교, 대조, 분류) 2) 규칙의 정확성 3) 규칙의 일반성	3	일반적인 규칙을 정확히 찾음
		2	규칙의 일반성, 정확성이 부분적으로 부족함 문제 해결과 관련이 없지만, 변수 사이의 관계를 일반화할 수 있는 규칙을 정확하게 찾음(자료 분석 능력)
		1	자료 분석 능력을 부분적으로 보여주는 규칙을 정확하게 찾음
		0	시도하지 않았거나 자료 분석 능력과 관련 없는 단순한 규칙을 찾음
일반화	1) 일반성 도출 2) 수학적 기호, 문자, 수식 사용 3) 정확성 4) 간결성	3	수학적 기호, 문자, 수식을 사용하여 일반식으로 정확히 나타냄
		2	일반화를 시도하였으나 부분적으로 부족함
		1	일반식으로 나타내지 못하였으나 수학적 기호, 문자, 수식 사용 능력이 부분적으로 보임
		0	시도하지 않았거나 규칙과 전혀 관련 없이 단순히 문자를 나열함

한편, 도형 개념의 형성 측면에서 학생들이 여러 도형을 경험하여 공통된 속성을 추출하는 귀납적인 추론이 중요하다. Battista(2018)는 기하학적 추론이 도형의 모양과 공간을 탐구하기 위해 형식적인 개념 시스템을 활용하는 것으로 구성되었다고 보았다. Seah와 Home(2020)는 이러한 Battista(2018)의 기하학적 추론 과정과 van Hiele(1986)의 연구를 바탕으로 기하학적 추론을 <표II-2>와 같이 5단계로 나누어 설명하였다. 예를 들어, 네모난 도구를 보고 마름모 모양이라고 하는 것은 1수준, 변의 길이가 모두 같은 사각형이라고 보는 것은 2수준, 마름모의 대각선, 각, 평행한 변 등을 설명하는 것은 3수준이다. 마름모에서 정사각형이 되는 조건을 추론하는 것은 4수준이며, 삼각형의 합동을 이용해 마름모의 성질을 증명하는 것은 5수준에 해당한다(이현주, 2021).

&lt;표 II-2&gt; 기하학적 추론의 단계(Seah와 Horne, 2020, p. 612)

수준	특성	
1수준: 시각적 추론 (Visual reasoning)	1.1 사전 인식	도형을 시각적인 전체로, 외형적으로만 인식
	1.2 인식	도형의 집단 전체를 안정적으로 구분하지 못하지만 적어도 도형의 한 가지 특징을 인식
2수준: 기술적 추론 (Descriptive reasoning)	2.1 시각적 비형식적 추론	개념적 지식보다는 시각적인 것에 기반을 둔 비형식적 언어를 사용하여 도형의 중요한 속성을 활용해 도형을 인식하고 설명
	2.2 비형식적, 불충분한 형식적 추론	'본 것'과 도형 사이의 공간 관계를 설명하는 형식적 언어를 기술하기 시작
3수준: 분석적 추론 (Analytic reasoning)	3.1 도형의 성질에 기반을 둔 추론	원, 마름모, 평행사변형, 수직이등분선 등 도형의 기본 성질을 이용한 추론, 최소한의 정의는 아님
4수준: 관계-추론 성질 기반 추론 (relational-inferential property-based reasoning)	4.1 경험적 관계	도형에서 한 성질이 있다면 다른 성질도 있다고 경험적 증거를 사용해 결론
	4.2 분석	한 성질이 있으면 다른 성질이 반드시 일어남을 이해
	4.3 논리적 추론	학생들이 필요한 성질을 구별할 뿐만 아니라 구별한 것과 관련된 충분한 아이디어를 이해
	4.4 논리적 추론에 기반을 둔 위계 분석	도형과 관련된 위계를 구분
5수준: 형식적 연역 증명 (Formal deductive proof)	5.1 형식적 연역 증명	도형의 성질에 기반한 논거를 구성하고 합동, 닮음인 도형에 필요한 조건을 인식

### 나. 시각화의 의미와 구성 요소

도형 학습에서 시각화는 매우 중요한 요소이다. 시각화의 의미를 살펴보자면, Zimmermann과 Cunningham(1991)은 수학에서 시각화는 정신적으로 또는 종이와 펜으로 또는 기술의 사용으로 이미지를 형성하는 과정이라고 보았고, 이는 수학적 이해와 수학적 발견과정을 효과적으로 자극하는 것을 목적으로 이미지를 활용하는 과정이라고 주장하였다. Nemirovsky와 Noble(1997)은 선행연구에서 살펴본 정의를 구체화하여 시각화를 학생의 마음 또는 어떠한 외적인 수단에 의해 제한되는 것이 아니라, 시각화를 내적인 마음과 외적인 수단 사이를 이동하는 과정으로 정의하였다. 최근에는 공간 감각이 주목받으면서 그 하위 요소로 공간시각화에 대한 의미를 탐색하는 연구가 이루어지고 있다. 공간 감각의 하위 요소 또한 학자들마다 조금씩 차이가 있지만 일반적으로 공간 감각의 요인 분석적 측면에서 공간시각화와 공간 방향이라는 두 가지 요인이 존재한다는 것이 학자들의 공통적인 견해였다(Del Grande, 1990; Lohman, 1979; Tartre, 1984). 특히 공간시각화는 관찰자가 물체의 전체 혹은 일부를 정신적으로 회전하거나 변환하고, 복잡한 배경에서 특정한 도형을 지각하는 등 정신적 표상을 구성하고 이를 조작하는 능력을 의미한다(교육부, 2019b). 도형은 추상적인 대상을 다루는 학문이므로 시각화의 중요성은 특히 구체적 조작기에 놓여 있는 초등학생들의 경우, 시각화가 이들의 수학 학습에서 구체와 추상 사이의 간극을 연결하는 다리 역할을 한다는 점에서 더욱 부각되고 있다(윤여주, 김성준, 2010).

시각화의 과정에 관해 류현아, 장경운(2009)은 도형에 대한 지각적 이해, 담론적 이해, 조작적 이해로 범주화할 수 있다고 보았다. 먼저 그림이나 그림이 아닌 정보를 해석하고, 이것으로부터 도형 이미지를 만들기 위해서는 담론적 이해가 중요한 역할을 한다. 정보를 해석하기 전에 즉각적으로 도형에 대한 이미지를 지각하고 생성하는 것은 도형을 지각적으로 이해한 경우라고 볼 수 있다. 그리고 생성된 도형을 문제 해결에 유용할 수 있다

록 새롭게 변형하고 조작하기 위해서 도형을 조작적으로 이해할 필요가 있고, 이를 바탕으로 변형된 도형의 부분들로부터 문제 해결에 필요한 결정적인 정보를 얻을 수 있게 된다. 이때 도형을 직접 작도하거나 작도의 과정을 설명하는 것이 필요하고 이는 기술적 제약과 수학적 성질에 따라 달라질 수 있다.

시각화의 구성 요소에 관해, Bishop(1983)은 시각화에 대해 ‘시각적 처리 능력’과 ‘도형의 정보 해석 능력’ 두 과정으로 나누어 각각의 과정에 요구되는 능력을 서술하였다. Kosslyn(1983)은 이를 더욱 세분화하여 시각화의 과정을 크게 정신적 이미지를 생성하는 과정, 이미지를 면밀히 관찰하고 분석하는 과정, 이미지를 유지하는 과정, 정신적 이미지를 다른 형태의 이미지나 정보로 변형하는 과정으로 분류하였다. 주홍연(2012)은 Gutierrez(1996)의 연구 범주를 바탕으로 수학적 시각화 요소를 <표 II-3>과 같이 분류하였다. 정신적 이미지는 마음속에 나타나는 표상 요소들로, 외적 표상은 외적 이미지로서 나타나는 언어적, 회화적 요소들로 현실적 그림, 도형, 모델, 오류가 포함된 표상으로 구분하였다. 이미지 조작 및 변형은 정신적 조작 활동 과정으로서의 내적 이미지의 변형 및 조작과 문제에 제시된 그림이나 자신이 구성하게 된 외적 표상을 통해 이루어지는 구체적 조작 활동 과정으로서의 외적 이미지의 변형 및 조작으로 세분화할 수 있다. 공간시각화 능력은 나머지 시각화의 구성 요소를 충분히 활용하는 데 필요한 요소로 공간시각화 생성, 공간 방향화 능력으로 범주화하였다. 김수연(2017)은 이러한 주홍연(2012)의 연구 결과를 바탕으로 시각화 과정에 대해 ‘공간 능력의 영향 아래에서 정신적 이미지 생성, 정신적 이미지 변형 및 조작, 외적 표상 생성, 외적 표상 조작 및 변형이 이루어지는 일련의 과정’으로 정의하고 GeoGebra 환경을 추가한 분석 틀을 마련하였다.

<표 II-3> 시각화 구성 요소의 범주화(주홍연, 2012, p. 12)

Gutiérrez(1996)	주홍연(2012)의 연구 결과	
정신적 이미지	정신적 이미지	
시각화 과정	이미지 변형 및 조작	내적 이미지 변형 및 조작 외적 이미지 변형 및 조작
외적 표상	외적 표상	현실적 그림 표상
		도형
		그래프 표상
		언어적 표상
	오류가 포함된 표상	
시각화 능력	공간 시각화 능력	공간 시각화 생성 능력
		공간 방향화 능력

**다. 탐구형 소프트웨어**

수학교육에서 컴퓨터를 활용하는 유형에는 여러 가지가 있다. Taylor와 Chonacky(1980)는 컴퓨터를 활용한 교수·학습에 대해 교수의 방향을 미리 정해 놓았는지와 학생의 학습 주도권의 허용 정도에 따라 개인교사형, 보조도구형, 학생주도형 세 가지 유형으로 분류하였다. 최근에는 학생주도형과 보조도구형을 합한 ‘탐구학습형’ 소프트웨어가 주로 활용되고 있다. 이 유형은 단순히 컴퓨터로부터 학습자로의 일방적인 지식 전달에서 탈피하여 학습자와 컴퓨터와의 상호작용을 강조한다(강옥기 외, 2012). 탐구형 소프트웨어의 종류를 구체적으로 살펴보면, 네 가지 종류의 탐구형 소프트웨어를 장혜진(2012)의 탐구형 소프트웨어 범주와 특징에 따라 분류한 결과는 <표 II-4>와 같다. 그중에서 GeoGebra는 기하, 대수, 미적분, 통계, 이산수학, 3차원 기하 등을 하나의 환경 안에서 통합적으로 다루는 동적 수학 소프트웨어(Dynamic Mathematics Software)로 학생들이 학교 수업을 효과적이고 쉽게 배울 수 있도록 돕기 위한 자바 소프트웨어이다(임현정, 고상숙, 2016). GeoGebra로 작도한 도형은 드래그(drag)를 통한 이동이 자유롭고, 도형의 구성 요소인 꼭짓점을 자유롭게 이동해 보는 과정을 통해 다른 구성 요

소인 변의 길이를 조작해볼 수 있고, 각도를 변형시켜보며 나타나는 도형의 변화를 직관적으로 관찰할 수 있게 된다(김효영, 2021).

<표 II-4> 탐구형 소프트웨어의 범주와 특징

소프트웨어 범주	특징	소프트웨어 종류	인터넷: 상호작용
기본적 기능의 소프트웨어	사용자가 기하적 대상을 작도하고 다룰 수 있는 소프트웨어. 구성을 마친 후 사용자가 도형을 변화시킬 때 어떻게 변화하는지 관찰할 수 있음	Geometer's Sketchpad Cabri II	불가능
		Cinderella	가능
결합된 기능의 소프트웨어	DGS의 기능, 기호적 형태의 수학적 표현을 다루는 CAS(Computer Algebra System), 스프레드시트 등의 기능이 결합된 소프트웨어	GeoGebra	가능

한편, 류성림(2001)은 이러한 탐구형 소프트웨어를 도형 수업에 활용하는 방법으로 크게 세 가지 유형을 제안하였다. 첫째, 교사 중심의 시범 모델형으로서, 교사용 컴퓨터와 프로젝션 TV를 활용하여 미리 교사가 구성한 파일을 학생들에게 보여주고 도형을 움직이면서 학생들이 도형의 여러 가지 성질이나 관계를 파악하고 미리 나누어 준 시트지에 답을 하는 형식으로 수업을 전개하는 방법이다. 둘째, 학생 중심의 작도 체험형으로서, 작도과정을 제시하여 학생이 직접 도형을 작도하도록 하고, 작도된 도형을 움직이면서 불변적인 성질이나 관계를 찾도록 하는 방법이다. 셋째, 학생 중심의 파일 제시형으로서, 교사가 미리 작도한 그림 파일을 나누어주고 학생들은 각자 그 그림을 움직이면서 도형의 성질이나 관계를 탐구하도록 하는 방법이다.

GeoGebra를 활용한 도형 학습과 그 효과를 탐색한 선행연구를 살펴보면, 중고등학생 대상의 연구가 대다수였는데, 예를 들면, 정대성(2014)은 중학교 1학년을 대상으로 도형의 닮음 학습에서 GeoGebra를 활용하였고, 분석 결과 GeoGebra를 활용한 학습은 지필 환경에서보다 능동적인 활동을 가능하게 하였고 쉽고 효율적인 작도 환경을 바탕으로 닮음의 성질을 탐색하는 데 도움을 주었다고 보았다. 박유림(2016)은 중학교 2학년 '도형의 성질' 단원에서 학생 6명을 대상으로 GeoGebra를 활용한 수업을 진행하고 그 결과, 학생의 수준과는 관계없이 학생들이 수학을 좀 더 편하게 다가갈 수 있게 하였고 시각적으로 학생들의 이해도가 높아지는 것에 도움이 되었으며 수학적 흥미와 자신감을 상승시키는 데 큰 역할을 한다고 논하였다. 김수연(2017)은 고등학교 공간도형 단원에서 GeoGebra의 3차원 기능을 활용한 교수학습 활동이 학생들의 시각화 과정과 정의적 특성에 미치는 영향이 어떠한지를 분석하고자 하였다. 분석 결과 GeoGebra의 3차원 기능이 공간도형의 개념에 대한 이해와 문제 해결에 있어서 역동적인 시각화가 가능하게 되었고 학생들이 기하 학습에서 겪는 어려움을 극복하였으며 나아가 공간 능력 향상에 영향을 미쳤다고 보았다.

한편 초등학생을 대상으로 한 선행연구를 살펴보면, 권윤신, 류성림(2013)은 GeoGebra를 활용한 귀납 활동이 초등 수학 영재들의 증명 능력 및 증명학습태도에 미치는 영향을 탐색하고자 초등수학영재 20명으로 수업을 실행한 후 증명능력 검사와 증명학습태도 검사를 통해 귀납 활동으로 학습을 진행한 실험집단이 전통적인 증명 학습을 시행한 비교집단보다 증명 능력에 대해 더 높은 성취도를 보였고 증명 학습에 긍정적인 효과가 있었다고 주장하였다. 정소영(2017)은 GeoGebra를 활용한 수업이 초등학교 4학년 2학기 다각형 단원에서 학생들의 도형 개념 형성과 수학적 성향에 어떠한 영향을 미치는지 파악하고자 하였다. 4학년 2개 학급을 대상으로 수업을 한 후 도형 개념 형성 검사와 수학적 성향 검사지를 통해 분석을 진행하였고 그 결과 도형 개념의 형성과 수학적 성향 모두 유의미한 차이가 있었고 특히 수학적 성향 6가지 영역 중 수학적 융통성, 호기심, 가치 영역에서

그 차이가 뚜렷하다고 논하였다.

선행연구의 내용을 종합해보면, GeoGebra를 활용하여 도형을 학습하고 그 영향을 살펴본 연구가 지금까지 활발하게 진행되고 있음을 알 수 있다. 연구의 방법은 주로 질적 연구가 많았고 두 집단이 있는 경우 양적 연구도 시행되고 있었다. 그렇지만 초등학생을 대상으로 한 연구에서 질적인 방법으로 학생들의 사고 과정을 심층적으로 분석하여 도형 개념의 형성에 시사점을 주는 연구는 드물었고 실제 수업에서 합동과 대칭 개념을 다루거나 도형 개념 형성 과정에서 중요한 요소인 시각화와 추론 능력을 구체적으로 살펴본 연구는 없었다. 따라서 본 연구에서는 초등학교 5학년 학생들을 대상으로 도형 수업에서 GeoGebra를 활용한 후 학생들의 귀납적 추론과 시각화 구성 요소의 양상을 구체적으로 분석해보고 탐구형 소프트웨어가 각 과정에 어떠한 영향을 미치는지 심층적으로 파악하는 것이 필요하다고 보았다.

## 2. 연구방법 및 절차

### 가. 연구 대상

본 연구는 서울에 위치한 A 초등학교 5학년 1개 반을 대상으로 실시하였다. 연구에 참여한 집단의 구성은 남학생 12명, 여학생 7명으로 전체 학생은 19명이다. 학생들은 대부분 주변 아파트 단지에 거주하고 있어 가정의 경제적 수준이 비슷한 편이고 수학 교과에 대한 학생들의 전반적인 학업 성취도는 중상 정도이고 개인별로 수준의 차이가 있는 편이다. A 초등학교에서는 5학년을 대상으로 소프트웨어 교육을 시행하고 있어 학생들이 소프트웨어 관련 활동에 높은 흥미를 보이고 기기를 조작하는 능력이 어느 정도 형성되어 해당 학급을 선정하게 되었다. 또한 본 연구자는 연구 집단의 담임교사로 학생들과 태블릿PC를 다루는 활동을 자주 진행한 경험이 있고 초등수학교육을 전공하였기에 해당 수업을 진행하고 결과를 분석하기 적합하다고 보았다.

초등학교 저학년에 비해 고학년 학생들은 도형 문제에 대해 특별한 사고 과정을 거치지 않고 수동적으로 반응하며, 이는 학생들이 수업 시간에 배우는 수학의 내용과 현실적으로 접하게 되는 실생활의 문제 상황을 별개로 인식할 뿐 아니라 학생들 나름대로 다양한 방법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는 수학적 사고 또한 향상시키기 어렵다고 판단된다(김유진, 2007). 그렇지만 5-6학년군 도형 영역의 개념은 도형을 직접 다루는 경험으로부터 생성된 공간 감각을 바탕으로 수학적 소양을 함양할 수 있어야 하므로(교육부, 2019a) 학생들이 도형을 능동적으로 구성하고 다양한 방법으로 문제를 해결하는 것이 중요하다. 특히 학생들이 소프트웨어를 활용하면 지필 환경에서는 하기 어려운 조작을 쉽게 할 수 있고 불변하는 도형의 성질을 이해할 수 있으므로 초등학교 고학년인 5학년 학생들에게 GeoGebra를 활용한 학습 경험을 제공하여 도형을 능동적으로 구성해보고 귀납적 추론 능력과 시각화의 함양을 유도할 수 있다고 판단하여 해당 학년과 단원을 선정하였다.

### 나. 연구 설계

본 연구의 연구 단계와 시기별 연구 내용은 <표 II-5>와 같다.

<표 II-5> 연구 단계 및 시기

연구 단계	연구 내용	연구 시기
예비 단계	연구 주제 설정, 연구 대상 설정, 선행연구 검토	2022. 5. ~ 2022. 6
계획 단계	합동과 대칭 수업 개발, 최종 분석 도구 설정	2022. 7. ~ 2022. 9
적용 단계	탐구형 소프트웨어를 활용한 수업 실행 및 자료 수집	2022. 10.
결과 분석 및 논문 작성	연구 자료 분석 및 결과 해석, 연구 결론 및 제언 도출	2022. 10. ~ 2022. 12.

수업의 설계를 위해 합동과 대칭 단원의 차시별 학습 내용과 탐구형 소프트웨어의 적용 방안을 정리한 내용은 <표 II-6>과 같다. 탐구형 소프트웨어의 적용 가능성을 높이고자 기존 교과서의 학습 내용과 흐름을 최대한 반영하였고 학생들이 GeoGebra 소프트웨어를 처음 접하기 때문에 기본적인 기능을 익히는 오리엔테이션 차시를 단원 도입에 추가하였다. 또한 기존 9차시인 ‘얼마나 알고 있나요?’와 10차시 ‘탐구 수학’ 차시의 순서를 변경하여 소프트웨어를 활용한 활동을 연속적으로 진행한 후 배운 내용을 마지막에 정리할 수 있도록 하였다.

<표 II-6> GeoGebra를 활용한 합동과 대칭 단원 수업 전개

차시	주제	GeoGebra를 활용한 학습 내용
1	단원 도입	- GeoGebra 기능 오리엔테이션: 활용되는 도구 기능 익히기, 여러 가지 도형 그리기
2	도형의 합동	- 모양과 크기가 같은 도형을 찾는 방법 알기 - GeoGebra를 통해 완전히 겹치는 도형 찾기
3	합동인 도형의 성질	GeoGebra를 통해 - 합동인 도형의 성질 추측하기 - 서로 합동인 두 도형에서 대응변의 길이와 대응각의 크기 측정하기 - 합동인 도형의 성질을 바탕으로 서로 합동인 도형 그리기
4~5	선대칭도형과 그 성질	GeoGebra를 통해 - 반으로 접었을 때 완전히 겹치는 도형을 찾고 선대칭도형의 개념 알기 - 선대칭도형의 성질 추측하고 측정하기 - 선대칭도형의 성질을 바탕으로 선대칭도형 그리기
6~7	점대칭도형과 그 성질	GeoGebra를 통해 - 돌렸을 때 완전히 겹치는 도형을 찾고 점대칭도형의 개념 알기 - 점대칭도형의 성질 추측하고 측정하기 - 점대칭도형의 성질을 바탕으로 점대칭도형 그리기
8	[도전 수학] 선대칭도형 완성하기	- 대칭축의 한쪽을 그려 선대칭도형 그리기 문제 만들기 - 친구들이 만든 문제 해결하기
9	[탐구 수학] 대칭이 되는 것 찾아보기	- 생활 속에서 대칭인 것 찾아보기 - GeoGebra를 통해 대칭인 사물 표현하기
10	얼마나 알고 있나요?	- 배운 내용을 바탕으로 문제 해결하기

본 단원의 학습 내용은 학생들이 다양한 예시를 통해 합동, 대칭의 개념을 이해하고 성질을 탐색한 후 이를 바탕으로 합동, 대칭인 도형을 그려보는 것이다. 따라서 합동과 대칭 개념 형성의 핵심이 되는 2~7차시의 내용을 류성림(2001)이 제시한 유형 중 학생 중심의 파일 제시형과 학생 중심의 작도 체험형으로 수업을 전개하였고 이를 정리한 내용은 <표 II-7>, <표 II-8>과 같다. 각 차시별 수업의 흐름은 교수·학습 방법에 따라 다르게 진행되었다. 차시의 전반부에 해당하는 도형의 개념과 성질 이해는 교사가 다양한 도형의 예시를 제시하고 학생들이 주어진 도형을 직접 조작하여 스스로 개념과 성질을 탐색할 수 있는 학생 중심의 파일 제시형으로 활동을 전개하였다. 또한 학생들이 다양한 예시를 통해 도형의 개념과 성질을 추론하는 과정에서 귀납적 추론과 관련이 매우 밀접하다는 점을 고려하여 귀납 추론 학습 모형을 적용하였다. 이때 교사는 합동, 대칭에 해당하는 다양한 도형을 제시하고 학생들이 소프트웨어의 각 도구를 자유롭게 활용하여 추론을 할 수 있도록 도움을 주는 역할을 하였다. 차시의 후반부에 해당하는 도형 그리기는 도형의 성질을 이용하여 학생들이 직접 도형을 작도하고 그 관계를 탐색할 수 있는 학생 중심의 작도 체험형으로 활동을 전개하였다. 또한 앞에서 학습한 도형의 개념과 성



질을 바탕으로 학생들이 직접 합동과 대칭인 도형을 그려야 하므로 문제 해결 학습 모형을 작도의 과정에 맞게 변형하여 적용하였고 이는 시각화와 관련이 있다고 보았다. 이때 교사는 모눈 칸이 있는 입력 창에서 학생들이 도형을 자유롭게 그리고 조작할 수 있도록 도움을 주는 역할을 하였다.

<표 II-7> GeoGebra를 활용한 학생 중심의 파일 제시형 교수·학습 형태

학생 중심의 파일 제시형		
귀납적 추론 능력		
차시	학습 내용	각 차시 수업 단계
2	도형의 합동 개념 이해	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">사례 관찰·실험</div> <span>→</span> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">추측 하기</div> <span>→</span> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">추측의 검증</div> <span>→</span> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">일반화 및 정당화</div> </div>
3	합동인 도형의 성질 탐색	
4-5	선대칭도형의 개념 이해	
	선대칭도형의 성질 탐색	
6-7	점대칭도형의 개념 이해	
	점대칭도형의 성질 탐색	

<표 II-8> GeoGebra를 활용한 학생 중심의 작도 체험형 교수·학습 형태

학생 중심의 작도 체험형		
시각화 양상		
차시	학습 내용	각 차시 수업 단계
3	합동인 도형 그리기	<div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center; gap: 10px;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">주어진 조건의 이해</div> <span>→</span> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">작도 계획의 수립</div> <span>→</span> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">작도 실행</div> <span>→</span> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px;">반성</div> </div>
5	선대칭도형 그리기	
7	점대칭도형 그리기	

**다. 자료수집 및 분석 방법**

본 연구에서 활용한 자료수집 및 분석 방법은 다음과 같다. 학생들의 사고 과정을 파악하기 위해 GeoGebra를 활용한 학생 산출물을 중심으로 자료를 수집하였다. 이때 학생들의 사고 과정을 구체적으로 분석하고 자료 분석의 타당도와 신뢰도 확보를 위해 자신의 활동 과정을 되도록 지우지 않고 최대한 탐구형 소프트웨어에 표현하도록 하였다. 그리고 학생들이 스스로 추론하고 검증한 내용, 도형을 생성해낸 방법 등을 효과적으로 파악하기 위해 활동마다 서술형 문항을 두어 학생들이 자기 생각을 구체적으로 나타내도록 하였다. 또한 복수의 자료 수집 방법을 통한 삼각검증법을 활용하였다. 따라서 학생들이 생성해낸 활동 산출물과 함께 수업 중 이루어진 학생 인터뷰와 수업 녹화 자료, 수업을 마친 후 학생들이 작성한 자기보고서, 교사의 관찰 일지를 참고하여 학생들의 귀납적 추론 능력과 시각화 과정을 분석하였다. 다음으로 본 연구의 타당성 향상을 위해 동료 검토법을 활용하였다. 이에 따라 자료 분석 과정에서 초등교육 전공의 현직 교사 3명을 대상으로 수집한 자료와 연구자의 분석 결과를 공유하고 자료의 분석과 해석에 대한 검토를 요청하여 논의하는 과정을 거쳤다. 이러한 과정을 바탕으로 자료 분석의 타당도와 신뢰도를 확보하고자 하였다.

구체적인 분석 도구를 살펴보면, 귀납적 추론 능력을 분석하기 위해 GeoGebra를 활용한 학생 산출물을 살펴 보았고 추가적인 탐색이 필요한 경우 학생들의 자기보고서, 교사의 관찰 일지나 수업 녹화 자료를 활용하였다. 분석을 위해 전평국 외(2002)가 제시한 귀납적 추론 능력 평가 범주와 평가 관점을 바탕으로 분석 틀을 마련하였다. 전평국 외(2002)는 각 평가 범주에 따라 평가 단계를 4단계로 나누었고 귀납적 추론에서 요구되는 평가 범주인 자료수집, 규칙 찾기, 일반화라는 사고 기능에 대한 증거를 얻을 수 있으면 학생들의 귀납적 추론 능력을 이해할 수 있는 것으로 판단하였다. 본 연구의 수업은 학생들이 제시된 사례를 관찰하고 조작해 도형의 개념과

성질을 추측, 검증하여 일반화하는 과정이 중심이므로 ‘규칙 추측’과 ‘일반화’ 범주에 대한 평가를 세분화하는 것이 적절하다고 판단하였다. 이러한 기준에 따라 GeoGebra 환경에서 학생들의 귀납적 추론 능력을 분석하기 위한 분석 틀은 <표 II-9>와 같다. ‘규칙 추측’ 범주의 분석 틀은 <표 II-1>의 평가 단계를 학습 내용에 맞게 수정하였다. 또한 ‘일반화’ 범주의 분석 틀은 도형 영역의 특성을 반영하고자 Seah와 Home(2020)의 기하학적 추론의 단계 중 연역 추론에 해당하는 5수준을 제외한 나머지 수준을 바탕으로 평가 내용을 수정하였다. 구체적으로 살펴보면, 0수준의 평가 내용은 ‘시각적 추론’을 바탕으로 도형의 개념, 성질과 관련이 없는 시각적 특징을 나열하는 수준으로, 1수준의 평가 내용은 ‘기술적 추론’을 바탕으로 비형식적 언어를 사용하여 도형에 관해 설명하는 수준으로 수정하였다. 2수준의 평가 내용은 ‘분석적 추론’을 바탕으로 도형의 기본 성질을 이용한 설명을 하였지만 온전한 일반화는 아닌 수준으로, 3수준의 평가 내용은 ‘관계-추론 성질 기반 추론’을 참고하여 GeoGebra에서의 분석 결과를 바탕으로 도형의 개념과 성질을 정확하게 추론한 수준으로 수정하였다. 또한 위 분석 틀에 따라 각 차시의 첫 번째 활동 결과물을 ‘규칙 찾기’로, 활동이 끝난 후 정리한 결과물을 ‘일반화’로 보고 각 차시별로 학생들의 귀납적 추론이 어느 단계에 속하는지 분석하였다. 그 후 학생들의 수준이 어떻게 변화하는지 파악하고 자 각 차시의 수준을 비교하여 변화의 양상을 해석하였다.

<표 II-9> GeoGebra 환경에서의 귀납적 추론 능력 수준 분석 틀

평가 범주	평가 관점	수준	평가 단계
규칙 추측	* 자료 분석 능력 (비교, 대조, 분류) * 규칙의 정확성 * 규칙의 일반성	3	GeoGebra의 다양한 기능을 활용하여 주어진 도형을 분석하여 도형의 개념과 성질을 정확히 추측함
		2	- GeoGebra의 다양한 기능을 활용하여 도형을 분석했지만 도형의 개념과 성질에 대한 일반성, 정확성이 부분적으로 부족함 - 일반화할 수 있는 도형의 개념과 성질을 정확히 추측했지만 GeoGebra에서의 충분한 자료 분석이 이루어지지 않음
		1	GeoGebra를 활용하는 자료 분석 능력을 부분적으로 보여주는 규칙을 정확히 찾음
		0	시도하지 않았거나 자료 분석 능력과 관련 없는 단순한 규칙을 찾음
일반화	* 일반성 도출 * 수학적 기호, 문자, 수식 사용 * 정확성 * 간결성	3	GeoGebra에서의 분석 결과를 바탕으로 도형의 개념과 성질을 모두 정확하게 설명함
		2	GeoGebra에서의 분석 결과를 바탕으로 도형의 기본 성질을 이용한 일반화를 시도하였으나 부분적으로 부족함
		1	일반적인 성질을 나타내지 못하였으나 비형식적 언어를 사용해 성질을 나타내려는 능력이 부분적으로 보임
		0	시도하지 않았거나 도형의 개념, 성질과 전혀 관련이 없는 시각적 특징을 나열함

시각화 구성 요소의 양상을 분석하기 위해 주로 소프트웨어를 통해 저장한 학생들의 도형 그리기 결과물을 활용하였고 추가적인 탐색이 필요한 경우 학생들의 자기보고서, 교사의 관찰 일지나 수업 녹화 자료를 활용하였다. 이러한 자료를 바탕으로 시각화 구성 요소의 분석을 위한 도구로는 김수연(2017)이 제시한 시각화 과정의 양상을 바탕으로 기본적인 분석 틀을 마련하였다. 위 분석 틀에서 제시된 요소를 바탕으로 ‘대분류’를 먼저 생성한 후 자료를 분석하였고 학생들의 결과물을 바탕으로 중분류와 소분류의 내용을 선정하여 구체적인 범주를 마련하였다. GeoGebra 환경에서의 시각화 구성 요소에 대한 구체적인 범주는 <표 II-10>과 같다. 학생들이 합동과 대칭에 대한 개념과 성질을 추론한 후 작도의 과정에 따라 조건에 맞는 도형을 직접 그려보는 활동이 진행

되었고 탐구형 소프트웨어에서 드러난 학생들의 활동 과정과 결과물을 토대로 분석 틀을 적용해 각 차시에서 나타난 시각화 구성 요소의 양상을 분석하였다. 우선 ‘대상’에 해당하는 ‘외적 표상’에 대해서는 학생들이 외적 이미지를 어떻게 표현했는지를 보았고 이는 학생들이 그린 도형의 형태를 중심으로 분석하였다. 또한 ‘외적 표상 생성’과 관련하여 학생들이 탐구형 소프트웨어의 어떤 도구를 활용하여 표상을 생성하였는지를 중심으로 분석하였다. ‘과정’ 영역에 해당하는 ‘외적 표상 변형 및 조작’에 대해서는 ‘행동을 통한 변형 및 조작’의 경우 반복적으로 지우고 그리는 행동이나 태블릿 기기를 직접 돌리는 행동이 관찰되었는지를 중심으로 보았다. ‘GeoGebra 기능을 활용한 변형 및 조작’의 경우 학생들이 어떤 기능을 활용하여 외적 표상을 변형하고 조작하였는지를 중심으로 보았고 학생들이 실제로 활용한 기능을 바탕으로 소분류 코드를 수정하였다. ‘공간 능력’은 학생들의 활동에서 ‘정신적 회전’이 어떻게 나타나는지, 이는 대상, 과정 영역과 어떠한 관련이 있는지를 분석하였다.

<표 II-10> 시각화 구성 요소에 대한 범주화

대분류	중분류	소분류	설명
외적 표상	그림	현실적 그림	그림의 형태인 표상
	도형	원	원의 형태인 표상
		삼각형	직각삼각형, 정삼각형 등 삼각형의 형태인 표상
		사각형	정사각형, 직사각형, 평행사변형 등 사각형의 형태인 표상
		오각형	오각형의 형태인 표상
		육각형	육각형의 형태인 표상
		복잡한 도형	조건에 맞는 도형을 변이 7개 이상인 다각형, 오목다각형 등 복잡한 형태로 표상
	오류가 포함된 표상	오류가 포함된 표상	문제에 대한 이해가 잘못되었거나 오류가 포함된 도형을 나타낸 표상
	외적 표상 생성	펜 그리기	GeoGebra에서 펜 도구를 이용해 외적 표상 생성
		원 그리기	GeoGebra에서 중심이 있고 한 점을 지나는 원을 이용해 외적 표상 생성
		정다각형 그리기	GeoGebra에서 꼭짓점의 개수를 입력하여 정다각형 생성
		다각형 그리기	GeoGebra에서 각 꼭짓점을 선택해 다각형 생성
	외적 표상 변형 및 조작	행동을 통한 변형 및 조작	반복
기기 조작			자신의 기기를 직접 돌리는 등 기기 자체를 조작하는 행동
GeoGebra 기능을 활용한 변형 및 조작		끝기에 의한 조작	GeoGebra에서 마우스를 이용해 점이나 도형을 드래그하는 조작
		보조선에 의한 조작	GeoGebra에서 보조선(ex. 수직선, 모눈 칸)에 의한 조작
		측정 기능을 활용한 조작	GeoGebra에서 선분의 길이, 각의 크기를 활용한 조작
		대칭을 활용한 조작	GeoGebra에서 직선/점에 대한 대칭 기능을 활용한 조작
공간 능력	공간시각화 능력	정신적 회전	역동적인 정신적 이미지를 생성하고 움직이는 형상을 시각화하는 능력

### III. 연구 결과 및 논의

본 연구는 ‘합동과 대칭’ 단원에서 탐구형 소프트웨어를 활용한 수업을 했을 때 학생들의 귀납적 추론 능력과 시각화 양상이 어떻게 나타나는지 분석하고자 하였다. 학생들이 탐구형 소프트웨어를 활용하여 합동과 대칭이라는 개념을 형성한 차시는 2차시부터 7차시까지로 이 과정에서 GeoGebra에 기록된 학생들의 활동 과정과 결과물이 귀납적 추론 능력과 시각화 양상을 분석하는 가장 중요한 자료로 활용되었다. 추가적인 분석이 필요한 경우 수업 녹음/녹화 자료, 수업 중 진행된 학생 인터뷰, 학생들의 자기보고서, 교사의 관찰 일지 등을 활용하였다. 이러한 분석을 바탕으로 귀납적 추론 능력의 수준과 시각화 구성 요소의 양상을 해석한 결과는 다음과 같다.

#### 1. 귀납적 추론 능력 수준 분석

학생들의 귀납적 추론 능력의 수준을 파악하기 위해 각 차시에서 활동한 결과를 바탕으로 구체적인 차시별 학생들의 귀납적 추론 능력의 양상은 <표 III-1>과 같다.

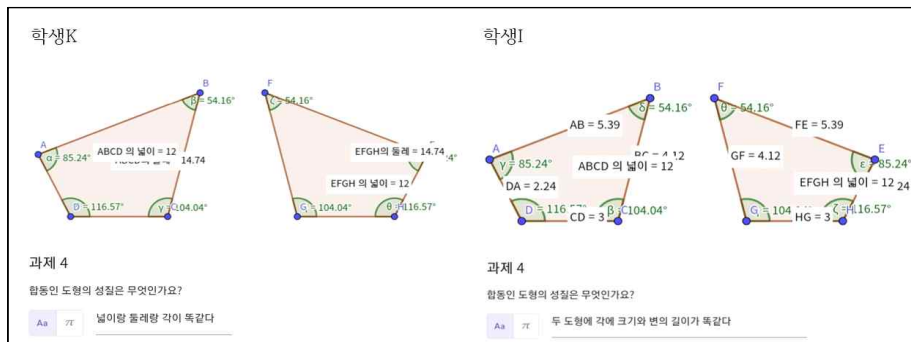
<표 III-1> 차시별 귀납적 추론 능력 수준의 학생 수

	규칙 추측				일반화			
	3수준	2수준	1수준	0수준	3수준	2수준	1수준	0수준
합동 개념	10명	4명	4명	1명	9명	7명	2명	1명
합동 성질	4명	10명	4명	1명	9명	7명	3명	0명
선대칭 개념	9명	7명	3명	0명	8명	6명	5명	0명
선대칭 성질	10명	5명	4명	0명	13명	3명	2명	1명
점대칭 개념	12명	5명	2명	0명	14명	3명	2명	0명
점대칭 성질	9명	8명	2명	0명	8명	9명	2명	0명

2차시의 경우 탐구형 소프트웨어를 활용한 귀납적 추론을 처음 경험하는 차시임에도 불구하고 3수준의 학생이 영역별로 각각 10명, 9명으로 대부분의 학생들이 큰 어려움 없이 합동의 개념을 추측하고 정리하는 모습을 보였다. 이는 합동의 개념이 선대칭도형이나 점대칭도형 개념에 비해 복잡하지 않고 탐구형 소프트웨어에서 도형을 직접 움직이고 겹쳐 보는 조작이 합동의 개념과 밀접한 관련이 있기 때문이라고 보았다. 반면 ‘규칙 추측’에서 2수준 학생들은 개념을 추측하였지만 모두 탐구형 소프트웨어의 기능을 활용한 자료 분석이 잘 이루어지지 않았고 ‘일반화’에서의 2수준 학생들은 ‘겹쳤을 때 크기가 같다’와 같이 겹치거나 포개는 상황에서 무엇이 같은지 정확하게 서술하지 못해 정확성과 일반성이 부족한 추론을 하였다. 합동의 개념을 정확하게 추론하지 못한 1수준 이하의 학생들은 무엇이 같은지 정확하게 설명하지 못한 경우가 대부분이었다. 즉, 학생들이 탐구형 소프트웨어를 활용하여 도형을 직접 겹치거나 포개는 조작 활동을 통해 합동의 개념에 대해 쉽게 추측할 수 있지만, 개념을 정확하게 일반화하기 위해서는 추론 결과를 논리적으로 정리하여 일반화하는 능력이 추가로 필요했다.

3차시의 경우 두 가지 성질을 모두 정확하게 발견하여 3수준에 도달한 학생이 합동의 개념에 비해 적은 편이다. 특히 ‘규칙 추측’에서는 2수준의 학생이 가장 많았는데, 처음으로 탐구형 소프트웨어의 ‘측정’ 기능을 활용한 차시이므로 도형을 조작할 때 측정 기능을 한 가지만 활용하거나 정확하지 않은 조작을 한 학생이 많았기 때문이다. 한편, 귀납적 추론 수준이 높은 학생은 탐구형 소프트웨어의 측정 기능을 활용하여 도형을 분석하였고 그 결과를 정확하게 성질로 설명하였다. 또한 교과서에서는 길이와 각도가 같다는 성질만을 제시하지만, 탐구형 소

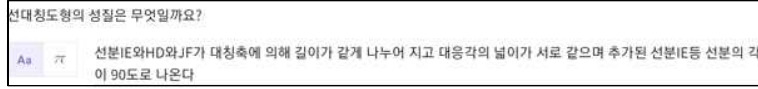
프트웨어로는 도형의 넓이, 둘레를 바로 측정할 수 있는 기능이 있어 [그림 III-1]과 같이 학생들이 합동인 도형은 넓이와 둘레가 같다는 성질을 추가로 발견하기도 하였다. 이를 바탕으로 귀납적 추론 능력이 높은 학생들은 합동인 도형을 관찰하고 탐구형 소프트웨어의 기능을 활용한 조작을 통해 ‘무엇’이 같은지 정확하게 분석하였으며 추가적인 성질도 발견할 수 있음을 알 수 있다.



[그림 III-1] 합동의 성질 차시 학생들의 추측, 일반화 활동 사례

4차시의 경우 2수준 이상의 학생들이 탐구형 소프트웨어에서 도형을 직접 접어보는 조작을 통해 선대칭도형의 개념이 접는 행위나 직선을 기준으로 나누는 행동과 관련이 된다는 것을 쉽게 발견하였다. 3수준에 해당하는 학생들은 조작 활동을 바탕으로 도형의 정의를 정확하게 추측하여 일반화하였고 이는 조작 활동을 통해 자신이 알고 있는 개념과 용어를 활용해 선대칭도형의 개념을 정확히 일반화할 수 있음을 보여준다. 합동의 개념 차시와는 다르게 ‘규칙 추측’에서 2수준에 해당하는 학생들은 모두 도형의 분석에서는 오류가 나타나지 않았지만, 조작 활동과 관련된 ‘접는다’라는 내용이 없이 단순히 ‘나눈다’라고 언급하거나 무엇을 기준으로 나누는지에 대한 설명이 부족한 경우가 대부분이었다. 또한 1수준의 학생들 수를 고려하면 도형을 조작하고 성질을 추측하는 ‘규칙 추측’보다 검증을 통해 개념을 일반화하여 서술하는 ‘일반화’에서의 귀납적 추론 수준이 낮은 편이다. 이를 바탕으로 학생들이 도형을 접어보는 활동을 소프트웨어에서 쉽게 조작했지만, 자신의 활동을 바탕으로 개념을 정확한 용어로 일반화하는 데 어려움을 겪었다고 보았다.

5차시의 경우 앞선 차시들에 비해 3수준에 해당하는 학생들이 늘었고 특히 ‘일반화’ 영역에서 3수준에 도달한 학생들이 크게 늘었다. 이와 달리 2수준에 해당하는 학생들은 도형의 분석이 제대로 이루어지지 않은 경우, 성질과 개념을 혼동한 경우, 그리고 ‘대응각이 같다’라는 하나의 성질만을 발견한 경우로 나눌 수 있었다. 1수준 이하의 학생들은 탐구형 소프트웨어의 기능 활용이 정확하지 않았고 단순히 ‘포개진다’, ‘겹친다’라고 설명한 경우가 많았다. 즉, 도형의 성질 추론에서 학생들이 탐구형 소프트웨어의 다양한 기능을 정확하게 사용할 수 있는 수준에 도달하였다면 귀납적 추론 능력도 높아질 수 있다고 보았다. 또한 3수준의 학생 중 [그림 III-2]과 같이 대응점끼리 이은 선분과 대칭축과의 관계를 서술한 학생들은 4명에 그쳤는데, 탐구형 소프트웨어에서의 조작을 통해 선대칭도형의 성질을 모두 추론할 수 있도록 하기 위해서는 탐구형 소프트웨어를 통해 대응점끼리 이은 선분과 대칭축과의 관계를 살펴볼 수 있도록 도움을 주는 교사의 안내 혹은 발문이 필요하다고 보았다.



[그림 III-2] 선대칭도형의 성질 일반화 학생 B의 활동 예시

6차시의 경우 탐구형 소프트웨어를 활용하여 점대칭도형의 개념을 정확히 추론한 3수준의 학생이 많이 증가하였다. 이는 학생들이 탐구형 소프트웨어를 활용한 귀납적 추론을 계속해서 경험했기 때문이라고 판단하였다. 또한 <표 III-2>에서 드러난 바와 같이 학생들이 조작 활동을 신기해하며 1도에 해당하는 각도까지 세밀하게 조정하면서 도형을 분석하는 모습을 관찰할 수 있었다. 앞선 차시들에서 도형을 겹쳐 보거나 집어보는 조작 활동은 지필 환경에서도 쉽게 접할 수 있지만 각도를 조절하여 한 점을 기준으로 여러 도형을 돌려보는 조작 활동은 탐구형 소프트웨어에서 효과적으로 구현할 수 있어 학생들의 흥미를 높였고 이를 점대칭도형의 개념과 관련을 지을 수 있도록 도움을 주었다. 따라서 도형에 대한 개념을 귀납적으로 추론하여 정확하게 일반화하기 위해서는 학생들이 흥미를 갖고 많은 시도를 통해 도형을 관찰, 조작하고 자신의 조작 활동을 설명하도록 하는 것이 중요하다고 보았다. 반면 2수준의 학생들은 180도라는 각도를 찾지 않고 단순히 돌렸을 때 같은 도형이라고 설명한 경우, 반대로 180도 돌린다는 내용은 있지만 원래 도형과 완전히 겹친다는 내용이 부족한 경우로 나눌 수 있었다. 귀납적 추론 수준이 1수준에 그친 학생들은 조작 활동을 하였지만, 이를 도형의 개념과 연결시키지 못하거나 개념과 성질을 혼동하여 점대칭도형의 성질에 해당하는 일반화를 하였다.

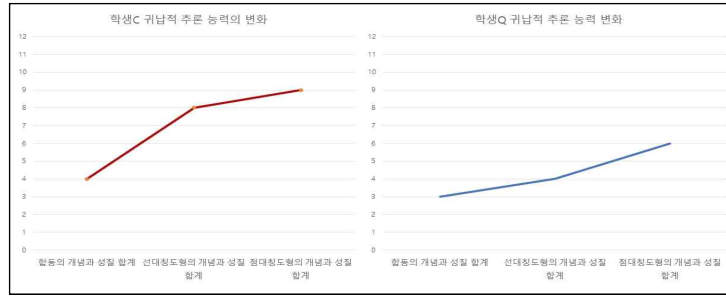
<표 III-2> 점대칭도형의 조작 활동과 관련된 구체적인 사례

학생 D의 자기보고서	다양한 선, 도형들을 그리는게 정말 재미있었다. 3번째는 마지막으로 수업한 점대칭도형을 할때에는 내가 90°, 180°를 각도를 돌리면 도형이 같이 돌아간다는게 너무 신기했다. 마
수업 녹화 자료에서 드러난 학생들의 대화 내용	학생 B: 359도 됐다! 우와! 학생 S: 1도가 제일 어려워. 학생 B: 1도 되는데? 72도도 한번 해봐. 학생 R: 240도로 돌리면 3번 (도형)도 돼.

7차시의 경우 3수준의 학생들은 탐구형 소프트웨어의 기능을 활용하여 대응변의 길이와 대응각의 크기가 같다는 것을 정확하게 정리하였다. 이때 선대칭도형의 성질 차시와 비교해서 대칭점끼리 이은 선분과 대칭의 중심과의 관계를 활용하여 대칭의 중심을 정확히 찾은 학생은 9명, 추가로 그 관계를 성질로 서술한 학생들은 6명으로 다소 증가하였다. 이는 자신이 추측한 성질을 검증하는 과제에서 이전 차시와는 달리 학생들에게 점대칭도형의 대칭의 중심을 찾아 표시하라는 발문이 추가되었기 때문이라고 보았다. 또한 선대칭도형의 성질에 비해 2수준의 학생이 많이 증가한 것을 볼 수 있다. 2수준의 학생들의 경우 대부분 대응변의 길이와 대응각의 크기가 같다는 것을 탐구형 소프트웨어의 기능을 활용하여 정확하게 나타내었지만, 성질과 개념을 혼동하여 점대칭도형의 개념을 성질로 서술한 경우가 많았다. 1수준의 학생들 또한 변의 길이나 각의 크기를 측정하는 조작 활동이 정확하지 않았고 ‘돌려서 겹친다’와 같이 개념과 관련된 내용을 정리하였다.

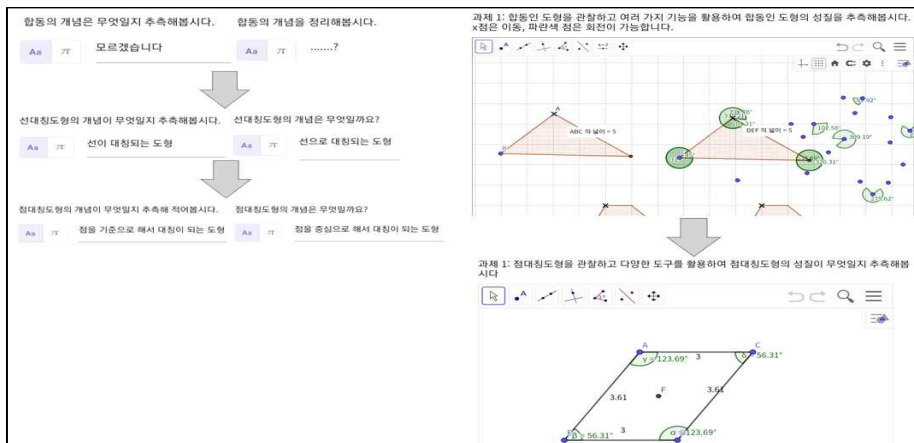
지금까지 살펴본 차시별 귀납적 추론 수준을 바탕으로 합동의 개념과 성질, 선대칭도형의 개념과 성질, 점대칭도형의 개념과 성질에서의 학생별 귀납적 추론 수준을 살펴보면, 각 차시가 진행됨에 따라 학생들의 귀납적 추론 능력이 비슷한 수준을 유지하고 있음을 알 수 있다. 이는 본연구가 비교적 단기간에 학생들이 한 단원의 내용만을 학습한 것이기 때문이라고 보았다. 특징적인 것은 합동의 개념과 성질에 대한 귀납적 추론 능력에서

낮은 수준을 보인 학생들이 시간이 지남에 따라 최종적으로 귀납적 추론이 일정 수준 이상으로 높아졌다는 것이다. 그중에서 비교적 낮은 수준으로 시작했지만 귀납적 추론 능력이 꾸준히 향상되어 처음 수준과 마지막 수준의 차이가 분명하게 나타난 학생 C와 학생 Q를 대상으로 구체적인 변화 양상을 살펴보고자 한다. 시간에 따른 두 학생의 귀납적 추론 수준의 변화 양상은 [그림 III-3]과 같다.



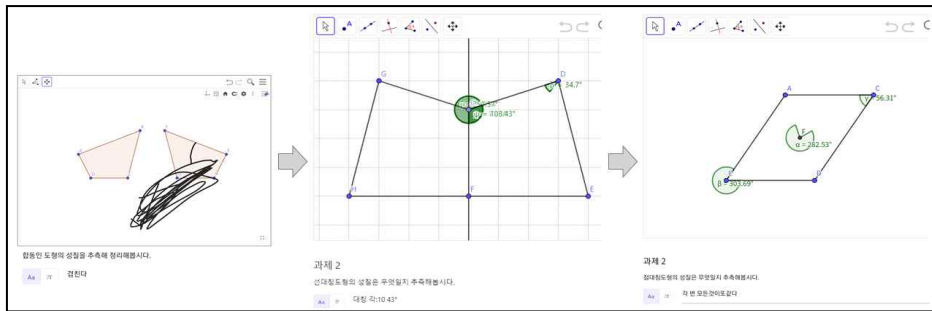
[그림 III-3] 학생 C와 학생 Q의 귀납적 추론 능력 수준의 변화

가장 변화의 폭이 큰 학생 C의 경우, 귀납적 추론을 처음 접하게 된 합동의 개념 차시에서 조작을 통해 합동인 도형을 찾는 데는 큰 어려움이 없었지만 이를 바탕으로 개념을 추측하는 과정에서 어려움을 겪고 답변을 작성하지 못해 [그림 III-4]와 같이 0수준에 해당하는 귀납적 추론이 나타났다. 이에 비해 선대칭도형의 개념에서는 일반적인 용어로 개념을 정리하고자 한 노력이 나타났고 점대칭도형의 개념에서는 '선이 대칭'이라고 정리한 이전 차시와는 달리 '점을 기준으로', '점을 중심으로'라는 용어를 사용해 조금 더 정확한 일반화를 하였음을 알 수 있다. 그렇지만 탐구형 소프트웨어의 기능을 활용하여 정확하게 개념을 추론해야 하는 3수준까지의 도달은 하지 못하였다. 또한 도형의 성질 추론은 개념에 비해 추론의 수준이 높았는데, 합동인 도형을 보고 성질을 추측하는 첫 활동에서는 [그림 III-4]와 같이 탐구형 소프트웨어의 기능 활용이 정확하지 않았지만, 이후의 차시에서는 정확하게 각도와 길이를 측정하면서 발견된 모습을 관찰할 수 있었다.



[그림 III-4] 개념 추론과 기능 활용에 대한 학생 C의 변화 사례

마찬가지로 귀납적 추론 수준이 낮은 편이었던 학생 Q의 경우, 특히 도형의 성질 추론 영역에서 [그림 III-5]와 같이 발전된 모습을 보였다. 합동의 성질 차시에서는 탐구형 소프트웨어의 기능을 제대로 활용하지 못하고 추론한 성질 또한 단순히 ‘겹친다’라고 정리했지만, 선대칭도형의 성질 차시에서는 각도 기능을 활용하고자 하는 노력이 드러났고 정확한 일반화는 아니었지만 대칭되는 각의 각도를 측정하여 성질을 추론하고자 하였다. 점대칭도형의 성질 차시에서는 이전보다 기능을 활용하는 조작이 더욱 정확해졌고 이를 바탕으로 각과 변이 같다는 성질을 추론해 정리하는 모습이 나타났다.



[그림 III-5] 도형의 성질 추론에 대한 학생 Q의 변화 사례

이처럼 귀납적 추론 수준이 낮았던 학생들에게서 수업을 거치면서 일반적인 용어로 설명하고자 하는 노력이 나타났고 탐구형 소프트웨어의 기능을 정확하게 활용하게 되어 일정 수준 이상의 귀납적 추론 능력이 나타났다. 이는 귀납적 추론 능력에서 탐구형 소프트웨어의 기능 활용이 중요한 역할을 한다는 것을 의미한다. 그리고 합동의 개념과 성질에서 추론의 수준이 높았다가 내려가는 모습을 보인 2명의 학생의 경우, 첫 차시부터 기능을 정확하게 활용하였지만 성질과 개념을 혼동하여 서술하였다는 특징이 있었다. 따라서 귀납적 추론 능력이 최종적으로 3수준에 도달할 수 있으려면 학생들이 탐구형 소프트웨어에서의 조작 활동을 바탕으로 정확한 용어를 사용한 일반적인 개념과 성질로 연결할 수 있어야 하고 개념과 성질을 서로 구분할 수 있어야 함을 알 수 있다. 특히 도형의 개념과 관련해서는 탐구형 소프트웨어를 통한 도형의 분석 활동을 자신의 용어로 정확하게 일반화하는 과정이 중요하고 이때 학생들이 흥미를 느끼고 여러 번의 시도를 통해 조작 활동을 경험하게 하는 것이 도움이 될 수 있다. 매 차시에서 3수준을 꾸준히 유지했던 학생 D와 학생 S의 자기 보고서를 살펴보면 <표 III-3>과 같이 교과서에서는 할 수 없었던 조작 활동에 큰 흥미를 느끼고 있음을 알 수 있다. 또한 도형의 성질과 관련해서는 탐구형 소프트웨어의 여러 기능을 정확하게 사용하여 추측과 검증을 하는 것이 중요하고 성질을 개념과 구분하고 모든 성질을 추론할 수 있도록 하는 교사의 도움이 필요하다고 볼 수 있다.

<표 III-3> 3수준 학생들의 자기보고서 사례

<p>지오지브라를 하면서 가장 먼저 가장 세게 느낀 것은 "너무 신기하다"이다. 신기한 이유 1번째는 태블릿으로 수학을 한다는 게 신기했고 두번째는 내가 수직선이나 대각형 등 다양한 선, 도형들을 그리는 게 정말 재미있었다. 3번째는 마</p>	<p>지오지브라에선 여러가지 활동을 할 수 있었는데 도리, 눈리, 각도측 재고, 길이도 재고, 넓이도 재고. 어쨌든 신기합니다 그냥 2D면서 도형이 움직이지 않는 지극한 재미 보는 것보다 훨씬 재밌어요, 스텝시간이 더 풀려진 것 같았습니. 키크도 뭐가 재미있어서 각하는 것 같아요(약간 욕망이네요).</p>
<p>[학생 D의 자기보고서]</p>	<p>[학생 S의 자기보고서]</p>

이를 종합해보면 다음과 같다. 첫째, 탐구형 소프트웨어를 활용하여 도형 영역을 학습하면 학생들이 스스로 개념과 성질을 추측할 수 있고 이는 탐구형 소프트웨어의 다양한 기능을 정확히 사용할 수 있게 되면서 발전할



수 있다. 둘째, 도형 개념과 성질을 학습할 때 학생들이 탐구형 소프트웨어의 여러 가지 기능을 활용하여 넓이나 둘레가 같다고 추론한 것과 같이 새로운 성질을 추론할 수 있도록 도움을 준다는 데 의의가 있다. 셋째, 탐구형 소프트웨어를 활용하여 도형을 조작하는 활동에 흥미를 느낄수록 여러 번의 시도를 통해 추측과 검증을 하고 더 정확한 공통적인 개념과 성질을 발견할 수 있어 귀납적 추론 능력 수준의 향상에 도움이 된다.

## 2. 시각화 양상 분석

학생들이 합동과 대칭에 대한 개념과 성질을 추론한 후 작도의 과정에 따라 조건에 맞는 도형을 직접 그려보는 수업이 진행되었고 탐구형 소프트웨어에서 드러난 학생들의 활동 과정과 결과물을 토대로 <표 II-9>의 분석 틀을 적용해 각 차시에서 나타난 시각화 구성 요소의 양상을 분석하였다.

3차시에서는 학생들이 추론한 합동의 성질을 바탕으로 합동인 도형을 어떻게 그릴지 계획하고 직접 도형을 그려보았다. 이때 학생들이 나타낸 구체적인 시각화의 구성 요소를 살펴보면, 탐구형 소프트웨어에 나타낸 외적 표상의 형태와 생성 방법은 <표 III-4>와 같다. 학생들이 생성해낸 외적 표상의 형태는 주로 삼각형과 사각형 모양이다. 이러한 외적 표상을 생성하는 탐구형 소프트웨어의 도구로는 다각형과 정다각형 그리기를 주로 활용하였다. 펜 기능을 활용한 학생들의 경우 정확히 똑같은 도형을 그리기 어렵기 때문에 오류가 포함된 표상을 생성한 것을 볼 수 있었다. 마찬가지로 원 그리기를 통해 원 모양을 표현한 학생들도 원의 크기를 똑같이 맞추는 과정에서 어려움을 겪어 오류가 포함된 표상을 생성하였다. 이를 바탕으로 탐구형 소프트웨어에서 외적 표상을 생성할 때 다각형, 정다각형 기능을 활용하면 원하는 도형을 정확하게 시각화하는 데 도움이 된다고 보았다.

<표 III-4> 합동 시각화 차시 학생별 외적 표상의 양상

외적 표상												
	그림	도형						오류	외적 표상 생성			
	그림	원	삼각형	사각형	오각형	육각형	복잡	오류 포함	펜	원	정다각형	다각형
학생A			○	○								○
학생B	○		○	○				○	○			○
학생C	○	○	○					○	○	○		○
학생D			○									○
학생E		○					○	○	○	○		○
학생F			○	○								○
학생G			○									○
학생H				○								○
학생I				○							○	○
학생J				○				○			○	
학생K			○	○	○						○	○
학생L				○							○	
학생M			○	○		○						○
학생N			○									○
학생O			○					○				○
학생P				○							○	
학생Q		○						○		○		
학생R			○	○								○
학생S			○									○
합계	2	3	12	11	1	1	1	6	3	3	5	15

다음으로 학생들의 외적 표상 변형 및 조작 과정, 공간시각화의 양상을 정리한 결과는 <표 III-5>와 같다. 이때 외적 표상 변형 및 조작 과정과 오류가 포함된 표상 간 관계를 파악하기 위해 오류가 포함된 표상의 여부도 함께 나타내었다. 우선 행동을 통한 변형 및 조작에서는 같은 형태의 도형을 여러 번 그리고 그중에서 합동인 도형을 찾는 반복 행동이 2명의 학생에게서 나타났지만, 오류가 포함된 표상을 생성하게 되었다. GeoGebra의 기능을 활용한 변형 및 조작에서 학생들이 가장 많이 활용한 조작 방법은 보조선 기능이었다. 이는 모는 칸과 같은 보조선이 평소 학생들이 지필 환경에서 도형을 그릴 때 가장 많이 활용되는 것이고 시각적으로 도형의 크기와 모양이 같은지 바로 파악할 수 있는 기능이기 때문이라고 판단하였다. 측정 기능은 학생들이 자신이 나타낸 표상의 정확한 수치를 표시해주는 기능이기 때문에 이 기능을 통해 도형을 변형하고 조작한 학생들에게는 오류가 포함된 표상이 나타나지 않았다. 또한 끌기 기능도 보조선과 마찬가지로 객관적인 수치가 기록되지 않아 오류가 포함된 표상이 나타나기도 하였다. 그렇지만 [그림 III-6]과 같이 끌기 기능을 활용하여 도형의 구성 요소인 점을 드래그하면서도 측정 도구를 함께 사용하면 정확한 시각화가 가능하였다.

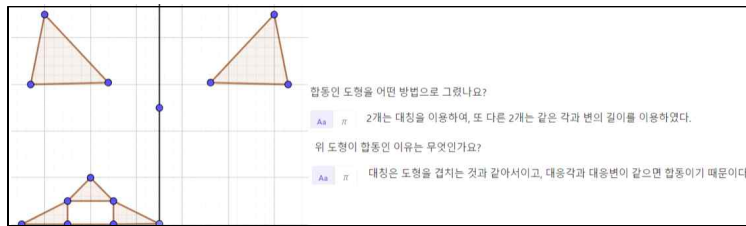
<표 III-5> 합동 시각화 차시 학생별 외적 표상 변형 및 조작, 공간 능력의 양상

	외적 표상		외적 표상 변형 및 조작					공간능력
	오류	오류 포함	행동		기능			공간시각화
			반복	기기 조작	끌기	보조선	측정	대칭
학생A						○		○
학생B	○				○			○
학생C	○					○		○
학생D						○		○
학생E	○					○		
학생F						○		○
학생G						○		○
학생H						○	○	
학생I					○	○	○	
학생J	○	○			○			
학생K							○	
학생L							○	
학생M						○		○
학생N						○	○	○
학생O	○					○		○
학생P					○			
학생Q	○	○						
학생R						○	○	
학생S						○		○
합계	6	2	0	4	13	6	1	10

탐구형 소프트웨어에 나타난 시각화 과정	교사와 학생의 대화에서 나타난 시각화 과정
<p>다각형1의 둘레 = 4000 다각형1의 넓이 = 1000000 다각형2의 둘레 = 4000 다각형2의 넓이 = 1000000 다각형2의 둘레 = 1000000 다각형2의 넓이 = 1000000 1000 90° 90° 90° 90°</p>	<p>교사: 도형을 어떻게 그렸어, 한번 보자.                  학생 I: (도형을 가리키며) <u>이거 일일이 맞췄어요.</u>                  교사: <u>각도랑 길이를 다 맞춘 거야?</u>                  학생 I: 네. 매우 힘들었어요. 3999.37이 나와서요.                  교사: 아, 그래서 그걸 직접 조절을 했구나.                  학생 I: 네.</p>

[그림 III-6] 합동 시각화에 대한 학생 I의 사례

다음으로 본 차시에서 나타난 학생들의 공간시각화 능력에 대해 살펴보면, 합동인 도형을 그릴 때 [그림 III-7]과 같이 머릿속으로 한 도형을 대칭 또는 회전시켜 서로 방향이 다른 합동인 두 도형을 나타냈으면 공간시각화 능력이 나타났다고 보았다. 이렇게 정신적 회전이 나타난 학생들은 총 10명으로 외적 표상의 형태는 모두 삼각형이 포함되었고 보조선 기능이 주로 활용했음을 알 수 있다. 한편, 보조선 기능뿐만 아니라 정신적 회전과 직접적인 관련이 있는 대칭 기능을 활용한 학생 S의 경우, [그림 III-7]과 같이 도형을 대칭시키는 조작을 하였다. 이는 공간시각화 능력과 관련이 높은 대칭 기능을 활용한다면 방향이 다르면서도 정확히 합동인 도형을 쉽고 정확하게 시각화할 수 있음을 나타낸다.



[그림 III-7] 합동 시각화에 대한 학생 S의 사례

5차시에서는 학생들이 추론한 선대칭도형의 성질을 바탕으로 선대칭도형을 어떻게 그릴지 계획하고 직접 도형을 그려보았다. 이때 학생들이 탐구형 소프트웨어에 나타난 외적 표상의 형태와 생성 방법은 <표 III-6>과 같다. 학생들이 생성해낸 외적 표상의 형태는 사각형이 가장 큰 비중을 차지하고 있었고 이전 차시와 다르게 복잡한 형태의 다각형을 나타낸 학생들이 많이 늘어났다. 이러한 표상을 생성하는 탐구형 소프트웨어의 도구로는 다각형 그리기를 주로 활용하였다. 펜 도구를 활용한 학생들의 경우 정확히 대칭인 도형을 그리기 어렵기 때문에 오류가 포함된 표상을 생성한 것을 볼 수 있었다. 반면 원 그리기를 활용하면 정확한 선대칭이 되기 때문에 오류가 나타나지 않았다. 이를 바탕으로 탐구형 소프트웨어에서 선대칭도형을 생성할 때 다각형, 정다각형 기능, 또는 원 그리기 도구를 활용하면 원하는 도형을 정확하게 시각화하는 데 도움이 된다고 보았다.

<표 III-6> 선대칭도형 시각화 차시 학생별 외적 표상의 양상

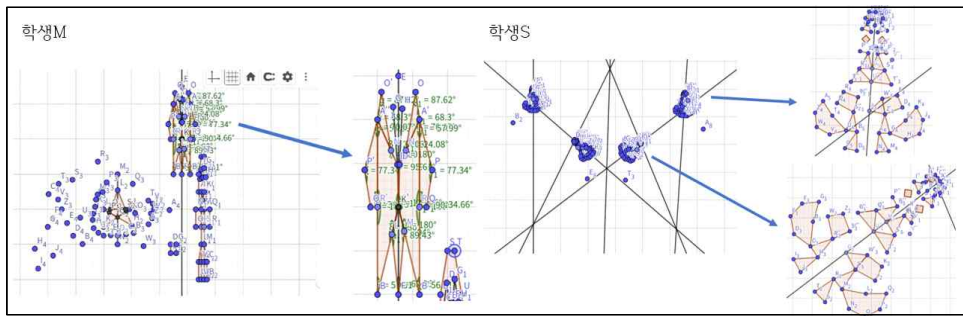
		외적 표상										
	그림	도형						오류	외적 표상 생성			
	그림	원	삼각형	사각형	오각형	육각형	복잡	오류포함	펜	원	정다각형	다각형
합계	1	2	4	10	1	1	6	6	4	2	3	15

다음으로 학생들의 외적 표상 변형 및 조작 과정, 공간시각화의 양상을 정리한 결과는 <표 III-7>과 같다. 우선 행동을 통한 변형 및 조작에서는 대칭이 될 때까지 도형과 대칭축을 반복해서 지우고 그린 반복 행동이 2명의 학생에게서 나타났고 모두 오류가 포함되었다. GeoGebra의 기능을 활용한 변형 및 조작에서 학생들이 가장 많이 활용한 방법은 앞 차시와 마찬가지로 보조선 기능이었다. 이는 모눈 칸이 평소 학생들이 지필 환경에서 쉽게 접했고 대칭축으로부터 같은 위치에 있는 점들을 표시하기 쉬운 기능이기 때문이라고 보았다. 정확한 수치를 기반으로 하는 측정 기능을 활용한 학생들은 대칭축과 선대칭도형을 정확하게 표현하였다. 특징적으로 선대칭도형 시각화에서 대칭을 활용한 조작이 6명의 학생에게서 나타났다. 이 기능은 점, 선, 도형을 정확하게 대칭시켜 주기 때문에 학생들이 다양한 선대칭도형을 자유롭게 조작할 수 있도록 도움을 주었다. 그중 2명의 학생은 [그림 III-8]과 같이 매우 복잡한 구조와 형태의 도형을 조작하였다. 이렇게 시각화 과정에서 대칭 기능을 활용하게

되면 지필 환경에서는 쉽게 하기 어려운 복잡한 구조의 외적 표상을 조작하는 것이 가능함을 알 수 있다.

<표 III-7> 선대칭도형 시각화 차시 학생별 외적 표상 변형 및 조작, 공간 능력의 양상

	외적 표상		외적 표상 변형 및 조작					공간능력
	오류	오류 포함	행동		기능			공간시각화
			반복	기기 조작	끝기	보조선	측정	대칭
합계	6	2	0	2	10	7	6	19



[그림 III-8] 선대칭도형 시각화에 대한 학생들의 사례

다음으로 본 차시에서 나타난 학생들의 공간시각화 능력에 대해 살펴보면, 선대칭도형을 그릴 때 기본적으로 도형을 머릿속으로 회전, 대칭시켜 선에 대해 대칭인지 확인하는 과정이 필요하므로 모든 학생에게서 정신적 회전이 나타났다고 보았다. 이러한 공간시각화의 유형은 크게 <표 III-8>과 같이 직선을 기준으로 한쪽 면을 그린 후 반대쪽을 그린 유형, 도형을 먼저 표현한 후 대칭축을 그린 유형으로 나뉘었다. 이때 그리기 도구로 도형을 먼저 그린 유형에서 대칭축의 위치가 잘못되어 오류가 나타나기도 하였고 대칭축을 기준으로 한쪽 면을 먼저 그리고 공간시각화 능력을 바탕으로 나머지 면을 그린 유형이 더 정확한 시각화를 할 수 있음을 알 수 있다.

<표 III-8> 선대칭도형에 나타난 공간시각화의 유형 사례

보조선 기능을 통한 공간시각화 사례	정다각형 그리기를 통한 공간시각화 사례
교사: 이거 어떻게 그렸어? 학생 B: 이거 '다각형'눌러서 이렇게 하고, 정해진 칸만큼... 반으로 나눈 거에서 정해진 칸만큼 띄워 가지고 그렸어요. 학생 G: 여기가 이렇게 되어 있으면 여기가 두 칸이니까 (반대쪽을 가리키며) 여기도 두 칸을 가고 여기도 밑에 두 칸 내려왔으니까 (반대쪽을 가리키며) 여기도 두 칸을 내려왔고.	학생 Q: (여러 개의 정사각형 모양을 이은 형태로 그림) 교사: 여기 대칭 어떻게 되지? 학생 Q: 음, (점을 가리키며) 애랑 애랑 만날 수 있으니까 여기를 쪽 이렇게 해주면 (대칭축을 그리며) 대칭이에요.

7차시에서는 학생들이 추론한 점대칭도형의 성질을 바탕으로 점대칭도형을 어떻게 그릴지 계획하고 직접 도형을 그려보았다. 이때 학생들이 탐구형 소프트웨어에 나타난 외적 표상의 형태와 생성 방법은 <표 III-9>와 같다. 특히 2명을 제외한 모든 학생이 사각형인 표상을 나타냈다는 점에서 점대칭인 도형을 나타낼 때 사각형의 형태를 쉽게 떠올린다는 것을 알 수 있다. 또한 이전 차시와 달리 복잡한 형태의 다각형을 나타낸 학생들이 줄어들었고 오류가 포함된 표상에서 다양한 유형의 오류가 나타났다. 이러한 외적 표상을 생성하는 탐구형 소프트웨어의 도구로는 모든 학생이 다각형 혹은 정다각형 기능을 활용하여 도형을 나타내었다. 펜 기능을 활용한 학

생들의 경우 모두 대칭의 중심이 정확하지 않은 오류가 포함된 표상을 생성한 것을 볼 수 있었다. 반면 원 그리기를 활용하면 대칭의 중심이 바로 표시되기에 오류가 나타나지 않았다. 이를 바탕으로 탐구형 소프트웨어에서 점대칭도형을 생성할 때 원 그리기 도구를 활용하면 정확한 시각화를 할 수 있고 대칭의 중심을 정확히 표현하기 위해서는 추가적인 조작이 필요함을 알 수 있다.

<표 III-9> 점대칭도형 시각화 차시 학생별 외적 표상의 양상

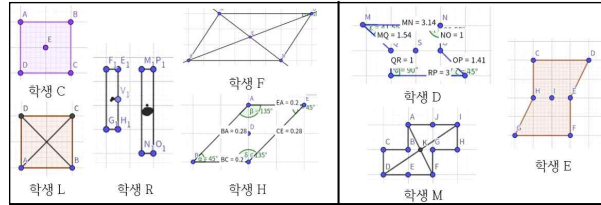
외적 표상												
	그림	도형						오류	외적 표상 생성			
	그림	원	삼각형	사각형	오각형	육각형	복잡	오류포함	펜	원	정다각형	다각형
합계	0	3	2	17	0	5	2	8	3	3	3	18

다음으로 학생들의 외적 표상 변형 및 조작 과정, 공간시각화의 양상을 정리한 결과는 <표 III-10>과 같다. 우선 행동을 통한 변형 및 조작에서는 대칭의 중심을 표시하기 위해 점을 반복해서 지우고 그린 반복 행동이 2명의 학생에게서 나타났고 모두 오류가 나타났다. 다음으로 이전 차시들과는 달리 학생들이 기기를 180도 돌리는 조작을 하여 모양을 기억한 뒤 다시 기기를 원래대로 돌려 도형을 완성하는 행동이 2명의 학생에게서 나타났다. GeoGebra의 기능을 활용한 변형 및 조작에서 학생들이 가장 많이 활용한 방법은 앞 차시와 마찬가지로 보조선 기능이었다. 특히 이전 차시들과 비교해서도 가장 많은 학생이 보조선 기능을 활용하였는데, 이는 칸의 수를 기준으로 도형을 점대칭이 되도록 쉽게 변형할 수 있기 때문이라고 보았다. 측정 기능을 통한 추가 조작이 나타난 학생은 6명으로 모두 점대칭도형을 정확하게 그렸지만, 대칭의 중심을 찾는 과정에서 오류가 나타나기도 하였다. 또한 모든 학생이 직선과 점에 대한 대칭 기능을 함께 학습했음에도 불구하고 점에 대한 대칭 기능을 활용한 학생이 없었고 이는 학생들이 복잡한 형태의 도형 대신 간단한 도형 조작에 집중하도록 하게 한 원인이 되었다. 따라서 다양하고 정확한 시각화가 이루어지기 위해서는 활동과 관계되는 탐구형 소프트웨어의 도구와 기능을 반복적으로 연습할 필요가 있음을 알 수 있다.

<표 III-10> 점대칭도형 시각화 차시 학생별 외적 표상 변형 및 조작, 공간 능력의 양상

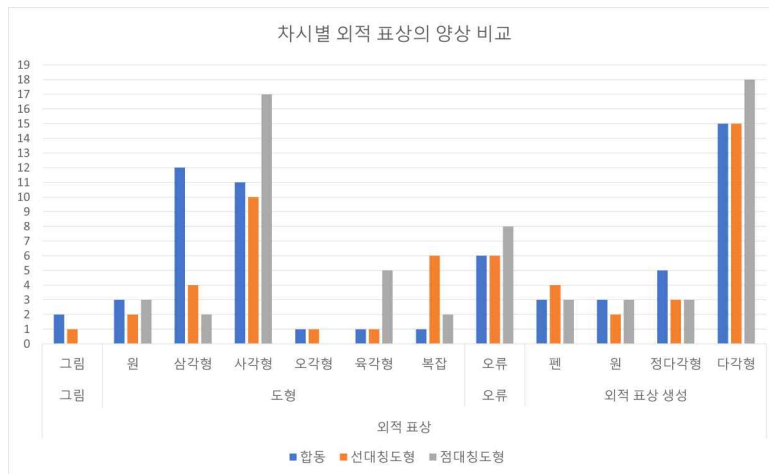
	외적 표상	외적 표상 변형 및 조작						공간능력
		행동		기능				공간시각화
	오류 포함	반복	기기 조작	끝기	보조선	측정	대칭	정신적 회전
합계	8	2	2	0	18	6	0	19

다음으로 학생들의 공간시각화에 대해 살펴보면, 점대칭도형을 그릴 때 기본적으로 모든 학생들에게서 정신적 회전이 나타났다고 보았다. 이러한 공간시각화의 유형은 [그림 III-9]와 같이 평행사변형, 정사각형 등 익숙한 도형을 먼저 떠올린 후 점대칭인지 확인한 유형, 새로운 형태의 도형을 나타낸 유형으로 나뉘었다. 첫 번째 유형의 경우 대부분 사각형 형태의 표상을 떠올렸음을 알 수 있다. 두 번째 유형의 경우 도형을 생성하는 과정부터 정신적 회전이 반복적으로 이루어졌고 이를 위해 보조선을 활용하여 칸의 수를 세며 도형을 조작하는 모습을 관찰할 수 있었다. 즉, 점대칭도형의 공간시각화에서 보조선을 바탕으로 새로운 형태의 도형을 나타낸 유형이 공간시각화 능력을 반복적으로 활용하면서 더 정확한 시각화를 할 수 있었음을 알 수 있다.



[그림 III-9] 점대칭도형에서 나타난 공간시각화 유형 사례

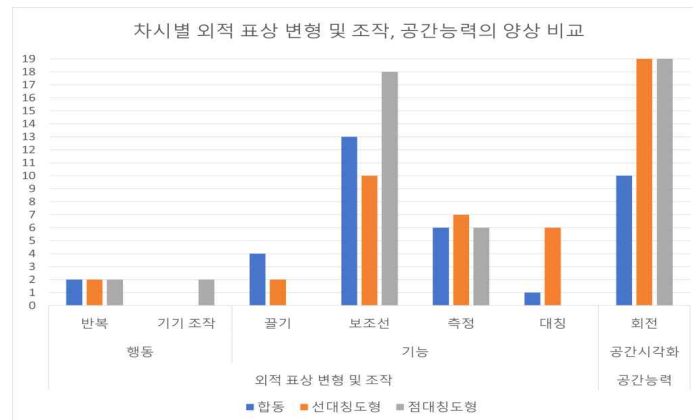
지금까지 살펴본 내용을 바탕으로 차시별 학습 내용에 따라 ‘외적 표상’ 영역과 관련된 시각화 구성 요소의 양상을 비교한 결과는 [그림 III-10]과 같다. 우선 외적 표상의 형태에 대해서는 차시가 진행됨에 따라 그림의 형태가 줄어들었고 비교적 간단한 도형인 삼각형이 가장 많았던 합동에 비해 이후 차시에서는 복잡한 형태의 도형이나 육각형이 늘어난 것을 볼 수 있다. 즉, 탐구형 소프트웨어를 활용하는 시각화를 반복하면서 그림의 형태는 감소하고 변의 개수가 많은, 복잡한 다각형의 형태가 증가할 수 있음을 보여준다. 또한 학생들이 가장 많이 떠올린 외적 표상의 형태는 사각형으로 특히 점대칭도형 차시에서 그 수가 가장 많았다. 또한 오류가 포함된 표상은 비슷한 수준을 유지하였고 점대칭도형에서 그 수가 가장 많았다. 즉, 합동이나 선대칭도형에 비해 점대칭도형을 탐구형 소프트웨어에 나타낼 때 오류가 포함된 표상이 나타날 가능성이 더 있다고 볼 수 있다. 외적 표상을 생성하는 도구에 대해서는 모든 차시에서 비슷한 형태로 도구를 사용하고 있었고 가장 많이 활용된 도구는 다각형 그리기임을 알 수 있다.



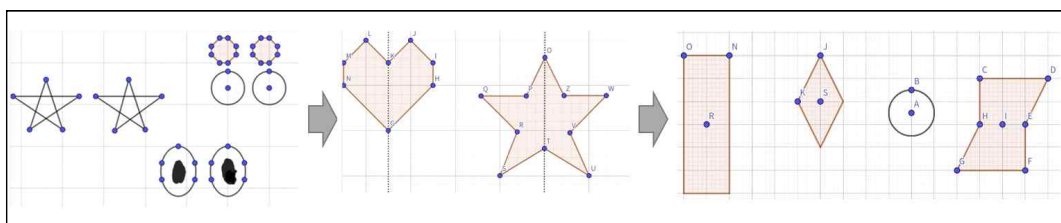
[그림 III-10] 차시별 외적 표상의 양상 비교

차시별 학습 내용에 따라 ‘외적 표상의 변형 및 조작’, 그리고 ‘공간 능력’ 영역과 관련된 시각화 구성 요소의 양상을 비교한 결과는 [그림 III-11]과 같다. 행동을 통한 변형 및 조작에 대해서는 반복이 모든 차시에서 같은 수로 나타났고 추가로 기기를 돌리는 조작 활동이 점대칭도형 차시에서 관찰되었다. 또한 행동을 통한 변형 및 조작을 한 학생들보다 탐구형 소프트웨어의 기능을 활용한 변형 및 조작을 한 학생들이 많았음을 알 수 있다. 이때 상대적으로 오류가 포함될 가능성이 큰 끌기 기능을 활용한 학생이 점차 줄어들었다. 모든 차시에서 가장

많이 활용된 기능은 보조선 기능이었고 특히 점대칭도형에서 그 수가 가장 많았다. 상대적으로 오류가 포함될 가능성이 적은 측정 기능은 차시가 진행됨에 따라 비슷한 수를 유지하였고 대칭 기능은 선대칭도형 차시에서 가장 많이 활용되었다. 공간 능력에 해당하는 정신적 회전의 경우 학습 내용의 특성에 따라 합동보다는 선대칭도형, 점대칭도형에서 많이 활용되었음을 알 수 있다. 한편, 시각화의 변화 양상이 잘 드러난 학생 E의 사례를 살펴보면, [그림 III-12]와 같이 합동 차시에서 다양한 종류의 표상을 떠올렸지만, 펜 도구를 활용하고 정확히 보조선을 바탕으로 조작하지 않아 오류가 나타났다. 선대칭도형 차시에서는 다각형 그리기 도구를 사용하여 도형의 형태를 갖추게 되었고 보조선을 바탕으로 조작을 하여 오류를 줄일 수 있었다. 점대칭도형 차시 또한 원, 다각형 그리기를 통해 정확히 대칭인 도형을 그리고 보조선을 기준으로 대칭의 중심까지 표현한 모습을 관찰할 수 있다.



[그림 III-11] 차시별 외적 표상의 변형 및 조작, 공간 능력의 양상 비교



[그림 III-12] 학생 E의 시각화 변화 양상

시각화의 양상에서 공통적으로 나타난 탐구형 소프트웨어의 특징과 역할을 살펴보면, 첫째, GeoGebra의 그리기 도구에 대해서는 지필 환경의 연필과 비슷한 펜 도구보다는 다각형, 정다각형 그리기를 활용했을 때 오류가 포함되지 않은 표상을 생성할 수 있다. 둘째, 모눈 칸과 같은 보조선은 학생들이 조건에 맞는 도형을 빠르고 쉽게 그릴 수 있도록 도움을 주었다. 특히 탐구형 소프트웨어에서의 보조선 기능은 지필 환경과는 다르게 도형을 그릴 때 점이 모눈 칸의 격자에 자동으로 붙도록 설정되어 있어 상대적으로 빠르고 정확한 시각화가 가능했다. 셋째, 탐구형 소프트웨어의 측정, 대칭 기능은 복잡하면서도 정확히 합동, 대칭인 도형을 조작할 수 있도록 하는 중요한 역할을 하였다. 즉, 탐구형 소프트웨어에서 다양한 기능은 학생들이 조건에 맞는 도형을 쉽고 빠르게 생

성하고 복잡한 표상을 조작할 수 있으며 오류가 포함될 가능성이 적은 다양한 표상을 자유롭게 표현할 수 있도록 도움을 주었다. 이는 도형이라는 추상적인 개념을 학생들이 탐구형 소프트웨어에 외적 표상의 형태로 나타내고 이를 변형, 조작하여 정확한 도형을 나타내었는지 검증하는 과정을 빠르게 반복할 수 있다는 측면에서 역동적인 시각화가 가능하게 하였다.

#### IV. 결론 및 제언

본 연구에서는 수학 교과에서 소프트웨어를 통해 학생들의 역량을 함양하고 교수·학습의 유용성을 높이는 것이 필요하다고 보았다. 특히 탐구형 소프트웨어는 수학의 도형 영역과 관련이 깊고 이를 도형 영역의 학습에 활용했을 때 학생들의 시각화와 조작적 이해를 촉진시키고 귀납적 탐구 기회를 제공하여 귀납적 추론 능력을 함양할 수 있다. 따라서 도형 영역의 학습에서 탐구형 소프트웨어인 GeoGebra를 활용할 때 학생들에게서 나타난 귀납적 추론 능력과 시각화의 구체적인 발전 양상이 어떠한지 파악하고자 하였다. 이를 정리하면 다음과 같다.

귀납적 추론 능력 수준은 차시가 진행됨에 따라 비슷한 수준을 유지하거나 발전되는 형태로 나타났다. 특히 귀납적 추론 수준이 낮았던 학생들이 탐구형 소프트웨어의 기능을 점차 정확하게 활용하게 되었고 모든 학생이 일정 수준 이상의 귀납적 추론 능력을 나타내었다. 즉, 탐구형 소프트웨어를 활용하여 추측과 검증을 하는 탐구 활동을 지속적으로 경험하게 되면 학생들의 귀납적 추론 능력을 일정 수준 이상으로 향상시킬 수 있었다. 또한 학생들이 탐구형 소프트웨어의 다양한 기능을 활용하여 넓이나 둘레가 같다고 성질을 추론한 것처럼 새로운 성질을 추론할 수 있도록 도움을 준다는 데 의의가 있다. 학생들의 귀납적 추론 능력이 최종적으로 가장 높은 수준에 도달할 수 있도록 하기 위해서는 자신의 조작 활동을 일반적인 용어로 정확하게 설명하고 탐구형 소프트웨어의 기능을 정확히 사용할 수 있어야 하며 성질과 개념을 구분할 수 있어야 한다. 또한 탐구형 소프트웨어에서의 조작 활동에 대한 흥미를 바탕으로 도형의 분석을 여러 번 시도하고 그 속에서 공통된 개념과 성질을 찾을 수 있어야 한다.

시각화의 양상은 외적 표상의 형태에서 주로 사각형 모양을 많이 떠올렸고 차시가 진행됨에 따라 육각형 혹은 복잡한 다각형의 형태가 증가하였다. 외적 표상의 생성에 대해서는 주로 다각형 그리기 도구를 많이 활용하였고 다각형, 정다각형 그리기 도구를 활용했을 때 오류가 포함되지 않은 표상을 생성할 수 있었다. 외적 표상의 변형 및 조작에 대해서는 보조선 기능을 가장 많이 활용하였고 이는 도형을 그릴 때 격자에 자동으로 붙도록 설정되어 있어 학생들이 조건에 맞는 도형을 빠르고 쉽게 그릴 수 있도록 도움을 주었다. 또한 지필 환경과는 다르게 ‘측정’, ‘대칭’ 기능을 활용하면 복잡하면서도 정확히 합동과 대칭인 외적 표상을 쉽게 변형하고 조작할 수 있었다. 공간시각화에 대해서는 학습 내용에 따라 다양한 유형의 정신적 회전이 나타났고 조건에 맞는 새로운 도형을 떠올리고 정신적 회전을 반복하였을 때 정확한 시각화가 가능했다.

탐구형 소프트웨어를 활용하여 합동과 대칭을 학습했을 때 학생들에게 나타난 귀납적 추론 능력과 시각화의 양상에 관해 본 연구가 갖는 시사점 및 논의할 점은 다음과 같다. 첫째, 탐구형 소프트웨어를 활용한 수학 수업은 ‘측정’과 같은 기능 활용을 통해 도형의 개념과 성질을 정확하게 검증하고 다양하고 정확한 외적 표상을 나타내도록 할 수 있다. 본 연구에서 귀납적 추론 능력이 높은 학생들일수록 시각화에서 다양하고 복잡한 형태의 도형을 표상하고 생성하는 모습을 관찰할 수 있었다. 즉, 다양한 조작 활동을 통해 도형의 개념과 성질에 대해 추론하고 검증한 후 정확한 일반화를 한 학생들은 개념과 성질에 대한 이해를 바탕으로 다양하고 복잡한 형태의 외적 표상을 떠올릴 수 있고 탐구형 소프트웨어의 다각형 그리기 도구가 이러한 외적 표상을 생성할 수 있도록 도움을 준다는 것이다. 또한 귀납적 추론에서 탐구형 소프트웨어의 기능을 통한 도형의 성질에 대한 자료 분석을 정확하게 한 학생들일수록 정확도가 높은 측정, 대칭 기능을 활용한 외적 표상의 변형 및 조작으로 나아갈



수 있었다. 따라서 도형을 자유롭게 그리고 '측정', '대칭' 등 다양한 기능을 활용하여 도형을 조작할 수 있는 탐구형 소프트웨어의 특징은 학생들이 도형의 개념과 성질을 추측하고 확인하며 조작적 이해를 할 수 있도록 돕고 이는 도형 개념을 형성하고 적용하는 과정에 도움이 된다는 것을 알 수 있다.

둘째, 탐구형 소프트웨어는 수학 수업에서 학생들이 조작 활동을 바탕으로 자신의 언어로 개념과 성질을 정리하고 교과서에서 제시되지 않은 새로운 성질을 발견하도록 하여 학생 중심 탐구의 기회를 제공할 수 있다. 본 연구에서 학생들은 GeoGebra 환경에서 합동, 선대칭, 점대칭도형을 조작하여 스스로 도형의 개념과 성질을 귀납적으로 탐색하고 추론하였다. 또한 여러 번의 조작 활동을 바탕으로 자신의 언어를 활용해 개념과 성질을 정리하고 '둘레의 길이가 같다', '넓이가 같다'와 같이 교과서에서는 제시되지 않았던 새로운 성질을 추가로 발견하기도 하였다. 이는 탐구형 소프트웨어를 활용하여 학생들이 스스로 개념과 성질을 추론하도록 하였을 때 학생 중심의 탐구 기회를 제공할 수 있음을 시사한다. 특히 고학년 학생을 대상으로 수학 학습을 할 때 수동적인 자세에서 벗어나 도형을 능동적으로 구성하고 추론 능력을 함양하도록 하는 것이 중요하므로 탐구형 소프트웨어를 활용한 탐구 활동이 더욱 필요하다고 볼 수 있다. 이때 탐구 활동에 도움을 주는 교사의 안내가 중요하다. 본 연구에서 학생들 스스로 추측과 검증할 때 개념과 성질을 서로 구분하지 못하거나 한 가지 성질만을 발견하고 멈추는 경우가 있었다. 이는 개념과 성질의 의미를 안내하고 여러 가지 성질을 발견할 수 있도록 구체적인 방안을 안내하는 교사의 역할이 필요함을 의미한다. 따라서 교사가 학생 중심의 귀납적 탐구의 기회를 충분히 제공하고 탐구형 소프트웨어를 사용할 때 어떠한 도움이 필요할지 구체적으로 탐색하여 적절한 도움을 제공하는 과정이 필요하다고 볼 수 있다.

셋째, 탐구형 소프트웨어는 지필 환경의 한계를 극복한 빠르고 정확한 시각화를 가능하게 하므로 다양한 도형 영역의 수업에서 이를 적극적으로 활용하는 것이 필요하다. 본 연구에서 학생들이 탐구형 소프트웨어의 여러 기능을 활용하여 지필 환경에서는 그리기 어려운 복잡한 형태의 표상을 이른 시간 안에 쉽게 완성하는 모습을 볼 수 있었다. 또한 지필 환경에서와 달리 탐구형 소프트웨어를 활용하면 정확히 모는 칸에 맞는 도형을 쉽고 빠르게 그릴 수 있어 학생들이 흥미를 느끼고 다양한 형태의 표상을 떠올리게 되었다. 그리고 도형을 생성하고 조작하는 과정에서 공간사고화 능력이 다양한 형태로 활용되고 있었다. 이러한 과정은 학생들이 개념과 관련된 이미지를 떠올리고 검증하는 역동적인 시각화를 가능하게 하였다. 이는 도형을 조작하고 시각적으로 나타내는 것이 중요한 도형 영역에서 탐구형 소프트웨어를 활용하면 지필 환경에서 쉽게 할 수 없는 시각화가 가능하고 공간 감각을 함양할 수 있음을 시사한다. 따라서 평면도형의 학습, 더 나아가서 입체도형의 학습에서 탐구형 소프트웨어를 활용한 시각화의 기회를 많이 제공하는 것이 필요하다.

이와 같은 결론과 시사점을 바탕으로 후속 연구에 관한 제언은 다음과 같다. 첫째, 합동과 대칭뿐만 아니라 다른 도형 영역, 평면도형과 입체도형을 대상으로 수업을 적용하고 추론과 시각화 과정이 어떠한지 파악하는 후속 연구가 필요하다. 이때 긴 기간 동안 반복적으로 탐구형 소프트웨어를 활용하는 수업을 적용하면 기능 활용에 대한 숙달이 더욱 높아지기 때문에 기술 활용의 어려움을 극복하고 귀납적 추론과 시각화의 발전 양상이 어떠한지 탐색할 수 있을 것으로 기대한다.

둘째, 탐구형 소프트웨어를 활용했을 때 도형의 개념 학습에 영향을 미치는 다른 요소에 대해 분석하는 후속 연구가 필요하다. 본 연구는 도형 개념 형성의 과정에서 귀납적 추론과 시각화라는 두 요소를 집중적으로 분석하였다. 본 연구에서 탐구형 소프트웨어를 활용하였을 때 특히 학생들의 흥미, 태도와 같은 정의적 요소가 학습 참여도와 수행 정도에 영향을 미치는 모습을 볼 수 있었다. 따라서 본 연구에서 제시한 수업을 적용한 뒤 도형 영역의 개념 학습과 관련이 있는 인지적, 정의적 요소에 어떠한 변화가 나타나는지, 서로 어떠한 관계가 있는지 분석하는 후속 연구가 필요하다. 이를 바탕으로 탐구형 소프트웨어의 활용이 도형의 학습에 어떠한 영향이 있는지 이해하고 학교 현장에서 이를 효과적으로 적용하기 위한 교수·학습 방법을 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

셋째, 탐구형 소프트웨어와 지필 환경을 함께 활용하는 방안을 탐색하는 후속 연구가 필요하다. 본 연구는 합

동과 대칭 개념을 학습하는 과정에서 탐구형 소프트웨어를 활용한 도형의 조작과 생성 활동을 집중적으로 활용하였다. 그렇지만 탐구형 소프트웨어로만 모든 도형의 개념과 성질을 학습할 수 없다는 측면에서 소프트웨어의 활용은 지필 환경을 온전히 대체한다고 볼 수 없다. 지필 환경에서 학습하는 것이 효과적인 도형의 학습 내용 또한 존재하므로 도형의 학습 요소에 따라 지필 환경과 탐구형 소프트웨어 중에서 어느 것을 활용하는 것이 더 효과적인지 판단하고 두 환경을 적절하게 배합하여 실제 수업에서 어느 시점에 활용할 것인지를 결정하는 과정이 중요하다(류성립, 2001). 따라서 도형 영역의 학습 요소를 자세히 살펴보고 지필 환경과 탐구형 소프트웨어를 균형 있게 활용하는 방안을 탐색하는 후속 연구가 필요하다. 이를 바탕으로 지필 환경과 탐구형 소프트웨어를 적절하게 활용하여 도형 개념의 학습 효과를 높이는 학습 환경을 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

본 연구는 탐구형 소프트웨어를 활용한 합동과 대칭 수업에서 나타난 학생들의 귀납적 추론 능력과 시각화 과정을 탐색하여 귀납적 추론 능력의 특징과 변화를 분석하였다는 점, 구체적인 사례를 통해 학생들의 시각화 양상을 탐색하여 탐구형 소프트웨어를 활용한 수업을 진행하는 교사들에게 시사점을 제공한다는 점에서 의의가 있다. 또한 탐구형 소프트웨어가 귀납적 추론 능력과 시각화에 미치는 영향을 밝히고 다양한 도형 영역에서 탐구형 소프트웨어를 활용하고 그 영향을 분석해야 하며 학습 내용에 따라 탐구형 소프트웨어와 지필 환경을 균형 있게 활용해야 함을 제언함으로써 탐구형 소프트웨어를 활용한 도형 영역의 교수·학습 설계와 수업 실행에 도움이 될 것으로 기대한다.

## 참 고 문 헌

- 장옥기, 강윤수, 고호경, 권나영, 김구연, 김래영 외 13인 (2012). 수학교육학 신서. 교우사.
- Kang, O. K., Kang, Y. S., Ko, H. K., Kwon, N. Y., Kim, G. Y., ..., Kim, R. Y. (2012). *New mathematical education*. Kyowosa.
- 교육부 (2019a). 5-2 초등학교 수학 교사용 지도서. 비상교육.
- Ministry of Education (2019a). *Elementary school mathematics teacher's guidebook 5-2* Visang.
- 교육부 (2019b). 6-2 초등학교 수학 교사용 지도서. 비상교육.
- Ministry of Education (2019b). *Elementary school mathematics teacher's guidebook 6-2* Visang.
- 교육부 (2021). 2022 개정 교육과정 총론 주요사항[시안], Retrieved from <https://www.moe.go.kr/boardCnts/viewRenew.do?boardID=294&boardSeq=89671&lev=0>
- Ministry of Education (2021). *Main points of the 2022 revised general curriculum[draft]*. Retrieved from <https://www.moe.go.kr/boardCnts/viewRenew.do?boardID=294&boardSeq=89671&lev=0>
- 교육부 (2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2022-33호 [별책 8].
- Ministry of Education (2022). *Mathematics curriculum*. Ministry of Education Notice No. 2022-33 [Separate 8].
- 권윤신·류성립 (2013). GeoGebra를 활용한 귀납활동이 초등수학영재의 증명능력 및 증명학습태도에 미치는 영향. 초등수학교육, **16(2)**, 123-145.
- Kwon, Y. S., & Ryu, S. R. (2013). The effects of inductive activities using GeoGebra on the proof abilities and attitudes of mathematically gifted elementary students. *Education of Primary School Mathematics*, **16(2)**, 123-145.
- 김수연 (2017). GeoGebra의 3차원 기능을 활용한 교수학습활동이 학생들의 시각화 과정과 정의적 특성에 미치는 영향. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.
- Kim, S. Y. (2017). *The impact of teaching-learning activities utilizing GeoGebra's 3D function on students' visualization process and affective characteristics* [Master's Thesis, Ewha Womans University Graduate School of Education].

- 김유진 (2007). 현실적 맥락을 활용한 수학적 학습이 아동의 수학적 사고에 미치는 효과 - 초등학교 5학년 도형 영역을 중심으로. 한국초등수학교육학회지, **11(2)**, 99-115.
- Kim, Y. J. (2007). Effect of mathematising learning using realistic context on the children's mathematical thinking. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **11(2)**, 99-115.
- 김효영 (2021). Geogebra를 활용한 수학 수업이 6학년 학생들의 학업 성취도와 수학적 성향에 미치는 효과. 춘천교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- Kim, H. Y. (2021). *The effects on achievement and mathematical disposition of mathematical instruction using Geogebra for six graders* [Master's Thesis, Chuncheon National University of Education].
- 류성립 (2001). 기하 수업에서 탐구형 소프트웨어의 활용 방법, 과학·수학교육연구, **24**, 1-20.
- Ryu, S. R. (2001). Using ways of the experimental computer software in geometry, *The Research of Science Mathematics Education*, **24**, 1-20.
- 류현아·장경윤 (2009). 중등 기하문제 해결에서 시각화 과정. 수학교육학연구, **19(1)**, 143-161.
- Ryu, H. A., & Chang, K. Y. (2009). Process of visualization in 2D-geometric problem solving among secondary school students. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **19(1)**, 143-161.
- 박유립 (2016). 중학교 2학년 '도형의 성질' 단원에서 GeoGebra를 활용한 수업의 효과. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
- Park, Y. R. (2016). *A study on effects of GeoGebra based lesson in 8th graders' learning Geometric figures* [Master's Thesis, Graduate School of Korea National University of Education].
- 우정호 (2000). 수학학습-지도 원리와 방법. 서울대학교출판부.
- Woo, J. H. (2013). *The principle and method for teaching and learning mathematics*. Seoul National University Publisher.
- 윤여주·김성준 (2010). 초등수학 기하문제해결에서의 시각화 과정 분석. 영남수학회, **26(4)**, 553-579.
- Yun, Y. J., & Kim, S. J. (2010). Analysis of visualization process in geometric problem solving of the elementary mathematics. *East Asian Mathematical Journal*, **26(4)**, 553-579.
- 이근주·조민식 (2006). 탐구형 기하소프트웨어를 활용한 추론능력 평가에 관한 연구, 한국학교수학회논문집, **9(4)**, 459-479.
- Lee, K. J., & Cho, M. S. (2006). A study on the assessment of reasoning ability using dynamic geometry software. *Journal of the Korean School Mathematics Society*, **9(4)**, 459-479.
- 이현주 (2021). 원뿔곡선 작도기를 활용한 기하 과제 해결 과정에서 나타난 고등학교의 수학적 추론 분석. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.
- Lee, H. J. (2021). *An analysis on the high school students' mathematical reasoning in geometric problem solving with conic section drawers* [Doctoral Dissertation, Graduate School of Korea National University of Education].
- 임현정·고상숙 (2016). GeoGebra를 활용한 반힐레 기하교수법에서 도구화에 관한 연구. 수학교육논문집, **30(4)**, 435-452.
- Lim, H. J., & Choi-Koh, S. S. (2016). A study on instrumentalization in van Hiele's geometric teaching using GeoGebra. *Communications of Mathematical Education*, **30(4)**, 435-452.
- 장혜진 (2012). 중학교 도형수업에서 GeoGebra 활용의 효과에 관한 연구. 국민대학교 교육대학원 석사학위논문.
- Jang, H. J. (2012). *A study on the effects of utilizing GeoGebra on middle school Geometry class* [Master's Thesis, Kookmin University Graduate School of Education].
- 전평국·김은희·김원경 (2002). 수학적 추론 능력 평가 기준에 관한 연구. 수학교육논문집, **13(2)**, 425-455.
- Jeon, P. G., Kim, E. H., & Kim, W. G. (2002). A study on the scoring framework for mathematical reasoning ability. *Communications of Mathematical Education*, **13(2)**, 425-455.
- 정대성 (2014). 역동적 기하 소프트웨어 GeoGebra를 활용한 답음 지도 사례연구. 건국대학교 교육대학원 석사학

위논문.

- Jung, D. S. (2014). *A case study in teaching and learning similarity with a dynamic geometry software GeoGebra* [Master's Thesis, Konkuk University Graduate School of Education].
- 정소영 (2017). GeoGebra를 활용한 수학 수업이 도형 개념 형성과 수학적 성향에 미치는 영향 분석. 서울교육대학교 교육전문대학원 석사학위논문.
- Jung, S. Y. (2017). *The analysis of influencing on figure conceptual formation and mathematical tendency using GeoGebra in mathematics* [Master's Thesis, Seoul National University of Education].
- 주홍연·권혁진 (2012). 문제 해결 과정에서 나타나는 수학적 시각화의 구성 요소 및 활용에 관한 분석. 학교수학, **14(1)**, 1-28.
- Joo, H. Y., & Kwean, H. J. (2012). Analysis on factors and the application of mathematical visualization in problem solving process. *School Mathematics*, **14(1)**, 1-28.
- Battista, M. T., Frazee, L., & Winer, M. L. (2018). Analyzing the relation between spatial and geometric reasoning for elementary and middle school students, In *Visualizing mathematics: The role of spatial reasoning in mathematical thought* (pp. 195-228). Springer International Publishing.
- Bishop, A. J. (1983). Spatial abilities and mathematical thinking. In M. Zweng et al. (Eds.), *Proceedings of the 4th ICME* (pp. 176-178). Birkhauser.
- Del Grande, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher*, **37(6)**, 14.
- Gutierrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-19). University of Valencia.
- Kosslyn, S. M. (1983). *Ghosts in the mind's machine*. W. W. Norton.
- Lohman, D. F. (1979). *Spatial ability: A review and reanalysis of the correlational literature*. Stanford University School of Education.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Nemirovsky, R., & Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, **33(2)**, 99-131.
- O'Daffer, P. G. (1993). Critical thinking, mathematical reasoning, and proof. *Research ideas for the classroom: High school mathematics*. New York: Mac Millan.
- Seah, R., & Horne, M. (2020). The construction and validation of a geometric reasoning test item to support the development of learning progression. *Mathematics Education Research Journal*, **32(4)**, 607-628.
- Tartre, L. A. (1984). *The role of spatial orientation skill in the solution of mathematics problems and associated sex-related differences*. The University of Wisconsin.
- Taylor, R. J., & Chonacky, N. (1980). Computer in the school: Tutor, tool, tutee. *American Journal of Physics*, **50**, 91-92.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). Editor's introduction: What is mathematical visualization. *Visualization in teaching and learning mathematics*, **1(8)**, 1-7.

## A Study on Inductive Reasoning and Visualization of Elementary School Students in Congruence and Symmetry Lessons with Exploratory Software

**Park, Jiyeon**

Seoul Woosol Elementary School

E-mail : pjyee2353@ewhain.net

**Kim, Min Kyeong<sup>†</sup>**

Department of Elementary Education, Ewha Womans University

E-mail : mkkim@ewha.ac.kr

In this study, we tried to find out the level of inductive reasoning ability and the aspects of visualization components shown in students in the class using exploratory software for the 'congruence and symmetry' unit in the second semester of the 5th grade of elementary school. To this end, classes using GeoGebra, one of the exploratory software, were conducted for a total of 19 students in one class of fifth graders in elementary school, and the results of the students' activities were analyzed. As a result of this study, the level of inductive reasoning ability of students remained at a similar level or developed, and it was shown that students inferred new properties of shapes using various functions of software inductively. In addition, in terms of visualization, students were able to quickly and easily draw shapes that met the conditions, and unlike the paper-and-pencil environment, using the 'measurement' and 'symmetry' functions, they transformed and manipulated complex yet precisely congruent and symmetrical external representations. Based on these analysis results, implications for the use of exploratory software in the area of figures were derived.

---

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U70

\* Key words : geometry, exploratory software, inductive reasoning, visualization

† corresponding author