East Asian Math. J.
Vol. 39 (2023), No. 4, pp. 479-492
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2023.034

집합과 평면기하를 활용한 공간기하의 3대 문제 증명[1)]

Proof of the three major problems of spatial geometry using sets and plane geometry

도 강 수 · 류 현 기 · 김 광 수[2)]

ABSTRACT. Although Euclidean plane geometry is implemented in the middle school course, there are three major problems in high school space geometry that can be intuitively taken for granted or misinterpreted as circular arguments.

In order to solve this problem, this study proved three major problems using sets, Euclidean plane geometry, and parallel line postulates.

This corresponds to a logical sequence and has mathematical and mathematical educational values. Furthermore, it will be possible to configure spatial geometry using sets, and by giving legitimacy to non-Euclidean spatial geometry, it will open the possibility of future research.

I. 개요

아래는 교육부 고시 제2015-74호 [별책8] 수학과 교육과정(교육부)의 일부이다.

현행 교육과정에서 중학교 기하 p.35 (나) 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 아래를 안내한다.

"…(중략)…도형의 성질을 이해하고 설명하는 활동은 관찰이나 실험을 통해 확인하기, 사례나 근거를 제시하며 설명하기, 유사성에 근거하여

Received July 21, 2023; Revised August 14, 2023; Accepted August 30, 2023.
Mathematics Subject Classification: 97G10, 97G40
Key Words: Planar geometry, spatial geometry
1) 본 연구는 부경대학교 자율창의학술연구비(2022년)에 의하여 연구되었음.
2) Corresponding Author

추론하기, 연역적으로 논증하기 등과 같은 다양한 정당화 방법을 학생 수준에 맞게 활용할 수 있다.…(중략)…"

현행 고등학교 1학년 교육과정에서 수학 p.47 가.내용체계의 일부이다.

수와 연산	집합과 명제	집합은 수학적 대상을 논리적으로 표현하고 이해하는 도구이며, 명제는 증명을 통해 그 타당성이 입증된다.	• 집합 • 명제	증명하기

"집합은 수학적 대상을 논리적으로 표현하고 이해하는 도구이며, 명제는 증명을 통해 그 타당성이 입증된다."하여 집합을 대상으로 명제의 논증을 정당화하고 있다.

현행 교육과정에서 기하 p.107 1.성격의 일부에서

"<기하>의 지식을 이해하고 기능을 습득하는 것과 더불어 문제 해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학 교과 역량을 길러야 한다. …(중략)… 추론은 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력이다.…(중략)…"

현행 교육과정에서 기하 p.111 (나)성취기준 (3)공간도형과 공간좌표에서

"공간도형의 기본 구성 요소는 점, 직선, 평면이고, 공간좌표는 공간도형을 대수적으로 다루는 도구이다. 공간도형의 성질에 대한 탐구는 공간 감각을 기르는 데 도움이 되고, 좌표공간을 통해 도형을 대수적으로 표현하고 다룸으로써 기하와 대수의 연결성을 경험하게 할 수 있다.

1 공간도형

[12기하03-01] 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

…(중략)…

(나) 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 공간도형의 성질은 관찰을 통해 직관적으로 이해한 후 증명하게 한다."

p.112. 4.교수·학습 및 평가의 방향 가. 교수·학습 방향 (1) 교수·학습 원칙을 발췌하면 "(라) 과목별 내용의 배열 순서가 반드시 교수·학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수·학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건, 학생의 수준 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있다.

(마) 교육과정에 제시된 내용을 지도한 후 학습 결손이 있는 학생에게는 보충 학

습, 우수 학생에게는 심화 학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다.”

p.113. (2) 교수·학습 방법의 (다) 추론 능력을 함양하기 위한 교수·학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 관찰과 탐구 상황에서 귀납, 유추 등의 개연적 추론을 사용하여 학생 스스로 수학적 사실을 추측하고 적절한 근거에 기초하여 이를 정당화할 수 있게 한다.
② 수학의 개념, 원리, 법칙을 도출하는 과정과 수학적 절차를 논리적으로 수행하게 한다.
③ 추론 과정이 옳은지 비판적으로 평가하고 반성하도록 한다.

(라) 창의·융합 능력을 함양하기 위한 교수·학습에서는 다음 사항을 강조한다.

① 새롭고 의미 있는 아이디어를 다양하고 풍부하게 산출할 수 있는 수학적 과제를 제공하여 학생의 창의적 사고를 촉진시킨다.
② 하나의 문제를 여러 가지 방법으로 해결하게 하고, 해결 방법을 비교하여 더 효율적인 방법을 찾거나 정교화하게 한다.
③ 여러 수학적 지식, 기능, 경험을 연결하거나 수학과 타 교과나 실생활의 지식, 기능, 경험을 연결·융합하여 새로운 지식, 기능, 경험을 생성하고 문제를 해결하게 한다.

따라서 현행 교육과정의 체계에 부합하며 증명방식이 수학적으로 교육적으로 타당한 접근이 되어야 할 것이다.

공간기하에 대하여 교과서의 증명을 살펴보면 증명없이 직관에 호소하거나 순환논증으로 오해석될 여지가 있었다. 직관적으로 자명하게 해석되려면 공준의 역할을 해야 할 명제이지만 공준은 아닌 것에 문제의식을 느꼈다. 증명할 내용을 증명의 과정에서 사용하는 것으로 해석되는 순환논증의 증명은 이해하기가 어려웠다.

학생들의 입장에서 중학교 평면도형의 전 과정과 고등학교 1학년 집합과 명제에서 배웠던 선수학습만을 활용하여 논리적인 순서에 합당한 답을 찾는 과정에서 연구가 시작되었다.

저자는 공간도형에서 집합의 추이적 성질에 해당하며 공준에 가까운 핵심 문제라고 판단되는 아래의 3개의 문제를 임의로 3대 문제라 명명하고 제기된 의문점과 해결 방법을 아래와 같이 소개한다.

첫 번째, 공간 상에서 배치된 **세 평행 평면에 대한 추이성 문제**[3]에 대하여 교과서는 순환논증으로 증명하거나 당연한 듯 받아들이고 논증을 하지 않고 있다.

이를 해결하기 위해 평면의 결정 조건을 활용하여 평면을 생성(generation)관

3) 서로 다른 세 평면 α,β,γ에 대하여, $\alpha//\beta$이고, $\beta//\gamma$이면 $\alpha//\gamma$이다.

점으로 정의했다. 명제를 부정한 다음 교선의 정의를 활용하여 공간을 자르면 (cutting) 평면화 되어 차원이 떨어진다. 그러면 평면기하의 평행선 공준에 모순됨을 보일 수 있다.

두 번째, 공간상에서 배치된 **세 평행 직선의 추이성 문제**[4]에 대하여 교과서는 직관적으로 참, 거짓만 묻고 넘어가는 점과 공간에서 두 직선의 꼬인 위치관계를 앞서 배웠음에도 이를 활용하지 않는다는 점에서 문제의식을 느끼게 되었다.

명제를 부정하여 발생하는 케이스 중 두 직선의 꼬인 위치관계[5]에 주목했다. 여기에서 기존에 소개된 두 가지의 정리[6]을 활용하면 역시 평면기하의 평행선 공준에 모순됨을 보일 수 있다.

세 번째, 평행한 두 평면에서 한 평면을 통과하는 직선은 나머지 평면을 통과한다는 **두 평행 평면에서 직선의 통과성 문제**[7]의 교과서 증명을 분석해보니 역시 순환논증으로 오해석의 여지가 생겨 다른 방법을 찾을 수 밖에 없었다.

평면기하에서 직선의 외부의 점에서 수선을 내려 긋는 작도(수선의 발 작도)는 본질적으로 SSS합동이 사용된다. 비슷하게 공간기하에서 평면 위에 있지 않은 점에서 평면으로 내려긋는 수선의 작도법은 삼수선의 정리를 활용하면 밝힐 수 있다. 이를 활용하여 앞서 소개한 방식으로 공간을 자르면(cutting) 평면기하로 돌아오게 되어 평행선 공준에 모순 시킬 수 있다.

II. 공간기하의 3대 문제 분석

첫 번째, 세 평행 평면의 추이성 문제를 분석하자.(이준열, 2017, p.148)

(문제) 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여 $\alpha // \beta, \beta // \gamma$이면 $\alpha // \gamma$임을 보여라.

(증명) 두 평면 α, γ가 평행하지 않다고 가정하면 평면 α와 평면 γ는 한 직선 l에서 만난다. 그런데 평면 β위에 있지 않은 직선 l위의 점을 지나면서 β에 평행인 2개의 평면 α, γ가 존재하는 것은 모순이다. 따라서 $\alpha // \gamma$이다.

이 (증명)은 귀류법으로 증명을 시작하지만, 순환논증으로의 오해석 여지가 있다. 평면 β위에 있지 않은 직선 l위의 점을 지나면서 β에 평행인 2개의 평면 α, γ가 존재할 수도 있는 것이다. 이 증명의 진정한 의도는 2개의 평면 α, γ가 존재하

4) 서로 다른 세 직선 l, m, n에 대하여, $l // m$이고, $m // n$이면 $l // n$이다.
5) 동일 평면에 있지 않은 서로 다른 두 직선을 꼬인 위치관계라 한다.
6) 본문 III.공간기하의 3대 문제 증명에서 정리2, 정리3으로 소개한다(p.9).
7) 두 평면 α, β가 평행할 때, 평면 α와 한 점에서 만나는 직선 l은 평면 β와도 한 점에서 만난다.

지 않음을 보이는 것이다. 즉, 2개의 평면 α, γ가 존재한다면 모순됨을 보이는 것이다. 그러나 (증명)에서는 보여야 할 사실을 증명과정에서 활용하는 것으로 보이므로 읽는 사람은 몇 번을 고쳐보아도 모호함이 느껴지는 것이다.

만약 위의 명제를 증명 없이 직관적으로 받아들인다면 공준으로 해석된다. 그렇지만 주어진 명제는 공준이 아니다. 예를 들어 평행면 공준[8)]등의 이름을 붙이고, 공준을 추가하기보다 증명하는 것이 더 온당하다.

세 평행 평면의 추이성 문제	
증명방식	귀류법
문제점	1. 논증기하의 의도에 맞지 않음. 2. 결론을 증명과정에 사용(순환논증)하는 것으로 해석될 수 있음. 3. β 위에 있지 않은 직선 l 위의 점을 지나면서 β에 평행인 2개의 평면 α, γ가 존재할 경우에 대한 모순점을 찾아야함.

[표 3] 세 평행 평면의 추이성 문제

두 번째, 세 평행 직선의 추이성 문제를 분석하자.(이준열, 2017, p.148)

(문제) 다음은 세 학생이 서로 다른 세 직선 l, m, n과 서로 다른 두 평면 α, β에 대하여 말한 내용이다. 각각의 참, 거짓을 말하여라.

(1) $l//m, m//n$이면 $l//n$이야.

(풀이) (1) 참

직관적으로는 누구나 참이라고 생각할 수 있겠지만, 평면에서의 추이성과는 달리 공간에서의 추이성은 꼬인 위치관계가 존재한다는 점에서 본질적으로 다르다. 교육과정에서 이 단원에 대한 요구사항이 논증 기하임에 주목한다면 이 부분을 직관적으로 넘어가도 될 부분인지 의문이 든다. 극단적으로는 ‘이런 것까지는 몰라도 된다. 당연하니까 받아들여도 된다.’ 등의 의미로 해석될 수도 있다.

이 명제를 부정하여 l과 n이 꼬인 위치관계가 될 경우를 생각해 보자. 앞서 직선의 꼬인 위치관계를 정의하였기 때문에 이를 활용하여 모순을 찾아 증명을 완성하려 하는 것은 자연스럽다. 그러나 그 후의 진행은 쉽지 않기 때문에 평면의 생성(generation)이라는 정의를 내릴 필요성이 생기게 된다.

---

8) 평행선 공준과 같은 의미를 공간으로 확장하여 이름을 붙인 것이다. 즉, “평면 α와 평행한 직선 l을 지나면서 α에 평행인 평면은 유일하게 존재한다”를 공준으로 보는 입장이다.

세 평행 직선의 추이성 문제	
증명방식	직관적 설명
문제점	1. 논증기하의 의도에 맞지 않음. 2. l과 n이 꼬인 위치관계가 될 경우의 모순점을 찾아야함.

[표 5] 세 평행 직선의 추이성 문제

세 번째, 두 평행 평면에서 직선의 통과성 문제를 분석하자.(이준열, 2017, p.150)

(문제) 두 평면 α, β가 평행할 때, 평면 α와 한 점에서 만나는 직선 l은 평면 β와도 한 점에서 만남을 보여라.

(증명) 직선 l이 평면 β와 한 점에서 만나지 않는다고 가정하면, 직선 l은 평면 β에 포함되거나 평행하다.
(ⅰ) 직선 l이 평면 β에 포함되면 $\alpha // \beta$이므로 $l // \alpha$이다. 즉, 직선 l은 평면 α와 만나지 않는다.
(ⅱ) 직선 l이 평면 β와 평행하면 $\alpha // \beta$이므로 직선 l은 평면 α에 포함되거나 평면 α와 평행하다.
(ⅰ), (ⅱ)는 평면 α와 직선 l이 한 점에서 만난다는 것에 모순이다. 따라서 직선 l은 평면 β와 한 점에서 만난다.

위의 (증명)에서 귀류법을 적용하여 모순점을 찾는 부분 "(ⅱ) 직선 l이 평면 β와 평행하면 $\alpha // \beta$이므로 직선 l은 평면 α에 포함되거나 평면 α와 평행하다."에서 이 직선 l이 평면 β와 평행함에도 평면 α와 한 점에서 만날 수도 있다는 사실은 간과하고 있다. 즉, (ⅱ)에서 '왜 직선 l이 평면 β와 평행함에도 평면 α와는 한 점에서 만나지 않는지'를 논증하는 부분이 이 문제의 진정한 의도라고 보여진다. 따라서 순환논증으로 오해석할 여지가 있다.

두 평행 평면에서 직선의 통과성 문제	
증명방식	귀류법
문제점	1. 논증기하의 의도에 맞지 않음. 2. 결론을 증명과정에 사용(순환논증)하는 것으로 해석될 수 있음. 3. 직선 l이 평면 β와 평행함에도 평면 α와 한 점에서 만날 경우에 대한 모순점을 찾아야함.

[표 7] 두 평행 평면에서 직선의 통과성 문제

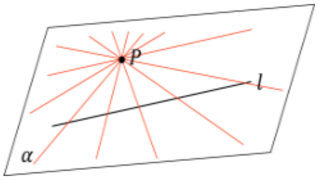
III. 공간기하의 3대 문제 증명

1\. 공간기하의 위치관계

(정의1) 공간상의 평면의 결정

한 직선 l과 그 직선 위에 있지 않은 한 점 P가 존재하면 공간상의 유일한 평면 α를 결정한다(생성한다).

$$\alpha := < l, \mathrm{P} >$$



[그림 1] (정의1)

2\. 위치관계와 정의

(정의2) 공간상의 두 직선의 위치관계

(1) 두 직선이 l과 m이 포개어진 상태일 때, 두 직선은 일치한다(같다).

$$l = m$$

(2) 서로 다른 두 직선 l과 m이 서로 공유할 때, 두 직선은 한 점에서 만난다(교차한다,지난다).

$$l \neq m \ \wedge \ l \cap m \neq \varnothing$$

(3) 동일평면 상에서 두 직선 l과 m이 만나지 않을 때(공유하지 않을 때), 두 직선은 평행하다.

$$l // m \ \equiv \ \exists \mathrm{P} \notin m ; l \subset < m, \mathrm{P} > \ \wedge \ l \cap m = \varnothing$$

(4) 서로 만나지 않는 두 직선 l과 m이 동일평면 위에 있지 않을 때, 두 직선은 꼬인 위치관계에 있다.

$$l \not\div m \ \equiv \ \forall \mathrm{P} \notin m , l \not\subset < m, \mathrm{P} > \ \wedge \ l \cap m = \varnothing$$

(정리1) 평면의 결정에 관해, 다음은 동치이다.

(1) 한 직선 l과 그 직선 위에 있지 않은 한 점 P로 평면을 결정(생성)한다.

(2) 한 직선 위에 있지 않은 세 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$은 평면을 결정(생성)한다.

(3) 한 점 P에서 만나는(교차하는/지나는) 두 직선 l, m으로 평면을 결정(생성)한다.

(4) 평행한 두 직선 l, m으로 평면을 결정(생성)한다.

(3)(4)의 경우, $< l, m >$로 표기한다.

(증명) (1)$\Longrightarrow$(2) 두 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$으로 직선 l을 만들면, 직선 위에 있지 않은 나머지 한 점 P_3가 존재하므로 (1)에 의해 평면을 결정한다(생성한다).

(2)$\Longrightarrow$(3) l과 m의 교차하는 점 P를 P_1이라 하고, P와는 다른 점을 l과 m에서 각각 하나씩 가져와서 $\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ 라 하면 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$는 한 직선 위에 있지 않으므로 (2)에 의해 평면을 결정한다(생성한다).

(3)⟹(4) l과 m이 평행일 때, l상의 한 점 P와 m상의 한 점 Q로 직선 n을 만들면, 한 점 P에서 교차하는 두 직선 l, n이 만들어지므로 (3)에 의해 평면이 결정한다(생성한다).

(4)⟹(1) 한 직선 l과 그 직선 위에 있지 않은 한 점 P이 주어질 때, 평행선 공준에 의해 점 P를 지나면서 주어진 직선에 평행한 직선 m을 꼭 하나만 그을 수 있다. (4)의 조건을 만족하므로 평면을 결정한다(생성한다).■

(정의3) 공간상의 직선과 평면의 위치관계

(1) 직선 l이 평면 α에 놓여있을 때, 직선이 평면에 포함된다.

$$l \subset \alpha \text{ 혹은 } \exists \mathrm{P} \in l \cap \alpha; \exists \mathrm{Q} \in l \cap \alpha; \mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$$

(2) 직선 l이 평면 α와 한 점 P에서만 만날 때, 직선이 평면과 만난다.

$$\exists ! \mathrm{P} \in l \cap \alpha \text{ 혹은 } l \cap \alpha = \{\mathrm{P}\}$$

(3) 직선 l이 평면 α와 만나지 않을 때, 직선과 평면은 평행하다.

$$l // \alpha \text{ 또는 } l \cap \alpha = \varnothing$$

(정의4) 공간상의 두 평면의 위치관계

(1) 평면 α와 평면 β가 포개어진 상태일 때, 두 평면은 일치한다.

$$\alpha = \beta$$

(2) 평면 α와 평면 β가 어떤 점에서도 만나지 않을 때, 두 평면은 평행하다.

$$\alpha // \beta \text{ 또는 } \alpha \cap \beta = \varnothing$$

(3) 평면 α와 평면 β가 적어도 한 점에서 만날 때, 두 평면은 만난다. 이때, 두 평면을 공유하는 꼭 하나의 직선이 생기는데, 이를 교선이라한다.

$$\alpha \neq \beta \ \wedge \alpha \cap \beta \neq \varnothing \text{ 또는 } \exists ! l\text{:직선 ; } \alpha \cap \beta = l$$

3. 세 평행 평면의 추이성 문제의 증명

(세 평행 평면의 추이성 정리) 서로 다른 세 평면 α, β, γ에 대하여,
$\alpha // \beta$이고, $\beta // \gamma$이면 $\alpha // \gamma$이다.

(증명) $\alpha // \beta$ 이고, $\beta // \gamma$ 이지만 α와 γ는 평행하지 않는 어떤 서로 다른 세 평면 α, β, γ가 존재한다고 하자. $\alpha \neq \gamma$이므로 (정의4)(3)에 의해, $\alpha \cap \gamma := l$ 인 교선 l이 존재한다. 평면 α상에서 직선 l위의 한 점 P에서 만나는(교차하는) l과는 다른 직선 a를 가져오자. 그리고 β상의 한 점 Q와 a로 생성되는 평면을 $\delta := < a, \mathrm{Q} >$라 하자.

그러면 α와 δ는 a를 공유하는 서로 다른 평면이므로 교선이 a가 되어 $a = \alpha \cap \delta$라 둘 수 있다. 또한 β와 δ역시 Q를 공유하는 서로 다른 평면이므로 그 교선을 b

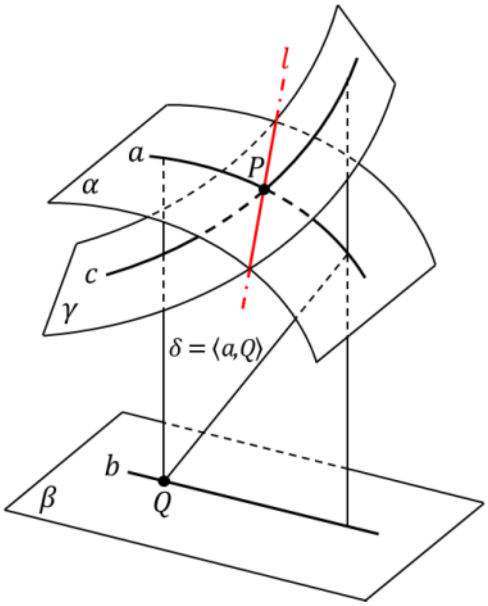
라 두면 $b=\beta\cap\delta$이다.

$\alpha//\beta$이므로 $a\cap b=(\alpha\cap\delta)\cap(\beta\cap\delta)$ $=(\alpha\cap\beta)\cap\delta=\varnothing\cap\delta=\varnothing$이고, 직선 a,b가 모두 동일한 평면 δ에 놓여있으므로 $a//b$이다.

한편, γ와 δ는 P를 공유하는 서로 다른 평면이므로 그 교선을 c라 두면 $c=\gamma\cap\delta$이다.

$\beta//\gamma$이므로 $b\cap c=(\beta\cap\delta)\cap(\gamma\cap\delta)$ $=(\beta\cap\gamma)\cap\delta=\varnothing\cap\delta=\varnothing$이고, 직선 b,c가 모두 동일한 평면 δ에 놓여있으므로 $b//c$이다.

$a,b,c\subset\delta$이고 $a\cap c=\{\mathrm{P}\}$에서 평행선 공준에 의해 P를 지나는 b의 평행선은 유일하므로 $a=c$이다. 그러면 $\alpha=\ <a,l>\ =\ <c,l>\ =\gamma$를 만족하여 $\alpha\neq\gamma$임에 모순이다. 따라서 서로 다른 세 평면 α,β,γ에 대하여, $\alpha//\beta$ 이고, $\beta//\gamma$ 이면 $\alpha//\gamma$이다.■



[그림 2] (세 평행 평면의 추이성 정리)

4. 세 평행 직선의 추이성 문제의 증명

(정리2) 직선 l과 평면 α가 평행하면, 직선 l을 포함한 평면 β와 평면 α의 교선 m은 직선 l과 평행하다.

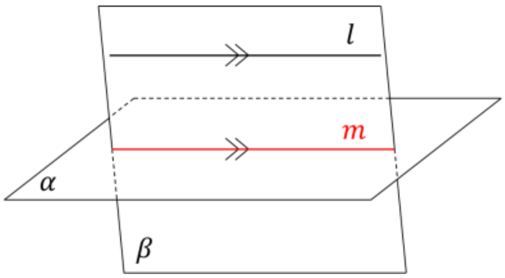
(증명) $l\subset\beta$, $m=\alpha\cap\beta\subset\beta$이므로 l,m은 동일평면 β상에 있다.

그런데, l과 α는 평행하므로

$$l\cap m=l\cap(\alpha\cap\beta)$$

$=(l\cap\alpha)\cap\beta=\varnothing\cap\beta=\varnothing$

로 부터, l과 m은 만나지 않는다. 따라서 (정의2(3))에 의해 l과 m은 평행하다.■



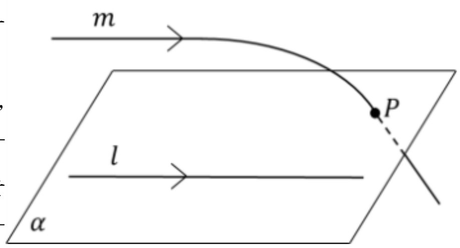
[그림 3] (정리2)

(정리3) 두 직선 l, m이 평행할 때, 직선 l을 포함하고, 직선 m을 포함하지 않는 평면 α는 직선 m과 평행이다.

(증명) 평면 α가 직선 m과 평행하지 않다면, (정의3(3))에 의해 $\alpha\cap m\neq\varnothing$이다. 그러면 $\mathrm{P}\in\alpha\cap m$인 적당한 점 P가 존재한다. $l//m$이므로 (정의2(3))에 의해

$l \cap m = \varnothing$이고, 여기에서 $\mathrm{P} \in m$ 이므로 $\mathrm{P} \not\in l$이다.

그러면 $<l,m> = <l,\mathrm{P}>$이다. 한편, $\mathrm{P} \in \alpha$ 이고, $l \subset \alpha$ 이므로 $<l,\mathrm{P}> = \alpha$ 가 되어서 $<l,m> = \alpha$ 를 만족한다. 이는 $m \subset \alpha$ 가 되어 평면 α가 직선 m을 포함하지 않음에 모순이다. 따라서 평면 α는 직선 m과 평행이다.■



[그림 4] (정리3)

(세 평행 직선의 추이성 정리) 서로 다른 세 직선 l,m,n에 대하여, $l//m$이고, $m//n$이면 $l//n$이다.

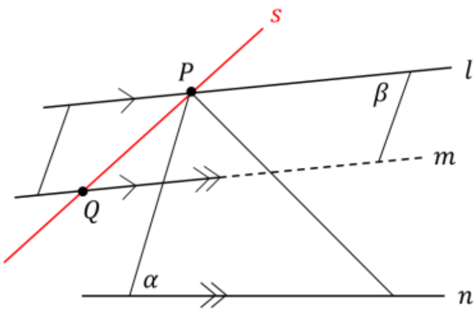
(증명) $l//m$이고, $m//n$이지만 $l//n$은 아닌 어떤 서로 다른 세 직선 l,m,n이 존재한다고 하자. 그러면 (정의2)에 의해, 두 직선 l,n은 한 점에서 만나거나, 꼬인 위치관계에 있다.

(1) l,n이 한 점 P에서 만나는 경우,

m은 l,n과 평행하므로 점 P는 직선 m위에 있지 않다. (정의1)에 의해 평면 $\alpha := <m,\mathrm{P}>$를 생성하자. m과 l은 평행하므로 동일평면에 놓여있고, $\mathrm{P} \in l$이므로 $\alpha = <m,l>$이다. 비슷하게, m과 n은 평행하므로 동일평면상에 놓여있고, $\mathrm{P} \in n$이므로 $\alpha = <m,n>$이다. 평면 α상에서 직선 m과 그 직선 위에 있지 않은 한 점 P가 주어질 때, 평행선 공준에 의해 점 P를 지나는 직선m의 평행선은 꼭 하나만 그을 수 있으므로 $l = n$이다. 이는 $l \neq n$임에 모순이다.

(2) l,n이 꼬인 위치관계에 있는 경우,

직선 n과 직선 l상의 한 점 P에 관해, (정의1)로 부터 평면 $\alpha := <n,\mathrm{P}>$를 생성하면 l,n이 꼬인 위치관계에 있으므로 한 평면 위에 있지 않다. 따라서 $l \not\subset \alpha$이다. 평행한 두 직선 m,l에 관해, (정리1)(4)로 부터 평면 $\beta := <m,l>$를 생성하면 l,n이 꼬인 위치관계에 있으므로 한 평면 위에 있지 않다. 따라서 $n \not\subset \beta$이다. 그런데, 가정으로부터 n과 m은 평행하므로, (정리3)에 의해, 직선 n은 평면 β와 평행하다.



[그림 5] (세 평행 직선의 추이성 정리)(2)

$\alpha = \beta$이면 꼬인 위치관계인 직선 l,n이 한 평면 α위에 있게 되므로 $\alpha \neq \beta$이고, 직선 l상의 점 P는 평면 α와 β를 공유하므로 (정의4)(3)에 의해 평면 α와 β의 점

P를 품는 어떤 교선 s가 존재한다. 직선 n은 평면 β와 평행하고, 직선 n을 포함한 평면 α와 평면 β의 교선이 s이므로 (정리2)에 의해 직선 n과 s는 평행하다.

$l\not\subset\alpha$이므로 $s\neq l$ 이고, 직선 s와 l은 한 점 P에서 만난다. 직선 m과 l은 평행하므로 평면 β상에서 평행선 공준에 의해 직선 s는 m과 한 점 Q에서 만난다. n과 s는 평행하므로 동일평면상에 놓여있고, $\mathrm{Q}\in \mathrm{s}$ 이므로 (정리1)에 의해, $<n,s> = <n,\mathrm{Q}>$이다. 또한, n과 m은 평행하므로 동일평면상에 놓여있고, $\mathrm{Q}\in m$ 이므로 (정리1)에 의해 $<n,m> = <n,\mathrm{Q}>$이다.

결국 $<n,s> = <n,m>$가 되어 n,s,m은 모두 동일평면에 있다. 직선 s와 m은 한 점 Q에서 만나고, 직선 n과 s는 평행하고, n과 m은 평행하므로 평행선 공준에 의해 $s=m$이 된다. 그러나 $\mathrm{P}\in s$이지만 m은 점 P를 품는 직선 l과 평행하므로 $\mathrm{P}\not\in m$이 되어 $s\neq m$ 임에 모순이다.

따라서 서로 다른 세 직선 l,m,n에 대하여, l과 m이 평행하고, m과 n이 평행하면 l과 n이 평행하다.■

5. 두 평행 평면에서 직선의 통과성 문제의 증명

(삼수선의 정리) 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α위의 직선 l 그리고, 직선 l위의 한 점 H, 평면 α위에 있으면서 직선 l위에 있지 않은 점 O에 관하여 다음이 성립한다.

(1) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha,\ \overline{\mathrm{OH}}\perp l \Rightarrow \overline{\mathrm{PH}}\perp l$

(2) $\overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha,\ \overline{\mathrm{PH}}\perp l \Rightarrow \overline{\mathrm{OH}}\perp l$

(3) $\overline{\mathrm{PH}}\perp l,\ \overline{\mathrm{OH}}\perp l,\ \overline{\mathrm{PO}}\perp\overline{\mathrm{OH}} \Rightarrow \overline{\mathrm{PO}}\perp\alpha$

(삼수선의 따름정리) 평면 α와 평면 α위에 있지 않은 한 점 P에 대하여, P에서 평면 α로의 수선과 수선의 발을 작도할 수 있다.

(증명) 아래의 (ⅰ),(ⅱ),(ⅲ),(ⅳ)의 순서대로 절차를 밟도록 하자.

(ⅰ) 평면 α상에서 점 P와 충분히 떨어진 점 Q를 잡고, Q를 지나는 α상의 직선 l을 긋는다.

(ⅱ) $\mathrm{P}\not\in l$ 이므로 평면 $\beta := <l,\mathrm{P}>$를 생성할 수 있다. 평면 β상의 점 P에서 직선 l로 수선을 내려 그 수선의 발을 R이라 하자.

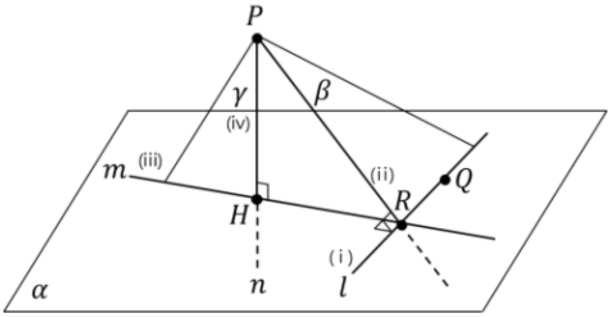
(ⅲ) 평면 α에서 점 R을 지나는 직선 l의 수선 m을 긋는다.

(ⅳ) $\mathrm{P}\not\in m$ 이므로 평면 $\gamma := <m,\mathrm{P}>$를 생성할 수 있다. 평면 γ상의 점 P에서 직선 m으로 수선 n을 내려 그 수선의 발을 H이라 하자.

($\mathrm{R}\neq\mathrm{H}$가 되로록 조절할 수 있다. $\mathrm{R}=\mathrm{H}$가 되면 (ⅰ)의 직선 l과는 다른 직선 l'을

그리거나, 점 Q와는 다른 점 Q′을 찍어 다시 처음부터 절차를 밟도록 한다.)

그러면, $\overline{\mathrm{PR}}\perp l$, $\overline{\mathrm{HR}}\perp l$, $\overline{\mathrm{PH}}\perp\overline{\mathrm{HR}}$ 을 만족하여 (삼수선의 정리)(3)에 의해 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\alpha$이다. ∎



[그림 6] (삼수선의 따름정리)

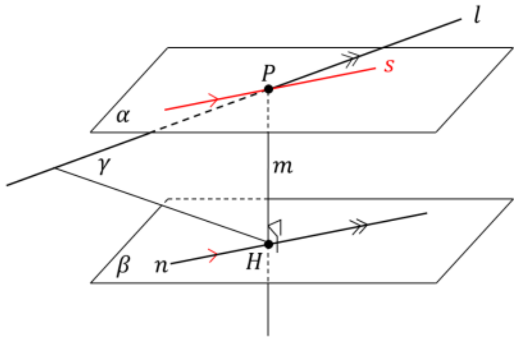
(두 평행 평면에서 직선의 통과성 정리) 두 평면 α,β가 평행할 때, 평면 α와 한 점에서 만나는 직선 l은 평면 β와도 한 점에서 만난다.

(증명) 두 평면 α,β가 평행할 때, 평면 α와 한 점에서 만나지만 평면 β와는 만나지 않는 직선 l이 존재한다고 하자. 그러면, (정의3)직선 l과 평면 β의 위치관계에 의해 (1) 직선 l이 평면 β에 포함되거나, (2) 직선 l이 평면 β와 평행하다.

(1) 직선 l이 평면 β에 포함될 경우, $l\subset\beta$ 이고, 가정에서 두 평면 α,β가 평행하므로 $\alpha\cap\beta=\varnothing$이다. 평면 α와 직선 l이 한 점에서 만나므로 $\alpha\cap l\neq\varnothing$이다. 그러면, $\varnothing\neq\alpha\cap l\subset\alpha\cap\beta=\varnothing$을 만족하여 모순이다.

(2) 직선 l이 평면 β와 평행할 경우, $l\cap\beta=\varnothing$이다. (삼수선의 따름정리)에 의해 직선 l과 평면 α의 교점 P에서 평면 β로의 수선 m과 수선의 발 H를 작도할 수 있다. 그러면 $\mathrm{P}\in l$, $\mathrm{P}\in m$, $\mathrm{H}\in m$이다. 가정에 의해 $\mathrm{H}\notin l$이 되어서 $l\neq m$이고, 직선 l,m은 P에서 교차하므로, (정리1)(3)에 의해, 평면 $\gamma:=<l,m>$을 생성할 수 있다.

$\mathrm{P}\in\gamma$, $\mathrm{P}\notin\beta$ 이므로 $\gamma\neq\beta$ 이지만, $\mathrm{H}\in\gamma\cap\beta$이므로 (정의4)에 의해 γ와 β의 교선 n이 생긴다. 즉, $\gamma\cap\beta=n$이라고 하자. 그러면 $n\subset\gamma$, $n\subset\beta$ 이므로 $l\cap n\subset l\cap\beta=\varnothing$가 되어, 직선 l과 직선 n은 동일평면 $\gamma:=<l,m>$에서 서로 만나지 않으므로 $l//n$이다.



[그림 7] (두 평행 평면에서 직선의 통과성 정리)

이제 P를 포함하는 서로 다른 평면 γ와 α의 교선 s를 만들면, $\gamma\cap\alpha=s$가 된다. 그러면, $s\subset\gamma$, $s\subset\alpha$ 가 된다. 가정 $\alpha//\beta$으로 부터 $\alpha\cap\beta=\varnothing$이고, $n\subset\beta$로부터 $s\cap n\subset\alpha\cap\beta=\varnothing$이다. 따라서 직선 s와 직선 n역시 동일평면

$\gamma := < l, m >$에서 서로 만나지 않으므로 $s // n$이다.

여기에서, P$\in$s이고, P$\in l$이므로 평행선 공준에 의해, 평면 γ상에서 점 P를 지나는 n의 평행선은 유일하므로 $l = s$가 된다. 그러나 이는 $l = s = \gamma \cap \alpha \subset \alpha$가 되어 가정이었던 직선 l과 평면 α가 한 점에서 만남에 (정의3)에 의해 모순이다.

따라서 두 평면 α, β가 평행할 때, 평면 α와 한 점에서 만나는 직선 l은 평면 β와도 한 점에서 만난다.■

IV. 결론 및 연구의 가치

여러 수학 체계가 세워지는 역사적인 배경을 살펴보면 항상 그 앞에는 수학의 난제가 있었다. 수학의 여러 난제는 수학자들을 앞으로 나아가게 만든다.

괴델의 제1불완전성 정리에 따르면 산술을 포함하는 어떤 무모순인 공리계는 참이지만 증명할 수 없는 명제가 존재한다. 이런 이유로 순환논증[9)]의 오류가 생기고, 역설(paradox)과 함께 증명 불가능한 문제들이 생겼다. 그럴 때마다 수학자들은 수학적 도구를 바꾸거나 공리계를 수정하여 새로운 수학 체계를 만드는 등 새로운 방법으로 난제를 해결하기도 했다.

집합과 평면기하를 활용한 공간기하의 3대 문제 증명에서는 비유클리드 기하로의 시사점을 열어두고 ‘집합과 명제’인 현대수학과 ‘유클리드 논증기하’인 고전수학의 결합을 모색하는 가능성의 계기를 마련했다. 또한 주요 3대 문제의 부정명제가 평행선 공준과 모순됨을 보임으로써 보다 안전한 곳으로 회피하여 정당성을 부여하였다.

새로운 증명 방식이 기존 개념들과 조화를 이루어 사용될 수 있는지, 다른 유사 주제의 증명에도 사용될 수 있는지 고찰해 보면 기존에 작성했던 석사 논문 “공간도형 단원의 교과서 분석 및 재구성(평행공준을 중심으로)(p.59∼84)”에서 같은 단원의 대부분의 정리를 모두 집합으로 증명한 내용을 실어두었으나 지면상 생략하였다.

본문에서는 특정 교과서 1종(이준열, 2107)만 인용이 되었고, 다른 교과서들에서는 어떻게 다루는지에 대한 기술을 언급하지 않은 이유 역시 기존에 작성한 석사 논문 “공간도형 단원의 교과서 분석 및 재구성(평행공준을 중심으로)(p.40∼48)”에서 구체적으로 2015 교육과정에 해당하는 7종 교과서의 세 평행 평면의 추이성 문제에 대한 분석을 교과서 B∼H까지 실어두었으나 분량이 방대하여 지면관계상 같은 이유에서 언급하지 않았다.

---

9) 오일러도 무한의 수렴성에 대한 오개념 때문에 결론을 증명과정에 사용하는 순환논증의 오류를 범하기도 하였다.

저자와 비슷한 연구를 진행한 논문 “이중석, 공간공리 기하 단원의 교재연구 분석 및 개선 방안(空間論證 幾何 單元의 交材內容 分析 및 改善 方案)(제주대학교, 2001, p.3~9)”에서는 너무 많은 정의 또는 공준을 도입하여 복잡한 연구가 진행되었지만, 본문에서 사용한 평면의 정의는 공간상의 평면 결정 조건의 한 가지를 선택하여 정의한 것이므로 너무 많은 정의를 선택한 것은 아니라고 보이며 또한 공준을 추가한 것은 없다.

따라서 본 연구는 주요 문제에 논리적 순서가 부여되어 수학과 수학 교육적인 가치를 갖게 된다. 나아가 공간기하에서 집합을 활용하여 구성할 수 있게 하고, 비유클리드 공간기하의 정당성을 부여하여 추후의 연구 가능성을 열게 될 것이다.

참고문헌

[1] 이준열 외 7인, 고등학교 기하와 벡터, 천재교육, 2017.
[2] 교육부, 수학과 교육과정, 교육부 고시 제2015-74호[별책8], 2015
[3] 이중석, 공간공리 기하 단원의 교재연구 분석 및 개선 방안, 제주대학교, 2001

Do, Kang Su
Department of Mathematics Science Education
Shindo High School
Busan, 48083 Korea
E-mail address: dks0414@gmail.com

Ryu, Hyun ki
Department of Mathematics
Pusan National University
Busan, 46241 Korea
E-mail address: jamie0307@pusan.ac.kr

Kim, Kwang Su
Department of Scientific Computing
Pukyong National University
Busan, 48513 Korea
E-mail address: kwangsukim@pknu.ac.kr