韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2023.37.3.419
제 37집 제 3호, 2023. 9. 419-442

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 37, No. 3, Sep. 2023. 419-442

초등학교 5학년 학생들의 일반화된 산술 관점과 함수적 관점에서의 변수에 대한 이해

방 정 숙 (한국교원대학교, 교수)
김 리 나 (한국교원대학교 대학원, 학생)†
곽 은 애 (성남제일초등학교, 교사)

본 연구는 초기 대수의 일반화된 산술 관점과 함수적 관점에서 초등학교 5학년 학생들의 변수에 대한 이해 실태를 조사하였다. 구체적으로 전자에서는 1의 성질, 덧셈의 교환법칙, 곱셈의 결합법칙, 산술 맥락에서의 문제 상황을 포함하였고, 후자에서는 덧셈 관계, 곱셈 관계, 제곱 관계, 선형 관계를 다루었다. 11개 학교에서 246명의 학생들을 대상으로 조사한 결과, 학생들은 공통적으로 변수에 해당하는 특정한 값을 구할 수 있었고, 변수를 활용한 식에서 다른 기호를 사용하여 식을 바꿔 쓸 수도 있다는 점을 이해하는 것으로 드러났다. 그러나 정해지지 않은 양을 포함한 산술 맥락에서의 문제 상황을 변수를 활용하여 일반화된 식으로 나타내는 데 많은 어려움을 겪었다. 또한 1의 성질과 덧셈의 교환법칙을 나타낸 식에서 변수는 자연수만 된다고 생각하는 경향이 있었으며, 약 25%의 학생들은 변수가 한 가지 수로 정해져 있다고 생각하였다. 이와 같은 연구 결과를 바탕으로 본 논문은 초등학생들의 변수 이해 및 지도에 대한 시사점을 제시하였다.

Ⅰ. 서론

변수(variables)는 대수를 이해하는 데 핵심적인 역할을 하는 기본 개념이다. 변수를 사용하는 것은 초기 대수에서도 기초적인 부분이며(Carraher & Schlieman, 2007), 규칙을 간결하게 표현할 수 있고 임의의 모든 경우를 나타낼 수 있다는 장점이 있기 때문에(Schoenfeld & Arcavi, 1988), 규칙을 일반화하여 식으로 표현하는 데 필수적인 도구가 된다. 또한 수학 대부분의 분야에서 변수를 사용한 대수적인 표현이 쓰인다는 점을 고려했을 때, 변수를 제대로 이해하는 것이 중요하다(Ventura et al., 2021).

우리나라 수학과 교육과정에서는 초등학교 5~6학년군에서 대응 관계를 □, △ 등과 같은 기호 변수를 사용하여 식으로 나타내는 것과 중학교 1~3학년군에서 다양한 문제 상황을 문자를 사용한 식으로 나타내는 것과 더불어 문자의 특징을 이해하고 그 유용성을 인식할 것을 포함하고 있다(교육부, 2022). 이처럼 교육과정에서는 변수와 관련된 내용이 간단히 제시되고 있는 반면에, 학교 수학에서 변수의 의미는 대개 맥락에 따라 '패턴을 일반화하는 도구', '방정식의 해에 의한 자리지기', '독립변수', '종속변수', '매개변수', '임의의 대상을 나타내는 기호' 등으로 설명된다(Usiskin, 1988). 학생들이 다양한 맥락에서 사용된 변수의 의미를 올바르게 이해하고 표현하는 것은 대수와 관련된 학습에서 필수적인 부분으로 강조된다(김남희, 1997).

이렇듯 변수에 대한 이해가 중요한데 학생들은 변수를 학습하는 과정에서 다양한 어려움에 직면한다. 예를 들어, 학생들은 함수적 상황에서 독립변수와 종속변수를 구별하고 그에 해당하는 특정한 값을 구하는 것을 어려

* 접수일(2023년 8월 21일), 심사(수정)일(2023년 9월 11일), 게재확정일(2023년 9월 23일)
* MSC2000분류 : 97H20
* 주제어 : 변수, 일반화된 산술 관점, 함수적 관점
† 교신저자 : kimleena@hanmail.net

위한다(김남희, 1992; 김정원, 2014). 또한 학생들은 산술 또는 함수 관계의 규칙을 변수를 활용해 일반화하여 표현하는 것도 어려워한다(하수현, 이광호, 2011; Blanton et al., 2015). 그러나 더 근본적인 어려움은 학생들이 변수의 의미 자체를 정확하게 이해하는 것을 어려워한다는 것이다(Brizuela et al., 2015). 구체적으로, 학생들은 변수가 임의의 대상을 나타내는 기호라는 것을 이해하지 못하고 변수가 하나의 값으로 정해져 있다거나 하나의 식에 쓰인 두 개의 다른 변수는 항상 다른 값을 갖는다고 인지하기도 한다(강소희, 방정숙, 2008; Blanton & Kaput, 2005). 본 연구는 이러한 선행 연구를 바탕으로 초기 대수(early algebra)와 관련하여 초등학생들의 변수에 대한 이해를 자세히 탐색하고자 하였다.

초기 대수에 대한 연구는 주로 Kaput(2008)에 의한 세 가지 내용 영역, 즉 산술에서 발생하는 구조와 관계에 대한 연구, 함수에 대한 연구, 모델링 언어에 대한 연구를 바탕으로 한다. 이후 Blanton 외(2011)는 초기 대수의 핵심 아이디어로 '대수적 사고를 위한 맥락으로서의 산술', '두 양의 동치 표현으로서의 등식', '다목적 도구로서의 변수', '관계를 일반화하기 위하여 양적 추론 사용하기', '대수로 가는 경로로써 함수적 사고'를 제안하였다. Kieran 외(2016)는 기존의 선행 연구를 종합적으로 검토한 결과, Kaput의 처음 두 가지 내용 영역에 초점이 맞춰져 있음을 보고하면서, 초기 대수의 내용 영역을 크게 일반화된 산술 관점(generalized arithmetic perspective)과 함수적 관점(functional perspective)으로 구분하였다. 전자는 주로 수나 양, 연산, 성질, 동치 등과 같은 개념 및 대상을 다루고, 후자는 주로 공변, 변화 등을 다룬다. 다만 이 두 가지 관점에서 구조나 관계 등을 표현할 때 공통적으로 그림(또는 다이어그램), 식, 등식, 변수 등을 사용한다. 다시 말해, 변수는 일반화된 산술 관점과 함수적 관점에서 공통적으로 사용된다.

이를 종합하면, 학생들의 변수에 대한 이해를 조사할 때 일반화된 산술 관점과 함수적 관점으로 구분하여 자세히 탐색할 필요가 있다. 예를 들어, 학생들이 변수의 의미를 이해하는 것을 어려워한다고 했을 때, 어떤 관점에서 변수가 제시되었는지에 따라 그 이해 정도가 다를 수 있기 때문이다. 이와 유사하게 변수를 사용하여 식으로 표현하는 것을 어려워한다고 했을 때, 어떤 상황이나 관계를 일반화한 식인지에 따라 학생들의 이해 정도가 다를 수 있기 때문이다.

이와 같은 연구의 배경과 필요성을 바탕으로 본 연구에서는 수와 연산의 성질, 함수적 관계 및 기호 변수에 대하여 학습한 경험이 있는 초등학교 5학년 학생을 대상으로 변수에 대한 이해를 조사하였다. 변수에 대한 학생들의 이해를 좀 더 면밀하게 알아보기 위하여 선행 연구 분석을 통해 변수의 이해에 대한 문항 구성의 기준을 마련하고 이를 토대로 한 검사 도구를 개발하였다. 또한 일반화된 산술 관점과 함수적 관점에서 제시하는 내용에 따라 다양한 과제를 제시하여 학생들의 변수에 대한 이해 정도를 자세히 탐색하는 데 주요 목적을 두었다.

Ⅱ. 연구의 배경

1. 이론적 배경

가. 일반화된 산술 관점에서의 변수

일반화된 산술 관점에서는 수나 양, 연산, 성질, 동치 등을 다루는 데 이들은 서로 긴밀하게 연결되어 있다(Blanton et al., 2011; Kieran et al., 2016). 여기서 수의 성질은 0의 성질($a+0=a$)과 1의 성질($a\times 1=a$), 연산의 성질은 덧셈의 교환법칙($a+b=b+a$)과 결합법칙($a+(b+c)=(a+b)+c$), 곱셈의 교환법칙($a\times b=b\times a$)과 결합법칙($a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$) 등을 의미한다(방정숙, 최지영, 2011).

일반화된 산술 관점에서의 변수 개념은 주로 Usiskin(1998)의 일반화를 위한 도구, 즉 특정한 식들에서 공통적인 성질을 발견하고 이를 일반화할 수 있는 식을 변수를 사용하여 표현하는 것을 의미한다. 예를 들어, 덧셈의

교환법칙(△+○=○+△)과 같은 수학적 구조와 관계를 일반화할 때 사용하는 변수 개념이다(Blanton et al., 2011). 이외에도 Carraher와 Schliemann(2007)은 정해지지 않은 양을 포함한 산술 맥락에서의 문제 상황에 대해 변수를 사용하여 표현할 수 있어야 한다고 주장하였다. 예를 들어, 지훈이의 상자와 유나의 상자에는 똑같은 개수의 사탕이 들어있고, 유나는 상자에 있는 사탕뿐만 아니라 사탕 3개를 별도로 더 가지고 있는 상황에서 두 학생이 가지고 있는 사탕의 수를 변수를 사용하여 나타내는 것을 가정해 보자. 지훈이가 가진 사탕의 수를 C라고 나타내면, 유나가 가진 사탕의 수는 $C+3$, 지훈이와 유나가 가지고 있는 사탕의 수는 $C+C+3$ (또는 $C\times 2+3$)과 같이 변수를 사용하여 표현하는 것이다.

일반화된 산술 관점에서 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서를 살펴보면 1학년에서 0의 성질과 덧셈의 교환법칙 및 결합법칙(교육부, 2023a, b)과 2학년에서 1의 성질과 곱셈의 교환법칙을 다루며(교육부, 2023c), 3학년에서 곱셈의 결합법칙과 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 다룬다(김성여 외, 2023). 다만 수나 연산의 성질을 다룰 때, 변수와 직접적으로 관련지어 다루지는 않고 계산하는 과정에서 수나 연산의 성질을 탐색하거나 활용하는 방식으로 다룬다. 이를 토대로 본 연구에서는 수의 성질, 연산의 성질, 산술 맥락에서의 문제 상황을 제시하고 변수에 대한 이해를 파악할 수 있는 문항을 만들어 학생들의 이해 정도를 분석하였다.

나. 함수적 관점에서의 변수

함수적 관점에서는 공변, 변화 등을 다루며 이를 함수표, 그래프, 그림(또는 다이어그램), 등식, 변수 등을 사용하여 표현한다(Kieran et al., 2016). 대수의 내용 영역으로서의 함수적 관점은 과정 영역으로서의 함수적 사고(functional thinking)와 관련되는데, Blanton 외(2011)에 따르면 함수적 사고는 공변하는 양 사이의 관계를 일반화하고, 말, 기호(또는 변수), 표, 그래프 등으로 표현하며 그 표현을 바탕으로 추론하는 것을 수반한다. 초등학생의 함수적 사고에 대한 국내 선행 연구에서는 주로 덧셈 관계($y=x\pm a$), 곱셈 관계($y=ax$), 제곱 관계($y=x^2$), 선형 관계($y=ax+b$)와 같은 함수적 관계를 제시하였다(최지영, 방정숙, 2012). 또한 국외 사례에서는 초등학교 학생들이 공변하는 양 사이의 관계를 일반화하여 표현하는 것이 가능했다는 점을 부각하였다(Blanton et al., 2015; Moss & London McNab, 2011; Pinto & Cañadas, 2018).

함수적 관점에서의 변수 개념은 Usiskin(1998)의 변화하는 양 사이의 관계를 나타내는 변수 개념에 해당한다. 즉, 관련 있는 두 변수가 서로 영향을 주고받는 경우를 의미하며, 이때의 두 변수를 독립변수와 종속변수로 지칭한다(김남희, 1997). 우리나라에서는 초등학교 학생들에게 기호를 사용하여 이러한 변수를 나타내게 하는 반면에, 국외 사례에서는 대응 관계를 일반화하고 표현하는 과정에서 학생들이 문자 변수를 적극적으로 사용하도록 지도하였다(예, Blanton et al., 2015; Brizuela & Schliemann, 2004; Carraher et al. 2008). 특히, Blanton 외(2015)에서는 학생들이 일단 변수를 활용하여 일반화된 규칙을 표현하는 것을 학습하게 된 이후에는 해당 규칙을 언어로 표현하는 것보다 변수를 활용한 식으로 표현하는 것을 더 쉽게 생각하는 경향도 드러났다.

2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서 중 박만구 외(2023)를 살펴보면 5학년에서 대응 관계를 다루며 변수가 도입되는데, 구체적으로 두 양 사이의 대응 관계를 식으로 간단하게 나타내기 위해서 각 양을 ○, □, △, ☆ 등과 같은 기호로 표현할 수 있다는 점을 제시하고 있다. 이때, ○, □ 대신에 다른 기호인 ♣, ♧로도 나타낼 수 있다는 점을 언급함으로써, 변수를 나타내는 기호가 달라져도 해당 변수가 원래 나타내는 대상은 같음을 생각하게 할 수 있다. 또한 ○, □가 관계없이 변할 수 있는지 생각하게 함으로써 독립변수와 종속변수가 서로 영향을 주고 받는다는 것을 알게 하였다. 교과서에서 제시하는 함수적 관계를 살펴보면 5학년 교과서에서는 덧셈 관계와 곱셈 관계만을 다루고 있지만 4학년 규칙 찾기 단원에서는 제곱 관계와 선형 관계의 패턴도 일부 제시하고 있다(예, 박성선 외, 2023; 안병곤 외, 2023). 이를 토대로 본 연구에서는 덧셈 관계, 곱셈 관계, 제곱 관계, 선형 관계를 제시하고 변수에 대한 이해를 파악할 수 있는 문항을 만들어 학생들의 이해 정도를 분석하였다.

다. 변수와 관련하여 초등학생들이 겪는 어려움

변수에 대한 학습 또는 학생들의 전반적인 이해를 조사한 선행 연구에서 초등학생들이 겪는 어려움을 요약하면 크게 세 가지로 나눌 수 있었다. 첫째, 학생들은 미지수로서의 변수의 값, 즉 변수에 해당하는 특정한 값을 구할 때 독립변수와 종속변수를 제대로 구분하지 못하였고, 그 값을 구하는 것도 어려워하는 경향이 있었다. 예를 들어, 김정원(2014)에서 초등학교 4~6학년 학생들은 두 양의 관계를 서술하는 문항에 대한 정답률이 72.3%인 반면, 값이 큰 종속변수에 대한 대응값의 경우 정답률이 69.1%로 두 양의 관계는 알고 있지만 특정한 값에 대한 대응값을 잘 구하지 못하는 것으로 나타났으며, 정답을 맞히지 못한 학생들은 독립변수와 종속변수의 순서를 바꾸어 두 양의 관계를 서술하거나 종속변수를 독립변수로 간주하여 대응값을 구하려는 경향이 있었다.

둘째, 학생들은 산술 또는 함수 관계의 규칙을 단어나 변수를 활용하여 일반화하여 표현하는 것에 어려움을 보였다. 여러 선행 연구를 통해 초등학생들도 일반화의 과정에서 변수와 변수 표기법을 이해하고 활용할 수 있다는 가능성이 밝혀졌지만, 여전히 산술 또는 함수 관계를 식으로 일반화하는 과정에서 학생들이 직면했던 어려움을 확인할 수 있었다(Blanton et al., 2015; Brizuela et al., 2015; Carpenter et al., 2003; Carraher et al., 2008). 예를 들어, 정해지지 않은 양을 포함한 산술 맥락에서 주어진 문제 상황을 식으로 표현할 때, 초등학교 3학년 학생들은 □+□+8과 같은 식을 쓴 경우에도 그 식 자체를 대상으로 받아들이지 못하고 대신에 '□+□+8=?'와 같이 더 계산해야 할 중간 과정으로만 생각하는 경향이 있었다(방정숙, 최인영, 2016). 이는 국외 사례에서도 드러났는데 유치원생과 초등학교 1학년 학생들도 문제 상황을 모두 등식으로 표현할 필요가 있다고 생각하는 경향이 있었다(Ventura et al., 2021). 또한 함수 관계의 규칙을 식으로 일반화하는 경우에는 학생들이 종속변수를 변수로 표현해야 할 필요성을 인식하지 못하여 '$3x+2$'로 표현하는 등 독립변수와 종속변수를 연결하지 못하였다(Blanton, 2008).

셋째, 학생들은 변수의 의미를 이해하는 것에 어려움을 보였다. 여기서 변수의 의미를 이해한다는 것은 변수에 해당하는 수가 여러 가지가 될 수 있다는 것, 식으로 일반화했을 때 주어진 수의 영역에서 변수의 모든 값에 대해 참이라는 것, 하나의 식에 쓰인 두 개의 다른 변수의 의미를 아는 것 등을 말한다. 학생들은 정해져 있지 않거나 알려지지 않은 양의 모호성을 받아들이기 어려워하고 대신에 변수에 특정한 값을 할당하고자 하는 경향이 있었다(방정숙, 최인영, 2016; Blanton et al., 2015). 이와 유사하게 변수에 해당하는 수가 하나의 값으로 정해져 있다거나 변수가 다르면 그 값도 다르다고 인식하기도 하였다(강소희, 방정숙, 2008). 또한 학생들은 변수가 특정한 수일 때 식이 성립한다는 것을 이해하지만, 변수가 임의의 수일 경우는 식이 성립한다는 것을 이해하기 어려워하는 경향이 있다(Fujii & Stephens, 2008).

이와 같이 변수와 관련하여 초등학교 학생들이 겪는 어려움에 대한 선행 연구를 바탕으로 본 연구의 문항 구성의 기준을 마련하였다. 즉, 미지수로서의 변수의 값 구하기, 변수를 활용하여 식으로 표현하기, 변수의 의미 이해하기로 나누어 학생들의 변수에 대한 이해 정도를 살펴보았다.

2. 연구 방법

가. 연구 대상

본 연구는 초기 대수의 일반화된 산술 관점과 함수적 관점에서 초등학교 5학년 학생들의 변수에 대한 이해 실태를 살펴보는 데 그 목적이 있다. 5학년을 연구 대상으로 선정한 것은 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서에서 함수적 관점에 따른 변수의 개념을 5학년 1학기 3단원 '규칙과 대응'에서 학습하기 때문이다. 또한, 일반화된 산술 관점에 따른 변수의 개념은 초등학교 교육과정에 명시적으로 제시되어 있지 않지만, 이론적 배경에서 살펴보았듯이 초등학교 1~3학년의 수와 연산 영역에서 수와 연산의 기본 성질, 등호 등에 대한 내용을 다루고 있다는 점에서, 5학년을 대상으로 변수에 대한 이해 실태를 조사하는 것이 적합하다고 판단하였다.

연구 대상은 기본적으로 편의 표집하였으나, 가능한 여러 지역에서 표집하였다. 구체적으로 특별시 1개, 광역시 1개, 대도시 2개, 중소 도시 4개, 읍면지역 3개의 학교에서 연구 대상을 표집함으로써 결과적으로 11개 학교로부터 258명의 학생들이 실태 조사에 응답하였다. 다만 검사지에 제시된 문항 중 90% 이상 무응답을 한 학생은 연구 대상에서 제외하여, 최종적으로 선정한 분석 대상은 총 246명이었고, 특별시 21명, 광역시 22명, 대도시 51명, 중소 도시 105명, 읍면 지역 47명이 해당되었다.

나. 검사 도구

본 연구는 검사 도구를 개발하기 위하여 일반화된 산술 관점 또는 함수적 관점에서 변수를 연구한 선행 연구와 2015 개정 수학과 교육과정에 따른 교과서에서 변수와 관련된 활동을 바탕으로 <표 Ⅱ-1>과 같은 문항 구성의 기준을 마련하였다. 이를 통하여 변수 개념에 대한 이해를 일반화된 산술 관점과 함수적 관점에서 각각 살펴보고자 하였다. 더불어 같은 문항 내용을 사용하여 학생들이 겪는 어려움이 관점별로 차이가 있는 것인지, 아니면 어느 관점에서건 공통적으로 해당 변수 개념에 기인한 것인지 알아보고자 하였다.

<표 Ⅱ-1> 변수의 이해에 대한 문항 구성의 기준

문항 내용	일반화된 산술 관점	함수적 관점
미지수로서의 변수의 값 구하기	A. 변수에 해당하는 특정한 값을 구하기	
변수를 활용하여 식으로 표현하기	B. 일반화하여 변수를 활용한 식으로 표현하기	
	B-1. 수나 연산의 성질 또는 산술 맥락에서의 문제 상황을 일반화하여 식으로 표현하기	B-2. 독립변수와 종속변수를 사용하여 대응 관계를 일반화하여 식으로 표현하기
	C. 일반화된 식에서 사용한 기호 외의 다른 기호를 사용하여 식으로 표현하기	
변수의 의미 이해하기	D. 일반화된 식에서 사용한 변수의 속성이나 관계 파악하기	

이와 같은 문항 구성의 기준을 바탕으로 개발된 검사지는 총 2회에 걸친 예비 검사를 통하여 수정 및 보완하였다. 1차 예비 검사는 특별시와 대도시에 위치한 초등학교의 각 1개 학급 학생들을 대상으로 하였으며, 2차 예비 검사는 광역시, 중소 도시 및 읍면 지역의 초등학교에서 각 1개 학급 학생들을 대상으로 하였다. 이는 최대한 다양한 학급에서의 예비 검사를 통하여 검사지의 적절성을 파악하고자 하는 의도였다. 이러한 예비 검사의 결과를 바탕으로 문항의 유형과 난이도 및 사용한 용어, 문항의 구성과 수를 조정하였다. 이를 통하여 최종적으로 확정된 검사지의 내용 및 문항 구성은 <표 Ⅱ-2>와 같다.

<표 Ⅱ-2> 검사지의 내용 및 문항 구성

일반화된 산술 관점		함수적 관점	
유형	문항 구성(하위 문항 수)	유형	문항 구성(하위 문항 수)
1의 성질	A(1), B-1(1), C(1), D(1)	덧셈 관계	A(4), B-2(1), C(1), D(2)
덧셈의 교환법칙	A(1), B-1(1), C(1), D(1)	곱셈 관계	A(4), B-2(1), C(1), D(2)
곱셈의 결합법칙	A(1), B-1(1), C(1), D(1)	제곱 관계	A(4), B-2(1), C(1), D(2)
산술 맥락에서의 문제 상황	A(1), B-1(1), C(1), D(1)	선형 관계	A(4), B-2(1), C(1), D(2)

검사지의 내용을 살펴보면, 일반화된 산술 관점에서 다룬 유형은 수나 연산의 성질 중 1의 성질, 덧셈의 교환법칙, 곱셈의 결합법칙이며, 산술 맥락에서의 문제 상황을 변수를 사용하여 나타내는 것도 포함하였다. 함수적 관점에서 다룬 유형은 함수적 관계 중 덧셈 관계, 곱셈 관계, 제곱 관계, 선형 관계이다. 각 유형마다 하위 문항은 <표 Ⅱ-1>에서 제시한 바와 같이 'A', 'B-1(또는 B-2)', 'C', 'D'의 순서로 제시하였다. 일반화된 산술 관점 중 수나 연산의 성질을 다루는 유형은 학생들에게 우선 규칙을 탐색할 수 있는 기회를 제공하기 위하여 규칙을 찾아 글로 써보는 문항을 제시하였으나 변수 이해에 초점을 둔 본 연구의 분석에서는 제외하였다. 이에 일반화된 산술 관점의 각 유형에서 분석하는 문항은 4개씩으로 전체 16문항이 분석 대상이 되었다. 또한 객관식 문항에서 학생들이 답을 '모두' 고르는 것에 어려움을 겪을 수 있어, 검사지 첫 장의 안내문에 '모두 고르는 문제의 답은 2개 이상입니다'라는 문구를 추가하였다.

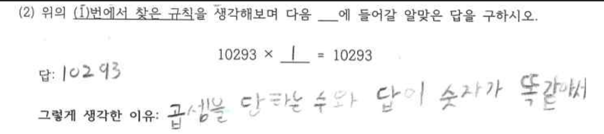
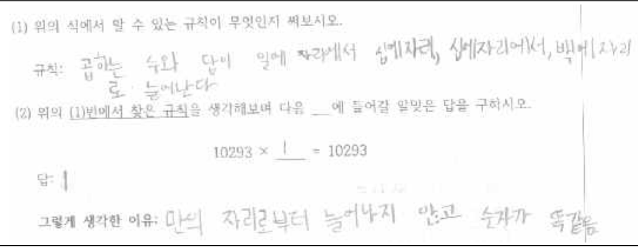
함수적 관점의 문항 중 'A. 변수에 해당하는 특정한 값을 구하기'는 변수의 종류와 위치에 따라 특정한 값을 구하는 것에 영향을 받을 것으로 예상되어 독립변수에 해당하는 가까운 항과 먼 항, 종속변수에 해당하는 가까운 항과 먼 항을 구하는 문제를 표 형태로 각 4개의 하위 문항을 제시하였다. 'B. 일반화하여 변수를 활용한 식으로 표현하기'는 학생들이 변수를 선택하는 데 어려움을 느끼지 않고, 'C. 일반화된 식에서 사용한 기호 외의 다른 기호를 사용하여 식으로 표현하기'를 효과적으로 제시하기 위하여 문항 해결에 사용할 변수를 제시해 주었다. 'D. 일반화된 식에서 사용한 변수의 속성이나 관계 파악하기'는 위에서 표현한 변수를 활용한 식에서 해당 변수가 어떤 수(예를 들어, 자연수, 분수, 소수 등)가 될 수 있는지를 알고 있는지 조사하였고, 함수적 관점에서는 특히 독립변수와 종속변수 사이의 관계에 대한 보기를 추가하였다. 일반화된 산술 관점에서 변수의 의미를 묻는 문항은 1개인데 반해 함수적 관점에서는 독립변수와 종속변수에 대하여 각각 묻는 문항을 제시하여 2개의 문항이 제시되었다. 결과적으로, 함수적 관점에서 분석되는 문항은 하위 문항을 포함하면 각 유형별 8개의 문항으로 전체 32문항이었다(각 문항의 예시는 연구 결과에 함께 제시됨).

다. 자료 수집 및 분석

본 연구는 표집된 연구 대상이 5학년 1학기 3단원을 학습한 이후에 검사지의 문항을 해결할 수 있다는 점을 고려하여 예비 검사는 2022년 7~8월, 본 검사는 9~10월에 시행하여 자료를 수집하였다. 이때 사용한 검사지는 일반화된 산술 관점과 함수적 관점으로 나뉘어져 있으며 각 관점별로 40분의 문항 풀이 시간을 제공하였다. 문항은 되도록 하루 안에 해결하되, 두 관점의 문항을 연이어 풀지 않도록 당부하였다. 자료의 수집은 이메일과 우편을 통하여 이루어졌다. 표집된 학급의 담임교사에게 검사지를 우편을 이용하여 전달하였으며, 학생들의 검사지는 담임교사가 스캔하여 이메일로 전송하거나 우편으로 발송하였다. 이메일로 자료를 회신 받은 경우 추후에 우편을 통하여 원본 자료를 확보하였다.

수집된 자료는 두 명의 연구자가 정답과 오답 여부를 각자 판단 후, 의견이 일치하지 않는 경우 논의를 통하여 결과를 합의하였다. 이때, 이유를 서술하게 되어 있는 문항들의 경우 학생들이 서술한 이유의 적절성을 고려하여 정답 여부를 판단하였다. 예를 들어 [그림 Ⅱ-1]의 (a)는 학생이 답을 10293으로 잘못 기술하였으나 규칙을 파악하고 있으며 문제에서 제시한 빈칸에 정답인 '1'을 썼기 때문에 정답으로 처리하였다. [그림 Ⅱ-1]의 (b)는 답은 맞았으나 1의 성질의 의미로 규칙을 탐색한 것이 아닌 것이 명백하게 드러났기 때문에 오답으로 처리하였다. 무응답의 경우 그 수가 많지 않아 따로 분류하지 않고 오답으로 처리하였다.

코딩한 자료는 SPSS 18.0을 사용하여 빈도 분석 및 교차 분석을 시행하였다. 빈도 분석을 통하여 학생들 응답의 전체적인 경향성을 파악하고자 하였다. 필요한 경우 문항 간의 교차 분석을 통하여 응답의 의미를 파악하고, 빈도 분석에서 드러나지 않은 자료의 특성을 규명하고자 하였다. 검사 도구에서 사용한 문항 간 내적 일치도를 확인한 결과, Cronbach's α값이 .888로 검사 도구의 신뢰도가 확인되었다.

(a) 정답으로 처리한 예시	 (2) 위의 (1)번에서 찾은 규칙을 생각해보며 다음 ___에 들어갈 알맞은 답을 구하시오. 10293 × 1 = 10293 답: 10293 그렇게 생각한 이유: 곱셈을 단하는 수와 답이 숫자가 똑같애서
(b) 오답으로 처리한 예시	 (1) 위의 식에서 알 수 있는 규칙이 무엇인지 써보시오. 규칙: 곱하는 수와 답이 일에 자리에서 십에자리, 십에자리에서, 백에 자리로 늘어난다 (2) 위의 (1)번에서 찾은 규칙을 생각해보며 다음 ___에 들어갈 알맞은 답을 구하시오. 10293 × 1 = 10293 답: 1 그렇게 생각한 이유: 만의 자리로부터 늘어나지 않고 숫자가 똑같음

[그림 II-1] 정답, 오답 여부의 판단 예시

Ⅲ. 연구 결과

1. ‘미지수로서의 변수의 값 구하기’의 분석 결과

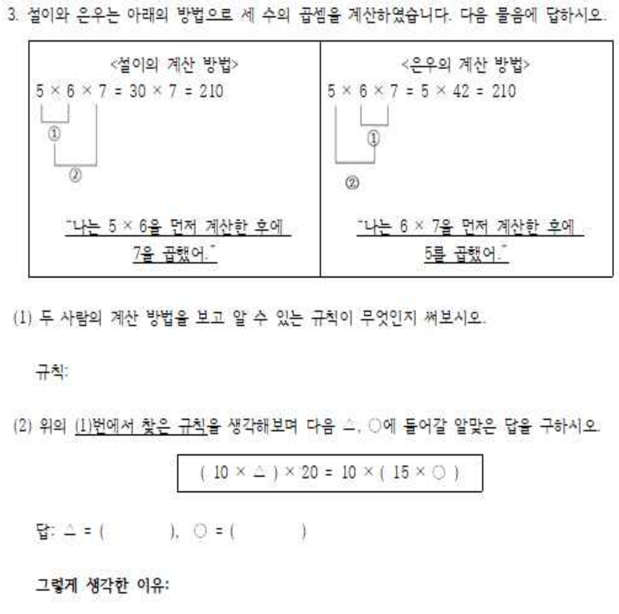
변수의 값을 구하는 문항에 대한 빈도 분석 결과는 <표 Ⅲ-1>과 같다. 학생들은 전반적으로 다른 하위 문항보다 해당 문항을 잘 해결하였다. 전체적인 경향성을 살펴보면, 일반화된 산술 관점의 유형 중 1의 성질에 관한 문항의 정답률이 가장 높았으며 덧셈의 교환법칙, 산술 맥락에서의 문제 상황, 곱셈의 결합법칙 문항이 뒤를 이었다. 함수적 관점의 유형의 정답률은 덧셈 관계, 곱셈 관계, 제곱 관계, 선형 관계 순으로 나타났다. 세부적으로 살펴보면 가까운 항을 먼 항보다 잘 찾는다는 것을 알 수 있다.

<표 III-1> ‘미지수로서의 변수의 값 구하기’의 빈도 분석 결과

일반화된 산술 관점				함수적 관점						
유형	정답	오답		유형*			정답		오답	
1의 성질	243 (98.8%)	3 (1.2%)		덧셈 관계	독/가	독/먼	233 (94.7%)	208 (84.6%)	13 (5.3%)	38 (15.4%)
					종/가	종/먼	230 (93.5%)	211 (85.8%)	16 (6.5%)	35 (14.2%)
덧셈의 교환법칙	237 (96.3%)	9 (3.7%)		곱셈 관계	독/가	독/먼	228 (92.7%)	216 (87.8%)	18 (7.3%)	30 (12.2%)
					종/가	종/먼	229 (93.1%)	220 (89.4%)	17 (6.9%)	26 (10.6%)
곱셈의 결합법칙	165 (67.1%)	81 (32.9%)		제곱 관계	독/가	독/먼	232 (94.3%)	178 (72.4%)	14 (5.7%)	68 (27.6%)
					종/가	종/먼	219 (89.0%)	175 (71.1%)	27 (11.0%)	71 (28.9%)
산술 맥락에서의 문제 상황	177 (72.0%)	69 (28.0%)		선형 관계	독/가	독/먼	206 (83.7%)	160 (65.0%)	40 (16.3%)	86 (35.0%)
					종/가	종/먼	203 (82.5%)	164 (66.7%)	43 (17.5%)	82 (33.3%)

* 독/가: 독립변수에 해당하는 가까운 항, 독/먼: 독립변수에 해당하는 먼 항,
종/가: 종속변수에 해당하는 가까운 항, 종/먼: 종속변수에 해당하는 먼 항
** 음영은 정답률이 70% 미만인 경우를 나타냄

일반화된 산술 관점 중 주목할만한 점을 살펴보면 곱셈의 결합법칙에 대한 문제를 해결하지 못한 학생이 많다는 것이다. 해당 문항은 [그림 Ⅲ-1]의 (a)와 같으며, 문제를 제대로 해결하지 못한 학생들은 규칙을 적용하지 않고 숫자만 가지고 계산하다 틀린 경우가 대부분이었다. 다만 예외적으로 [그림 Ⅲ-1]의 (b)와 같이 응답한 경우가 12명으로 나타났다. 이러한 학생들은 문항에서 제시한 문제 상황을 이해하고 있으나, 변수에 해당하는 값을 구하는 문항에 규칙을 적용하지 못한 것으로 볼 수 있다. 이러한 학생들 중 변수를 활용하여 식으로 표현하기 문항('B' 문항)을 맞힌 학생은 12명 중 9명으로 나타나 이 학생들이 결합법칙 자체에 대하여 이해하지 못했다고 해석하기에는 무리가 있다.


3. 설이와 은우는 아래의 방법으로 세 수의 곱셈을 계산하였습니다. 다음 물음에 답하시오.

<설이의 계산 방법>	<은우의 계산 방법>
5 × 6 × 7 = 30 × 7 = 210 ① ② "나는 5 × 6을 먼저 계산한 후에 7을 곱했어."	5 × 6 × 7 = 5 × 42 = 210 ① ② "나는 6 × 7을 먼저 계산한 후에 5를 곱했어."

(1) 두 사람의 계산 방법을 보고 알 수 있는 규칙이 무엇인지 써보시오.

규칙:

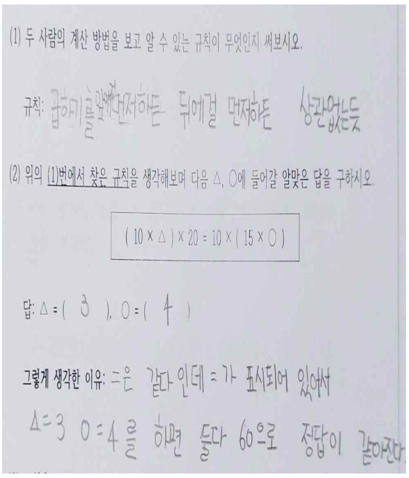
(2) 위의 (1)번에서 찾은 규칙을 생각해보며 다음 △, ○에 들어갈 알맞은 답을 구하시오.

(10 × △) × 20 = 10 × (15 × ○)

답: △ = (　　), ○ = (　　)

그렇게 생각한 이유:

(a) 제시한 문항


(1) 두 사람의 계산 방법을 보고 알 수 있는 규칙이 무엇인지 써보시오.

규칙: 곱하기를 앞에 먼저하든 뒤에걸 먼저하든 상관없는듯

(2) 위의 (1)번에서 찾은 규칙을 생각해보며 다음 △, ○에 들어갈 알맞은 답을 구하시오.

(10 × △) × 20 = 10 × (15 × ○)

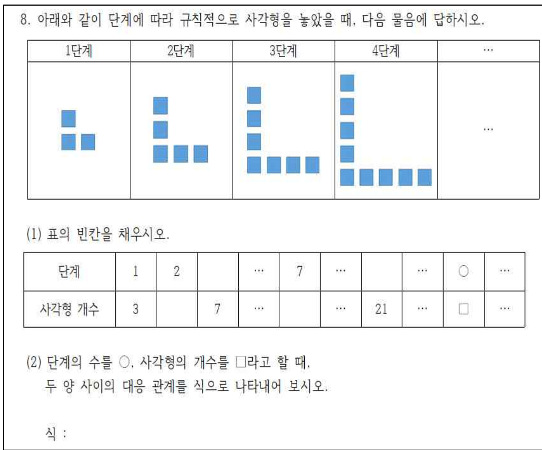
답: △ = (3), ○ = (4)

그렇게 생각한 이유: =은 같다 인데 =가 표시되어 있어서 △=3 ○=4를 하면 둘다 60으로 정답이 같아진다.

(b) 오답의 예시

[그림 Ⅲ-1] 곱셈의 결합법칙에서 제시한 문항과 오답의 예시

함수적 관점에서는 선형 관계가 다른 함수적 관계보다 낮은 정답률을 보였다. 특히 학생들은 독립변수와 종속변수에 해당하는 먼 항의 값을 구하는 것을 어려워하였다. 오답 반응을 보인 학생들 가운데 먼 항 중 종속변수의 값은 구했으나 독립변수의 값을 구하지 못한 학생들은 [그림 Ⅲ-2]와 같은 경향을 보였다. 이러한 학생들은 독립변수와 종속변수에 제시된 수의 규칙을 각각 탐색하였는데, 이때 재귀적인 방법을 활용하였다. 즉, 숫자를 모두 이어서 쓰는 방법으로 답을 구하였고 종속변수의 규칙(+2)은 파악한 것으로 보인다. 다만, 이를 통하여 일반화된 식(□－2＝○)을 구하는 과정에서 오류가 생겼고 이를 적용하여 독립변수에 해당하는 먼 항을 구하게 되어 답을 맞히지 못한 것으로 볼 수 있다.



8. 아래와 같이 단계에 따라 규칙적으로 사각형을 놓았을 때, 다음 물음에 답하시오.

1단계	2단계	3단계	4단계	…
				…

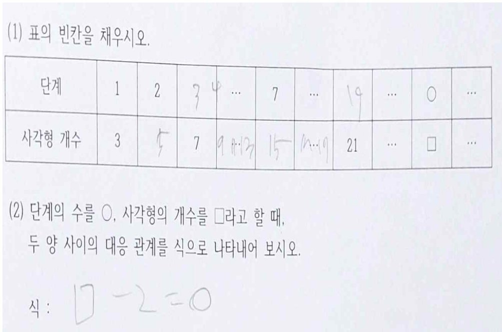
(1) 표의 빈칸을 채우시오.

단계	1	2		…	7	…		…	○	…
사각형 개수	3		7	…		…	21	…	□	…

(2) 단계의 수를 ○, 사각형의 개수를 □라고 할 때,
두 양 사이의 대응 관계를 식으로 나타내어 보시오.

식 :

(a) 제시한 문항



(b) 오답의 예시

[그림 Ⅲ-2] 선형 관계에서 제시한 문항과 오답의 예시

2. '변수를 활용하여 식으로 표현하기'의 분석 결과

가. 일반화하여 변수를 활용한 식으로 표현하기

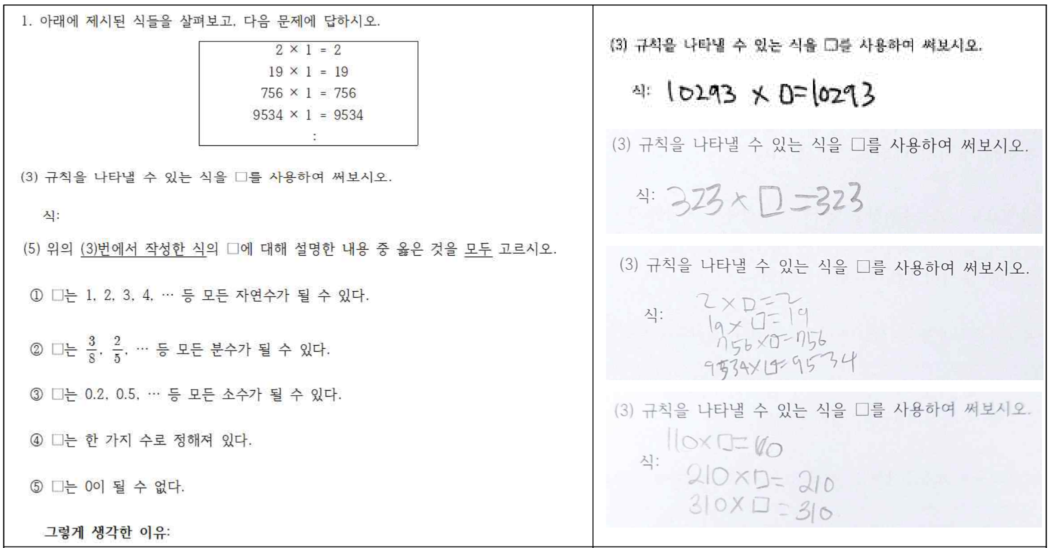
수나 연산의 성질 및 관계를 일반화하여 변수를 활용한 식으로 표현하는 문항에 대한 빈도 분석 결과는 <표 Ⅲ-2>와 같다. 일반화된 산술 관점에서는 수나 연산의 성질 또는 산술 맥락에서의 문제 상황을 일반화하여 식으로 표현할 수 있는지 분석하였으며, 함수적 관점에서는 독립변수와 종속변수를 사용하여 대응 관계를 일반화하여 식으로 표현할 수 있는지 분석하였다. 학생들은 전반적으로 '미지수로서의 변수의 값 구하기' 문항보다 '관계를 일반화하여 식으로 표현하기' 문항을 해결하는데 어려움을 보였다. 전체적인 경향성을 살펴보면, 일반화된 산술 관점의 유형 중 곱셈의 결합법칙에 관한 문항의 정답률은 74.0%, 덧셈의 교환법칙에 관한 문항의 정답률은 68.7%, 1의 성질에 관한 문항의 정답률은 66.3%로 나타나 세 유형에서 큰 차이는 없었다. 즉 수나 연산의 성질을 일반화하여 식으로 표현하는 것은 비슷한 양상을 보였다. 이와 대조적으로, 산술 맥락에서의 문제 상황을 다룬 문항의 정답률은 29.3%로 나타났는데, 이는 전체 문항 중 가장 낮은 정답률이었다. 한편, 함수적 관점에서의 각 유형별 정답률을 살펴보면, 곱셈 관계와 덧셈 관계가 각각 78.0%와 77.6%로 비슷하게 높게 나타났고, 이어 제곱 관계가 63.8%, 선형 관계가 47.2%로 나타났다.

<표 Ⅲ-2> '일반화하여 변수를 활용하여 식으로 표현하기'의 빈도 분석 결과

일반화된 산술 관점				함수적 관점		
유형	정답	오답		유형	정답	오답
1의 성질	163 (66.3%)	83 (33.7%)		덧셈 관계	191 (77.6%)	55 (22.4%)
덧셈의 교환법칙	169 (68.7%)	77 (31.3%)		곱셈 관계	192 (78.0%)	54 (22.0%)
곱셈의 결합법칙	182 (74.0%)	64 (26.0%)		제곱 관계	157 (63.8%)	89 (36.2%)
산술 맥락에서의 문제 상황	72 (29.3%)	174 (70.7%)		선형 관계	116 (47.2%)	130 (52.8%)

* 음영은 정답률이 70% 미만인 경우를 나타냄

일반화된 산술 관점 중 1의 성질을 일반화하여 식으로 표현하기 문항에서 오답 반응을 보인 학생들은 83명이었는데, 이 중 44명의 학생들은 공통적으로 1의 자리에 □를 쓰고 특정한 식을 답으로 작성하였다([그림 Ⅲ-3] 참고). 이러한 유형의 오답은 다시 두 가지 경우로 나눌 수 있었는데, 첫째는 특정한 식 하나만 답으로 제시한 경우였다. 예를 들어, 문항 1-(2)에서 제시한 특정한 값($10293 \times 1 = 10293$)을 활용하여 1을 □로 바꾸어 쓰거나, 10293 대신 323과 같이 다른 특정한 숫자를 쓴 경우이다. 둘째는 여러 가지의 식을 답으로 제시한 경우였다. 이때, 문제에 보기로 제시된 예시에서 1을 □로 바꾸어 쓴 경우와, 문제에 제시되지 않은 다른 특정한 수를 사용하여 식을 쓴 경우가 나타났다. 이러한 학생들 중 29명은 1-(5) 문항에서 '□는 한 가지 수로 정해져 있다'를 포함하여 답을 선택하였고, 27명은 '□는 0이 될 수 없다'를 포함하여 답을 선택하였다. 또한 이 두 가지를 모두 고른 학생도 16명이었다. 이러한 학생들은 자신들이 쓴 식에서 □에 1이 들어가야 식이 성립하므로 □의 값은 1로 정해져 있고, 0이 될 수 없다는 점을 이유로 서술하였다. 해당 학생들은 어떤 수에 1을 곱하면 어떤 수가 된다는 1의 성질은 알고 있으나, 이를 $\square \times 1 = \square$의 형태로 표현하는 것이 어려운 경우라고 추측할 수 있다. 즉 수의 성질을 일반화하여 식으로 표현할 때 어떤 것이 변수가 되어야 하는지를 알지 못하는 것이다.

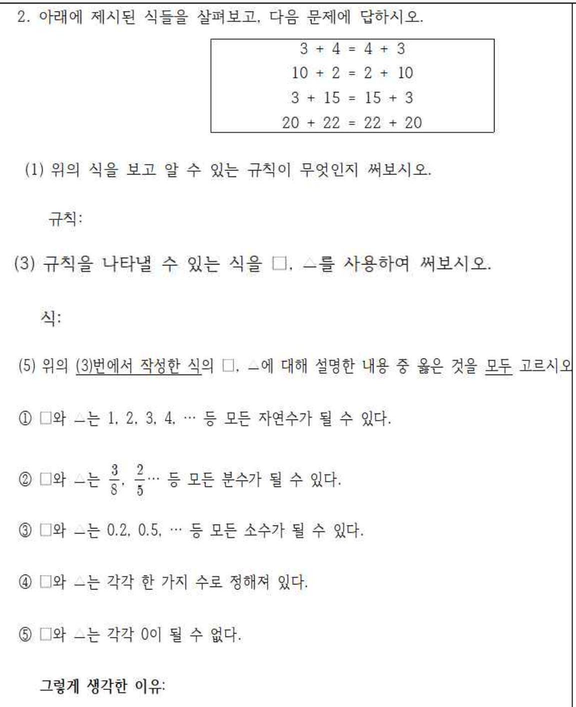


(a) 제시한 문항	(b) 오답의 예시

[그림 Ⅲ-3] 1의 성질에서 제시한 문항과 오답의 예시

덧셈의 교환법칙을 일반화하여 식으로 표현하는 문항에서도 비슷한 오답 경향이 나타났다. 14명의 학생들은 [그림 Ⅲ-4]의 (b)와 같이 특정한 수를 사용하여 답을 서술하였는데, 이러한 오답은 다시 두 가지 경우로 세분할 수 있었다. 첫째는 등호의 양변에 변수가 위치한 경우이며, 둘째는 등호의 한 변에 변수가 위치한 경우이다. 이러한 학생들 중 10명은 2-(5) 문항에서 '□와 △는 한 가지 수로 정해져 있다'를 포함하여 답을 선택하였고, 8명은 '□와 △는 0이 될 수 없다'를 포함하여 답을 선택하였으며, 이 두 가지를 모두 선택한 학생은 6명이었다. 예를 들어 [그림 Ⅲ-4]의 (b)에 제시된 오답의 예시 중 마지막 학생은 '□와 △는 뒤쪽에 [등호의 오른쪽에] 있는 100과 200의 순서를 서로 바꾼 것이기 때문에'라고 이유를 들어 '□와 △는 한 가지 수로 정해져 있다'를 선택하였다. 즉 이 학생은 교환법칙의 의미는 알고 있으나(실제 교환법칙을 글로 서술하게 한 2-(1) 문항을 옳게 작성

함), 이를 일반화하여 변수를 사용하여 식으로 표현하는 데 어려움을 겪은 것으로 간주할 수 있다.


2. 아래에 제시된 식들을 살펴보고, 다음 문제에 답하시오.

3 + 4 = 4 + 3
10 + 2 = 2 + 10
3 + 15 = 15 + 3
20 + 22 = 22 + 20

(1) 위의 식을 보고 알 수 있는 규칙이 무엇인지 써보시오.

규칙:

(3) 규칙을 나타낼 수 있는 식을 □, △를 사용하여 써보시오.

식:

(5) 위의 (3)번에서 작성한 식의 □, △에 대해 설명한 내용 중 옳은 것을 모두 고르시오

① □와 △는 1, 2, 3, 4, … 등 모든 자연수가 될 수 있다.

② □와 △는 $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$… 등 모든 분수가 될 수 있다.

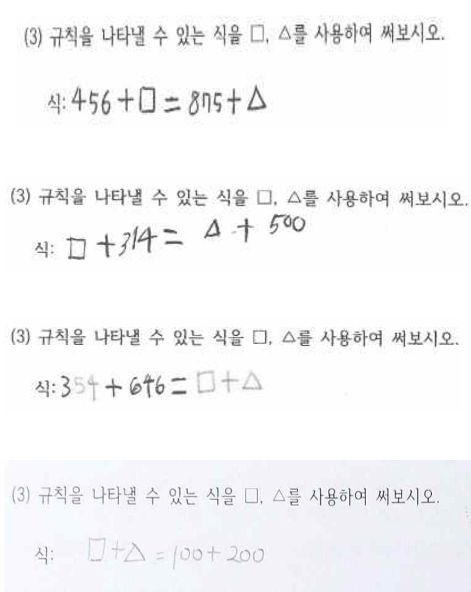
③ □와 △는 0.2, 0.5, … 등 모든 소수가 될 수 있다.

④ □와 △는 각각 한 가지 수로 정해져 있다.

⑤ □와 △는 각각 0이 될 수 없다.

그렇게 생각한 이유:

(a) 제시한 문항



(b) 오답의 예시

[그림 III-4] 덧셈의 교환법칙에서 제시한 문항과 오답의 예시

일반화된 산술 관점에서 가장 낮은 정답률을 보인 문항은 [그림 Ⅲ-5]의 (a)에 제시한 바와 같이 산술 맥락에서의 문제 상황을 일반화하여 식으로 표현하는 문항이었다. 학생들의 오답 반응은 크게 네 가지 경우로 세분할 수 있었다. 첫째는 무응답 또는 규칙을 탐색하지 못한 경우이고, 둘째는 변수를 사용하지 않고 특정한 수를 사용하여 규칙을 쓴 것이다(예, $7+4\times2=15$). 셋째는 변수를 사용하였으나 완성된 등식의 형태로 표현하지 않은 경우이다(예, $7+\square\times2=$). 넷째는 변수를 사용하여 완성된 등식으로 나타냈으나 등호의 우변에 특정한 값을 쓴 경우로(예, $7+2\times\square=15$), 4-(1)번 문항에서 제시한 민수의 머리카락 길이인 '15'를 그대로 쓴 경우였다. 한편, 정답으로 분류된 72명의 학생들 중 25명은 주어진 문제 상황을 일반화하여 식으로 표현하는 과정에서 등호(=)를 사용하였다. 예를 들어, [그림 Ⅲ-5]의 (b)에 제시한 바와 같이 등호의 우변에 '민수의 머리카락 길이'를 쓰기도 하였고, 자신이 새로운 변수(예, ?, oo)를 만들어 답을 작성하였다. 이와 같이 응답한 학생들은 '$7+\square\times2$' 등과 같은 식을 하나의 온전한 식이나 대상으로 보기보다는 이를 계산하여 그 결과를 등호의 우변에 나타내야 한다고 생각한 것으로 유추된다.

4. 민수의 현재 머리카락 길이는 7cm이고, 머리카락 길이는 한 달에 2cm씩 자랍니다. 민수의 머리카락 길이가 앞으로 어떻게 변할지 다음 물음에 답하시오. (1) 민수의 머리카락 길이가 15cm가 되었다면, 몇 달의 시간이 지난 후인지 구하시오. 식: 답: (2) □달의 시간이 지났을 때, 민수의 머리카락 길이를 식으로 쓰시오. 식:	(2) □달의 시간이 지났을 때, 민수의 머리카락 길이를 식으로 쓰시오. 식: □×2+7 = 민수의 머리카락 길이 (2) □달의 시간이 지났을 때, 민수의 머리카락 길이를 식으로 쓰시오. 식: 7+(2×□)=? (2) □달의 시간이 지났을 때, 민수의 머리카락 길이를 식으로 쓰시오. 식: 7+(2×□)=○○
(a) 제시한 문항	(b) 등호를 사용한 정답을 기술한 예시

[그림 III-5] 산술 맥락에서의 문제 상황을 일반화하여 식으로 표현하기 문항과 오답의 예시

함수적 관점에서는 선형 관계가 가장 낮은 정답률을 보였다(선형 관계의 문항은 [그림 Ⅲ-2] 참조). 정답을 맞히지 못한 학생들은 '○+2=□'와 같은 형태를 오답으로 가장 많이 제시하였는데, 이는 종속변수의 규칙이 '+2'라는 것에만 초점을 두고 작성한 답안이라고 볼 수 있다. 한편, 선형 관계를 일반화하여 식으로 표현할 때 학생들은 단계의 수(○)와 사각형의 개수(□) 사이의 대응 관계를 '○×2+1=□' 이외에도 [그림 Ⅲ-6]과 같이 다양하게 제시하는 경향이 있었다. 다른 함수적 관계에서는 이처럼 다양한 답안이 도출되지 않았다는 점에서 차이가 있었다. 이는 현 교육과정에서 학생들이 대응 관계를 식으로 나타낼 때 선형 관계는 학습하지 않았기 때문에, 문항에서 제시된 두 양 사이의 대응 관계를 스스로 파악하여 이를 일반화하여 식으로 나타내는 과정에서 자연스럽게 도출된 것으로 보인다.

식 (○+1)×2-1=□	식: ○×2-1+2=□	식: □ = 2×○+1
식: □-(○+○)=1	식: ○×3-(○-1)=□	식: □=○+(○+1)

[그림 III-6] 선형 관계에서 일반화된 표현 정답의 예시

나. 다른 기호를 사용하여 식으로 표현하기

다른 기호를 사용하여 식으로 표현하는 문항의 예시와 빈도 분석 결과는 <표 Ⅲ-3>과 같다. 학생들은 변수의 특정한 항을 구하는 문항에 이어 해당 문항을 잘 해결하였다. 일반화된 산술 관점과 함수적 관점 여부에 관계없이 어느 유형이든 그 정답률이 80% 이상으로 나타냈다. 한편, 모든 유형에서 다른 기호를 사용하여 식으로 표현할 수 있다고 응답한 학생은 176명(71.5%)이었고, 다른 기호로 표현할 수 없다고 대답한 학생은 11명(4.5%)이었다. 다시 말해, 59명(24.0%)의 적지 않은 학생들은 어떤 유형이냐에 따라서 일반화된 식에서 사용한 기호 외의 다른 기호를 사용하여 식으로 표현하는 것에 대해 응답이 달라졌다는 측면에서 기호의 임의성을 제대로 이해하고 있다고 말하기는 어렵다.

<표 Ⅲ-3> '다른 기호를 사용하여 표현하기' 문항의 예시와 빈도 분석 결과

일반화된 산술 관점		
(4) 위의 (3)번에서 작성한 식의 □를 다른 기호 ◇로 바꾸어 표현해도 되는가? (그렇다/ 아니다)		
유형	정답	오답
1의 성질	222 (90.2%)	24 (9.8%)
덧셈의 교환법칙	217 (88.2%)	29 (11.8%)
곱셈의 결합법칙	207 (84.1%)	39 (15.9%)
산술 맥락에서의 문제 상황	213 (86.6%)	33 (13.4%)

함수적 관점		
(3) 위의 (2)번에서 작성한 식의 △, □를 다른 기호 ◇, ☆로 바꾸어 표현해도 되는가? (그렇다/ 아니다)		
유형	정답	오답
덧셈 관계	221 (89.8%)	25 (10.2%)
곱셈 관계	215 (87.4%)	31 (12.6%)
제곱 관계	213 (86.6%)	33 (13.4%)
선형 관계	203 (82.5%)	43 (17.5%)

3. '변수의 의미 이해하기'의 분석 결과

가. 일반화된 산술 관점에서 변수의 의미 이해하기

일반화된 산술 관점에서는 변수의 의미를 이해하는 문항의 보기로 변수가 여러 가지 수가 될 수 있는지 아니면 한 가지 수로 정해져 있는지를 제시하고 학생들이 선택하게 하였다. 구체적으로 1의 성질과 덧셈의 교환법칙은 여러 가지 수를 자연수, 분수, 소수, 0으로 구분하여 제시하였다. 반면 곱셈의 결합법칙은 여러 가지 수를 나누어 제시하지 않았다. 이를 통하여 자연수, 분수, 소수, 0(이하 수의 종류)으로 나누어 제시하는 경우와 그렇지 않은 경우 학생들이 변수에 대한 의미를 파악하는 경향이 달라지는지 알아보고자 의도하였다. 산술 맥락에서의 문제 상황 유형은 문항에서 제시한 '몇 달'이라는 특성을 감안하여 수의 종류를 자연수로 한정하여 선택지를 구성하였다. <표 Ⅲ-4>는 각 유형별로 제시한 문항의 내용과 학생들이 선택한 답 및 빈도이다. 1의 성질과 덧셈의 교환법칙의 경우는 학생들이 선택한 답의 비율이 5% 이상인 경우를 빈도순으로 나열하고, 5% 미만인 답은 기타로 제시하였다.

전체적인 경향성을 살펴보면, 학생들은 변수의 값으로 가능한 수의 종류가 자연수, 분수, 소수, 0으로 나뉘어 제시되었을 때 정답률이 낮았다. 즉, 1의 성질과 덧셈의 교환법칙에서 정답률은 각각 30.1%, 39.4%였으나, 변수의 값으로 범자연수만 제시했던 곱셈의 결합법칙에서 정답률은 64.2%였다. 물론 문항의 특성상 학생들이 1의 성질, 덧셈의 교환법칙, 곱셈의 결합법칙을 찾아 그 규칙을 나타낼 수 있는 식을 변수를 활용하여 나타낸 후, 그 식에 사용된 변수에 대한 설명으로 옳은 것을 선택한 것이었기 때문에 '식으로 표현하기'의 정답률을 함께 고려할 필요가 있다. 그런데, <표 Ⅲ-2>에 제시한 바와 같이 1의 성질, 덧셈의 교환법칙, 곱셈의 결합법칙에 대해 식으로 표현하기의 정답률이 66.3%에서 74.0%로 그 차이가 크지 않았던 반면에, 변수의 의미 이해하기의 정답률은 약 2배 가까운 차이가 드러났다. 이는 변수를 활용하여 1의 성질과 덧셈의 교환법칙을 일반화한 식에서 해당 변수는 자연수만 될 수 있다고 생각한 학생이 많았기 때문일 것으로 유추된다. 한편, 변수의 값이 한 가지로 정해져 있다는 보기를 포함하여 답을 선택한 학생들은 1의 성질에서 61명(24.8%), 덧셈의 교환법칙에서 62명(25.2%), 곱셈의 결합법칙에서 54명(22.0%), 산술 맥락에서의 문제 상황에서 71명(28.9%)으로 비슷한 빈도로 나타났다.

<표 Ⅲ-4> 일반화된 산술 관점에서 '변수의 의미 이해하기'의 빈도 분석 결과

<table>
<tr><th>유형</th><th>제시한 문항</th><th>선택한 답*</th><th>빈도</th></tr>
<tr><td rowspan="6">1의 성질</td><td rowspan="6">① □는 1, 2, 3, 4, ⋯ 등 모든 자연수가 될 수 있다.
② □는 $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$, ⋯ 등 모든 분수가 될 수 있다.
③ □는 0.2, 0.5, ⋯ 등 모든 소수가 될 수 있다.
④ □는 한 가지 수로 정해져 있다.
⑤ □는 0이 될 수 없다.</td><td>①, ②, ③</td><td>74(30.1%)</td></tr>
<tr><td>①</td><td>58(23.6%)</td></tr>
<tr><td>④</td><td>28(11.4%)</td></tr>
<tr><td>④, ⑤</td><td>21(8.5%)</td></tr>
<tr><td>⑤</td><td>20(8.1%)</td></tr>
<tr><td>기타 및 오답</td><td>45(18.3%)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">덧셈의
교환법칙</td><td rowspan="6">① □와 △는 1, 2, 3, 4, ⋯ 등 모든 자연수가 될 수 있다.
② □와 △는 $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{5}$⋯ 등 모든 분수가 될 수 있다.
③ □와 △는 0.2, 0.5, ⋯ 등 모든 소수가 될 수 있다.
④ □와 △는 각각 한 가지 수로 정해져 있다.
⑤ □와 △는 각각 0이 될 수 없다.</td><td>①, ②, ③</td><td>97(39.4%)</td></tr>
<tr><td>①</td><td>29(11.8%)</td></tr>
<tr><td>④, ⑤</td><td>26(10.6%)</td></tr>
<tr><td>①, ⑤</td><td>21(8.5%)</td></tr>
<tr><td>①, ④</td><td>16(6.5%)</td></tr>
<tr><td>기타 및 오답</td><td>57(23.2%)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">곱셈의
결합법칙</td><td rowspan="4">① □, △, ○는 0, 1, 2, 3, 4, ⋯ 등 여러 가지 수가 될 수 있다.
② □, △, ○는 각각 한 가지 수로 정해져 있다.</td><td>①</td><td>158(64.2%)</td></tr>
<tr><td>②</td><td>54(22.0%)</td></tr>
<tr><td>①, ②</td><td>21(8.5%)</td></tr>
<tr><td>오답</td><td>13(5.3%)</td></tr>
<tr><td rowspan="4">산술
맥락에서의
문제 상황</td><td rowspan="4">① □는 1, 2, 3, 4, ⋯ 등 여러 가지 수가 될 수 있다.
② □는 한 가지 수로 정해져 있다.</td><td>①</td><td>166(67.5%)</td></tr>
<tr><td>②</td><td>71(28.9%)</td></tr>
<tr><td>①, ②</td><td>5(2.0%)</td></tr>
<tr><td>오답</td><td>4(1.6%)</td></tr>
</table>

* 선택한 답에서 음영은 정답을 나타냄

유형별로 구체적으로 살펴보면, 1의 성질을 일반화한 식에서 □는 모든 자연수, 분수, 소수가 가능하다고 응답한 비율이 30.1%, 자연수만 가능하다고 응답한 비율이 23.6%. 변수의 값이 한 가지 수로 정해져 있다고 응답한 비율이 11.4%였고, 나머지 응답 비율은 10% 미만으로 나타났다. 각 응답별 이유에 대한 예시 중 일부를 살펴보면 <표 Ⅲ-5>와 같다.

<표 Ⅲ-5> 1의 성질의 응답별 이유 예시

<table>
<tr><th>선택한 답</th><th colspan="2">이유 예시</th></tr>
<tr><td>①, ②, ③</td><td colspan="2">□는 한가지 수로 정해져 있지 않기 때문</td></tr>
<tr><td>①</td><td>분수와 소수는 1에 곱하면 값이 달라지고 0×1은 0 이니 ①번이다</td><td>1×1=1 2×1=2 이므로 모든 자연수가 될수있다</td></tr>
<tr><td>④</td><td colspan="2">□는 1이기 때문에 한가지 수로 정해져 있다</td></tr>
</table>

선택한 답에 따라 살펴보면, 변수의 값으로 모든 자연수, 분수, 소수가 될 수 있다고 응답한 학생들은 그 이유를 변수가 한 가지 수로 정해져 있지 않고 어떤 수든 되기 때문이라고 서술하였다. 변수의 값으로 모든 자연수만 가능하다고 응답한 학생들은 분수와 소수에 1을 곱하면 값이 달라진다는 오류를 보였다. 또한 자연수를 사

용한 특정한 예시(예, $2\times1=2$)를 예로 들어 자연수가 가능하다고 하였다. 주어진 규칙에서 자연수만을 다루기에 자연수만 된다고 응답한 경우도 있었다. 특히, ‘B-1. 수나 연산의 성질 또는 산술 맥락에서의 문제 상황을 일반화하여 식으로 표현하기’ 문항에서 (특정한 수)$\times1=$(특정한 수)의 형태로 답을 기술한 학생들 중 변수의 값이 한 가지 수로 정해져 있다고 응답한 학생들은 변수의 값이 1이기 때문에 한 가지 수로 정해져 있다고 응답하였다. 변수는 0이 될 수 없다고 응답한 학생들은 곱하는 수, 즉 □가 0이 되면 답이 0이 되기 때문이라고 서술하였다. 이 두 개의 응답을 모두 고른 학생들은 □는 1이기 때문에 한 가지 수로 정해져 있으며 0이 들어갈 수 없다고 서술하였다.

덧셈의 교환법칙을 일반화한 식에서 변수의 값으로 자연수, 분수, 소수가 가능하다고 응답한 비율은 39.4%로, 1의 성질과 관련된 응답 비율보다 정답률이 높게 나타났다. 변수의 값으로 자연수만 가능하다고 한 학생들은 11.8%, 변수의 값이 각각 한 가지 수로 정해져 있으며 0이 될 수 없다고 응답한 학생들은 10.6%이고 다른 응답들은 10% 미만으로 나타났다. 각 응답별 이유에 대한 예시 중 일부를 살펴보면 <표 Ⅲ-6>과 같다.

<표 Ⅲ-6> 덧셈의 교환법칙의 응답별 이유 예시

선택한 답	이유 예시
①, ②, ③	자연수든, 분수든, 소수든 □와 △의 값이 무엇이든 더하는 수와 더해지는 수의 순서를 바꾸어도 그 값이 변하지 않기 때문이다
①	□와 △는 자연수로 변해도 규칙은 같기 때문
④, ⑤	각각 한가지 수로 정해져야 규칙적인 식이 나오고, 0+0=0+0은 규칙적이지 않기 때문이다

선택한 답에 따라 살펴보면, 변수의 값으로 모든 자연수, 분수, 소수가 될 수 있다고 응답한 학생들은 그 이유를 변수는 정해진 수가 아니고 더하는 수와 더해지는 수의 순서를 바꾸어도 그 값이 변하지 않기 때문이라고 서술하였다. 변수의 값으로 모든 자연수만이 가능하다고 응답한 학생들은 변수의 값으로 자연수가 아닌 다른 수의 종류에 대해 고려하지 않는 것으로 보였다. 변수의 값이 한 가지 수로 정해져 있으며 0이 될 수 없다고 응답한 학생들은 변수의 값이 정해져야 규칙적인 식이 나오고 ‘$0+0=0+0$’이 규칙적이지 않다는 오류를 보였다. 변수의 값으로 자연수는 가능하나 0은 가능하지 않다고 응답한 학생들은 모든 변수에 0을 넣지 않고 계산하는 경우(예, $456+0=875+0$), ‘$0+0=0+0$’이 의미 없다고 생각하는 경우 등의 다양한 오류를 보였다. 변수의 값으로 자연수는 가능하나 한 가지 수로 정해져 있다고 응답한 학생들은 자연수이면서 한 가지 수로만 정해져 있다고 서술하였다.

곱셈의 결합법칙을 일반화한 식에서 변수의 값으로 모든 범자연수가 가능하다는 응답이 64.2%로 가장 많았다. 변수의 값이 한 가지로 정해져 있다는 응답 비율이 22.0%, 두 가지를 모두 선택한 경우는 8.5%였다. 각 응답에 따른 이유의 예시 중 일부는 <표 Ⅲ-7>과 같다.

<표 Ⅲ-7> 곱셈의 결합법칙의 응답별 이유 예시

선택한 답	이유 예시
①	□, △, ○은 특정한 수로 정해져 있지 않기 때문이다.
②	답이 똑같기 때문이다.

선택한 답에 따라 살펴보면, 변수는 여러 가지 수가 될 수 있다고 답한 학생들은 변수가 특정한 수로 정해져 있지 않다고 서술하였다. 몇몇 학생은 자연수, 분수 등 특정한 수의 종류를 언급하기도 하였다. 한 가지 수로 정해져 있다고 응답한 학생들은 어떤 두 수를 먼저 곱하든지 계산 결과가 같기 때문에 한 가지 수로 정해져 있다고 서술하였다. 변수의 값이 여러 가지 수가 될 수 있는 동시에 한 가지 수로 정해져 있다고 응답한 경우도 일부 있었다. 학생들은 그 이유로 각 변수는 다른 수가 되어도 무관하지만, 각각은 한 가지 수로 정해져 있다고 생각하였다.

산술 맥락에서의 문제 상황을 일반화한 식에서 '□달의 시간'과 관련하여 □는 1, 2, 3, 4, … 등 여러 가지 수가 될 수 있다고 응답한 비율이 67.5%로 높게 나타났고, 이는 일반화된 산술 관점에서 변수의 의미 이해하기와 관련한 4가지 유형에서도 가장 높은 비율이었다. 다만, □는 한 가지 수로 정해져 있다고 응답한 비율도 28.9%로 낮지 않았음을 주목할 필요가 있다. 각 응답에 따른 이유의 예시 중 일부는 <표 Ⅲ-8>과 같다.

<표 Ⅲ-8> 산술 맥락에서의 문제 상황의 응답별 이유 예시

선택한 답	이유 예시	
①	□는 정해진 숫자가 없기 때문	□는 □달을 뜻하기 때문에 여러 가지 수가 될 수 있다.
②	□가 바뀌면 답(15)가 바뀌기 때문	여러가지 수로 정해져있음 답이 자꾸 달라짐

선택한 답에 따라 살펴보면, 변수의 값이 여러 가지 수가 될 수 있다고 응답한 학생들은 수나 연산의 성질과 마찬가지로 변수는 정해진 수가 아니라는 것을 이유로 서술하였다. 다만 이러한 응답보다 '달의 수'에 초점을 맞추어 서술하는 학생들이 많았다. 구체적으로 문제 상황을 고려하여 '몇 달' 또는 '□ 달'이기 때문에 여러 가지 수가 될 수 있다고 변수의 의미를 탐색하는 경우이다. 변수의 값이 한 가지 수로 정해져 있다고 응답한 학생들은 '답이 바뀐다'라는 것에 초점을 맞추어 이유를 서술한 경우가 많았다. 이러한 학생들은 변수를 활용하여 문제 상황을 일반화하여 식으로 표현할 때 등호를 사용하는 경향이 있었으며, 우변에는 변수에 해당하는 값을 구할 때 제시한 '15'를 쓴 경우가 많았다. 이러한 학생들은 변수의 속성을 탐색하는 문항에서도 변수가 바뀌면 답이 바뀌기 때문에 변수는 하나의 수로 정해져 있다고 서술하였다.

나. 함수적 관점에서 변수의 의미 이해하기

함수적 관점에서는 학생들이 변수의 의미를 이해하는지 알기 위하여 변수의 값이 여러 가지 수가 될 수 있는지, 한 가지 수로 정해져 있는지, 독립변수에 의해 종속변수가 바뀌는지 또는 종속변수에 의해 독립변수가 바뀌는지를 선택하게 하는 보기를 제시하였다. 특히 여러 가지 수가 될 수 있는지 묻는 문항에서는 제시한 문제 상황의 특성에 따라 수의 범위를 제한하여 제시하였다. <표 Ⅲ-9>는 각 유형별로 제시한 문항의 내용과 학생들이 선택한 답 및 빈도이다. 선택한 답의 비율이 5% 이상인 경우를 빈도순으로 나열하였으며, 5% 미만인 답은 기타로 제시하였다.

전체적인 경향성을 살펴보면, 학생들은 모든 함수적 관계 유형에서 70% 이상의 정답률을 보이며 일반화된 산술 관점에서보다 변수의 의미를 잘 이해하고 있는 것으로 나타났다. 다시 말해, 변수의 값이 여러 가지 수가 될 수 있다는 것을 알고 있으며, 독립변수와 종속변수 사이의 관계에 대하여도 잘 파악하고 있다고 볼 수 있다. 오답 중 가장 많은 유형은 어떤 함수적 관계이냐에 상관없이 공통적으로 변수의 값이 한 가지 수로 정해져 있으며 독립(종속)변수에 따라 종속(독립)변수가 바뀐다고 응답한 경우였다. 다음으로는 독립(종속)변수에 따라 종속(독립)변수가 바뀐다는 것만 고른 학생들이 많은 것으로 나타났다. 즉, 학생들은 변수 사이의 관계에 대해서는 대부분 이해하고 있는 것으로 볼 수 있으나 변수의 값이 한 가지 수로 정해져 있다고 생각하는 오류가 일부 학생에게서 나타난 것으로 해석할 수 있다. 일반화된 산술 관점에서 변수의 값이 한 가지 수로 정해져 있다고 응

답한 학생의 비율이 약 25% 정도로 나타난 것과 비교하면 함수적 관점에서는 그렇게 응답한 학생의 비율이 낮음을 알 수 있다.

<표 Ⅲ-9> 함수적 관점에서 '변수의 의미 이해하기'의 빈도 분석 결과

유형	독립변수 제시한 문항	독립변수 선택한 답	독립변수 빈도(%)	종속변수 제시한 문항	종속변수 선택한 답	종속변수 빈도(%)
덧셈 관계	① △는 1, 2, 3, 4, … 등 여러 가지 수가 될 수 있다. ② △는 한 가지 수로 정해져 있다. ③ △에 따라 □가 바뀐다.	①, ③	179 (72.8%)	① □는 16, 17, 18, 19, … 등 여러 가지 수가 될 수 있다. ② □는 한 가지 수로 정해져 있다. ③ □는 △에 따라 바뀐다.	①, ③	174 (70.7%)
		②, ③	26 (10.6%)		②, ③	26 (10.6%)
		③	17 (6.9%)		③	15 (6.1%)
		기타 및 오답	24 (9.7%)		기타 및 오답	31 (12.6%)
곱셈 관계	① ○는 1, 2, 3, 4, … 등 여러 가지 수가 될 수 있다. ② ○는 한 가지 수로 정해져 있다. ③ ○에 따라 △가 바뀐다.	①, ③	190 (77.2%)	① △는 60, 120, 180, 240, … 등 여러 가지 수가 될 수 있다. ② △는 한 가지 수로 정해져 있다. ③ △는 ○에 따라 바뀐다.	①, ③	184 (74.8%)
		②, ③	19 (7.7%)		②, ③	22 (8.9%)
		기타 및 오답	37 (15.1%)		③	13 (5.3%)
					기타 및 오답	27 (11.0%)
제곱 관계	① ○는 1, 2, 3, 4, … 등 여러 가지 수가 될 수 있다. ② ○는 한 가지 수로 정해져 있다. ③ ○에 따라 △가 바뀐다.	①, ③	181 (73.6%)	① △는 1, 4, 9, … 등 여러 가지 수가 될 수 있다. ② △는 한 가지 수로 정해져 있다. ③ △는 ○에 따라 바뀐다.	①, ③	178 (72.4%)
		②, ③	23 (9.3%)		②, ③	24 (9.8%)
		기타 및 오답	42 (17.1%)		③	16 (6.5%)
					기타 및 오답	28 (11.3%)
선형 관계	① ○는 1, 2, 3, 4, … 등 여러 가지 수가 될 수 있다. ② ○는 한 가지 수로 정해져 있다. ③ ○에 따라 □가 바뀐다.	①, ③	188 (76.4%)	① □는 3, 5, 7, … 등 여러 가지 수가 될 수 있다. ② □는 한 가지 수로 정해져 있다. ③ □는 ○에 따라 바뀐다.	①, ③	184 (74.8%)
		②, ③	16 (6.5%)		②, ③	22 (8.9%)
		③	14 (5.7%)		③	16 (6.5%)
		기타 및 오답	28 (11.4%)		기타 및 오답	24 (9.8%)

* 선택한 답에서 음영은 정답을 나타냄

유형별로 살펴보면, 일반화된 산술 관점과는 달리 함수적 관점에서는 함수적 관계에 따라 큰 차이가 나지 않았으며, 독립변수에 대한 문항보다 종속변수에 대한 문항의 정답률이 전반적으로 약간 낮게 나타났으나 이 역시 차이가 크지는 않았다. <표 Ⅲ-10>은 독립변수와 종속변수 문항에 대한 학생들의 응답을 교차 분석한 결과이다.

<표 III-10> 함수적 관계 유형별 교차 분석 결과

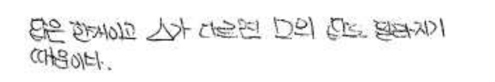
	덧셈 관계				곱셈 관계			
종속변수 / 독립변수	①, ③	②, ③	③	기타 및 오답	①, ③	②, ③	③	기타 및 오답
①, ③	163 (66.3%)	4 (1.6%)	2 (0.8%)	10 (4.1%)	176 (71.5%)	6 (2.4%)	4 (1.6%)	4 (1.6%)
②, ③	4 (1.6%)	20 (8.1%)	1 (0.4%)	1 (0.4%)	3 (1.2%)	15 (6.1%)	0 (0.0%)	1 (0.4%)
③	2 (0.8%)	1 (0.4%)	11 (4.5%)	3 (1.2%)	1 (0.4%)	0 (0.0%)	7 (2.8%)	3 (1.2%)
기타 및 오답	5 (2.0%)	1 (0.4%)	1 (0.4%)	17 (6.9%)	4 (1.6%)	1 (0.4%)	2 (0.8%)	19 (7.7%)

	제곱 관계				선형 관계			
종속변수 / 독립변수	①, ③	②, ③	③	기타 및 오답	①, ③	②, ③	③	기타 및 오답
①, ③	169 (68.7%)	7 (2.8%)	3 (1.2%)	2 (0.8%)	176 (71.5%)	8 (3.3%)	3 (1.2%)	1 (0.4%)
②, ③	3 (1.2%)	16 (6.5%)	0 (0.0%)	4 (1.6%)	2 (0.8%)	14 (5.7%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)
③	1 (0.4%)	0 (0.0%)	8 (3.3%)	2 (0.8%)	0 (0.0%)	0 (0.0%)	12 (4.9%)	2 (0.8%)
기타 및 오답	5 (2.0%)	1 (0.4%)	5 (2.0%)	20 (8.1%)	6 (2.4%)	0 (0.0%)	1 (0.4%)	21 (8.5%)

* 음영은 정답을 나타냄

독립변수와 종속변수의 값이 여러 가지 수가 될 수 있다는 것과 두 변수 사이의 관계를 이해하고 있는 학생 비율은 덧셈 관계 66.3%, 곱셈 관계 71.5%, 제곱 관계 68.7%, 선형 관계 71.5%로 나타났다. 독립변수에 대해서는 정답을 선택했지만 종속변수에 대해서는 오답을 선택한 학생들은 그 반대의 경우보다 약간 더 많았는데, 이러한 학생들은 [그림 Ⅲ-7]의 (a)와 같이 독립변수의 값이 정해지면 종속변수의 값도 정해진다고 생각하는 경향이 있었다. 이외 교차 분석에서 주목할만한 오류는 독립변수와 종속변수의 값이 한 가지 수로 정해져 있으며 두 변수가 서로 영향을 주고받는다고 생각한 경우(즉, 두 변수에 대해 모두 보기 ②, ③을 선택한 경우)로 덧셈 관계에서는 8.1%, 곱셈 관계에서는 6.1%, 제곱 관계에서는 6.5%, 선형 관계에서는 5.7%로 나타났다. 이러한 학생들은 [그림 Ⅲ-7]의 (b)와 같이 변수의 값은 항상 정해져 있다고 서술하였으나 두 변수가 관계가 있다는 것은 알고 있었다.

(a) 오류의 예시(1)



(b) 오류의 예시(2)

[그림 Ⅲ-7] 함수적 관점에서 변수의 의미 이해에 대한 오류의 예시

Ⅳ. 논의 및 시사점

본 연구에서는 초기 대수의 일반화된 산술 관점과 함수적 관점을 바탕으로 초등학교 5학년 학생들의 변수에 대한 이해를 분석하였다. 연구 결과 두 가지 관점에서 공통적으로 '변수에 해당하는 특정한 값을 구하기' 문항이나 '일반화된 식에서 사용한 기호 외의 다른 기호를 사용하여 식으로 표현하기' 문항에 대해서는 정답률이 높았지만, 다른 문항에서는 관점별로 차이가 컸다. 또한 각 관점 내에서도 어떤 성질이나 관계를 다루느냐에 따라서 학생들의 변수에 대한 이해 정도에는 차이가 있었다. 이러한 주된 연구 결과를 바탕으로 초등학생들의 변수 이해에 관한 논의 및 시사점을 제시하면 다음과 같다.

첫째, 일반화된 산술 관점에서 약 70%의 학생들이 1의 성질, 덧셈의 교환법칙, 곱셈의 결합법칙에 대해서 변수를 활용하여 일반화된 식으로 표현할 수 있었는데, 이는 약 96% 이상의 학생들이 1의 성질과 덧셈의 교환법칙에 대해서 미지수로서의 변수의 값을 성공적으로 구했던 결과와 대조적이었다. 이와 같은 결과는 학생들이 덧셈과 곱셈을 배울 때 계산하는 과정에서 1의 성질, 교환법칙, 결합법칙과 같은 수와 연산의 성질을 암묵적으로 학습하는 것과 관련되어 보인다. 우리나라 교과서에서는 수와 연산의 성질을 변수를 활용한 식으로 제시하지 않는다. 그러나 일본의 4학년 교과서에서는 교환법칙이나 결합법칙과 같은 연산의 성질을 ○, □ 등의 변수를 사용하여 일반화한다(藤井齊亮 외, 2015). 이러한 연산의 성질을 다루는 것은 교육과정의 범위를 넘는 별도의 내용을 추가하는 것이 아닌, 기존에 학습하는 내용을 수학적으로 의미 있게 탐구할 수 있게 하려는 의도이다(선우진, 2019). 이와 같은 측면에서 초등학교 학생들이 연산의 성질을 계산 과정에서 충분히 탐색할 수 있다면 명시적으로 지도할 필요가 있으며, 일반화가 필요한 경우 변수를 사용하여 시각적으로 구조를 파악할 수 있도록 돕기 위한 식을 제시할 수도 있을 것이다(장혜원, 2017).

둘째, 산술 맥락에서의 문제 상황에 대해 변수를 활용한 식으로 나타내는 문항에서 단지 30% 미만의 학생들만 성공적으로 해결했다. 일반화된 산술 관점에서 핵심적인 대수적 사고 중의 하나는 문제 상황에서 정해지지 않은 양을 찾아 명시하고 이에 대해 추론할 수 있어야 하는 것이다(Radford, 2011). 아마도 우리나라 학생들은 교육과정상 산술 맥락의 문제 상황에서 정해지지 않은 양을 변수로 나타내어 일반화된 식으로 표현할 기회가 거의 없으므로 해당 문항을 해결하는 데 가장 많은 어려움을 겪은 것으로 해석된다. 이는 Pang & Kim(2018)의 3학년 학생들을 대상으로 한 실태 조사에서 16.2%의 학생만이 산술 맥락에서의 문제 상황을 변수를 활용하여 표현할 수 있었다는 결과와 일맥상통한다. 이와 관련하여 Blanton 외(2015)의 연구에서는 정해지지 않은 양을 변수로 표현하고 추론하는 과정을 학습한 학생들은 73.7%가 해당 문제를 해결했지만, 학습할 기회가 없었던 학생들은 12.7%만 해결할 수 있었다는 점에 유의할 필요가 있다. 이에 산술 맥락에서 미지수로서의 변수의 값 구하기에만 초점을 둘 것이 아니라 학생들이 주어진 문제 상황에서 정해지지 않은 수나 양이 무엇인지, 그것이 어떻게 변화하는지 규칙을 찾고 변수를 사용하여 표현할 수 있는 기회를 제공할 것을 제안한다.

셋째, 함수적 관점에서 제곱 관계와 선형 관계를 다룬 문항의 결과를 살펴보면, 독립변수와 종속변수에 해당하는 가까운 항에 대해서 미지수로서의 변수의 값을 구하는 문항에서 적어도 80% 이상의 정답률이 나타났다는 점과 두 변수 간의 관계를 일반화하여 변수를 활용한 식으로 표현하는 문항에서 제곱 관계는 63.8%, 선형 관계는 47.2%의 정답률이 나타났다는 점에 유의할 필요가 있다. 현행 교과서에서 대응 관계를 다룰 때 덧셈 관계와 곱셈 관계만 다룬다는 점을 감안하면 학생들의 이와 같은 결과는 낮다고만 말할 수 없기 때문이다. 특히 가장 난이도가 높은 선형 관계의 경우 학생들이 전형적인 식뿐만 아니라 다양한 방법으로 변수를 이용하여 일반화된 식을 표현할 수 있었다는 점은 고무적이다. 이에 대응 관계에서 간단한 덧셈과 곱셈 관계만 다루기보다는 제곱 관계나 선형 관계도 포함하여 학생들이 다양한 함수적 관계에 대해서 탐색하고 변수를 이용하여 일반화된 식으로 표현할 수 있는 기회를 제공하는 것도 가능하다는 점을 시사한다.

넷째, 70% 이상의 학생들이 모든 함수적 관계에서 독립변수가 여러 가지 수가 될 수 있으며 독립변수에 따라 종속변수가 바뀐다는 것을 이해하였다. 하지만 일부 학생들은 독립변수에 따라 종속변수가 결정된다는 것을 알고 있으나 종속변수의 경우 언제나 한 가지 수로 정해져 있다고 답을 하는 오류를 보였다. 이를 통해 독립변수와 종속변수에 해당하는 값을 구하는 문항을 제시한 기존의 다양한 선행 연구(예, 방정숙, 선우진, 2019; Blanton et al., 2015)에서 주목하지 않은 독립변수와 종속변수 사이의 관계에 대한 학생들의 오개념을 확인할 수 있었다. 이러한 오류를 보이는 학생들에게는 독립변수의 값의 변화에 따라 종속변수의 값이 변화한다는 것의 의미가 무엇인지 명확하게 지도할 필요가 있다(조형미, 이은정, 2021; Stephens et al., 2021).

다섯째, 일반화된 식에서 사용한 변수의 속성이나 관계를 파악하는 것에 대해 주의가 필요하다. 연구 결과, 일반화된 산술 관점에서 학생들은 1의 성질과 덧셈의 교환법칙을 나타낸 식에서 각 변수가 여러 가지 수가 될 수 있다는 것은 인지할 수 있었지만, 구체적으로 여러 가지 수에 해당하는 수의 종류를 고르게 했을 때 어려움을 느꼈다. 즉, 적지 않은 학생들이 자연수 범위에서만 수나 연산의 성질이 적용된다고 생각하고 해당 변수가 분수, 소수, 또는 0이 될 수도 있다는 사실은 알지 못했다. 이러한 학생들은 변수가 임의의 값을 가질 수 있는 문자임을 인지하고는 있었으나 분수, 소수 등에서도 동일하게 적용되는 성질인지에 대해서는 알지 못한 것이다. 초등학생들도 '임의의'라는 개념을 이해하는 데 무리가 없으며, 변수를 사용한 일반화도 가능하지만(최지영, 방정숙, 2011; Blanton et al., 2015), 학생들이 임의의 수를 실제로는 자연수에 한정하여 생각할 수도 있음을 시사한다. 또한 본 연구에 참여한 학생들 중 약 25%의 학생들이 일반화된 산술 관점에서 제시한 네 가지 문제 유형 모두에서 공통적으로 변수는 한 가지 수로 정해져 있다고 응답했다는 점에 주목할 필요가 있다. 이러한 결과는 함수적 관점에서 제시한 네 가지 문제 유형 모두에서는 변수가 한 가지 수로 정해져 있다고 응답한 비율이 대개 10% 미만이었던 것과 대조적이었다. 즉 이러한 학생들은 유독 일반화된 산술 관점에서 변수의 의미를 이해할 때 미지수로서의 변수만 이해한 것으로 해석할 수 있다. 이에 수와 연산의 성질 또는 관계를 다룰 때 식에서 사용되는 변수는 여러 가지 수가 될 수 있다는 점을 명시적으로 강조하고, 학년이 올라감에 따라 학습하는 수의 범위가 자연수에서 분수, 소수로 확장되어도 수와 연산의 성질이 동일하게 적용된다는 점을 지도할 필요가 있다.

본 연구는 초등학교에서 변수에 대한 연구가 부족하며 특히 일반화된 산술 관점과 함수적 관점에서 학생들의 변수에 대한 이해를 상세하게 조사한 연구가 거의 없다는 것을 고려할 때 의미 있는 연구가 될 것으로 기대한다. 특히 초등학교 전반에 걸쳐 일반화된 산술 관점에서 다루고 있는 수나 연산의 성질을 지도하는 측면에서 미지수로서의 변수의 값 구하기뿐만 아니라 변수를 활용하여 일반화된 식으로 표현하고 그 식에서 변수의 의미를 이해하는 것의 중요성을 강조했다는 점에서 변수의 지도 방안에 시사점을 줄 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

강소희·방정숙 (2008). 초등학교 6학년 학생들의 문자 이해에 대한 실태 조사. 학교수학, 10(2), 139-154.

Kang, S. H., & Pang, J. S. (2008). A survey on the comprehension of letters of sixth grade elementary school students. *School Mathematics,* 10(2), 139-154.

교육부 (2022). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제 2022-33호 [별책 8].

Ministry of Education (2022). *Mathematics curriculum.* 2022-33(Book 8).

교육부 (2023a). 수학 1-1. 비상교육.

Ministry of Education (2023a). *Elementary school mathematics 1-1.* Visang Education.

교육부 (2023b). 수학 1-2. 비상교육.

Ministry of Education (2023b). *Elementary school mathematics 1-2.* Visang Education.

교육부 (2023c). 수학 2-2. 비상교육.

Ministry of Education (2023c). *Elementary school mathematics 2-2.* Visang Education.

김남희 (1992). 변수개념과 대수식의 이해에 관한 연구. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

Kim, N. H. (1992). *(The) study of the notion of variable and the understanding of algebraic expressions.* [Master's thesis, Seoul National University].

김남희 (1997). 변수(문자)의 의미 이해를 위한 고찰. 수학교육학연구, 7(1), 345-356.

Kim, N. H. (1997). A study for the understanding of the meaning of variables (letters). *Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics,* 7(1), 345-356.

김성여・강언진・강요한・고창수・김보현・김영준 외 9인 (2023). 수학 3-1. 아이스크림.

Kim, S., Kang, U., Kang, Y., Ko, C., Kim, B., & Kim, Y. et al. (2023). *Elementary school mathematics 3-1.* i-Scream media.

김정원 (2014). 초등학교 학생들의 함수적 사고의 특징 및 지도 방향 탐색. 한국교원대학교 대학원 박사학위 논문.

Kim, J. W. (2014). *An investigation of the characteristics and instructional implications of functional thinking for elementary school students.* [Doctoral dissertation, Korea National University of Education].

박만구・강경은・김대진・김도경・김수정・김원석 외 8인 (2023). 수학 5-1. 천재교육.

Park, M., Kang, K., Kim, D., Kim, D., Kim, S., & Kim, W. et al. (2023). *Elementary school mathematics 5-1.* Chunjae Education.

박성선・류성림・김상미・권성룡・김남균・강호진 외 11인 (2023). 수학 4-1. YBM.

Park, S., Ryu, S., Kim, S., Kwon, S., Kim, N., & Kang, H. et al. (2023). *Elementary school mathematics 4-1.* YBM.

방정숙・선우진 (2019). 함수적 사고를 강조한 '규칙과 대응' 수업에 참여한 초등학생들의 이해 분석. 학교수학, 21(4), 715-734.

Pang, J. S., & Sunwoo, J. (2019). An analysis of elementary students' understanding by participating in 'patterns and correspondence' instruction to foster functional thinking. *School Mathematics,* 21(4), 715-734.

방정숙・최인영 (2016). 초등학교 3학년 학생들의 대수적 사고에 대한 실태 분석. 초등수학교육, 19(3), 223-247.

Pang, J. S., & Choi, I. Y. (2016). An analysis of algebraic thinking by third graders. *Education of Primary School Mathematics,* 19(3), 223-247.

방정숙・최지영 (2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석: 일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로. 수학교육, 50(1), 41-59.

Pang, J. S., & Choi, J. Y. (2011). An analysis of the whole numbers and their operations in mathematics textbooks: Focused on algebra as generalized arithmetic. *The Mathematical Education,* 50(1), 41-59.

선우진 (2019). 한국, 일본, 미국의 초등학교 수학교과서에서 범자연수 곱셈의 연산 성질을 지도하는 방안에 대한 비교·분석. 초등수학교육, 22(3), 181-203.

Sunwoo, J. (2019). A comparative analysis of instructional methods on the properties of multiplication in elementary mathematics textbooks of Korea, Japan, and the US. *Education of primary school mathematics,* 22(3), 181-203.

안병곤・나귀수・김민경・이광호・류현아・최지선 외 14인 (2023). 수학 4-1. 동아출판.

Ahn, B., Na, G., Kim, M., Lee, G., Ryu, H., & Choi, J. et al. (2023). *Elementary school mathematics 4-1.* Bookdonga.

장혜원 (2017). 교과서 분석에 기초한 연산법칙의 지도 방안 탐색. 한국초등수학교육학회지, 21(1), 1-22.

Chang, H. (2017). Research on teaching method for the properties of arithmetic based on analysis of elementary school mathematics textbooks. *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea,* 21(1), 1-22.

조형미・이은정 (2021). 변수 개념에 대한 중등 예비교사들의 노티싱. 수학교육논문집, 35(3), 257-275.

Cho¸ H. M., & Lee¸ E. J. (2021). Prospective teachers' noticing about concept of variables. *Communications of Mathematical Education,* 35(3), 257-275.

최지영 · 방정숙 (2011). 초등학교에서의 대수적 추론 능력 신장 방안 탐색: 곱셈의 결합법칙 탐구에 관한 수업 사례 연구. 학교수학, 13(4), 581-598.

Choi, J. Y., & Pang, J. S. (2011). Fostering algebraic reasoning ability of elementary school students: Focused on the exploration of the associative law in multiplication. *School Mathematics*, 13(4), 581-598.

최지영 · 방정숙 (2012). 초등학교 2, 4, 6학년 학생들의 함수적 관계 이해 실태 조사. 학교수학, 14(3), 275-296.

Choi, J. Y., & Pang, J. S. (2012). An analysis of elementary school students' understanding of functional relationships. *School Mathematics*, 14(3), 275-296.

하수현 · 이광호 (2011). 초등학교 6학년 학생들의 변수 개념 이해에 관한 사례 연구. 수학교육, 50(2), 213-231.

Ha, S. H., & Lee, G. H. (2011). Case study on the 6th graders' understanding of concepts of variable. *School Mathematics*, 50(2), 213-231.

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, transforming practice*. Heinemann Educational Books.

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. J., & Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5*. National Council of Teachers of Mathematics. 방정숙 · 최지영 · 이지영 · 김정원 공역 (2017). 대수적 사고의 필수 이해. 교우사.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39-87.

Brizuela, B., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A., & Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(1), 34-63.

Brizuela, B., & Schliemann, A. D. (2004). Fourth graders solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 33-40.

Carpenter, T. P., Franke, M., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-706). Information Age.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235-272). Lawrence Erlbaum.

Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. E. Greenes, & R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics* (70th yearbook., pp. 127-140). National Council of Teachers of Mathematics.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. W. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum.

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., & Ng, S. F. (2016). *Early algebra: Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer Nature.

Moss, J., & London McNab, S. (2011). An approach to geometric and numeric patterning that fosters second grade students′ reasoning and generalizing about functions and co-variation. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 277-301). Springer Berlin Heidelberg.

Pang, J. S., & Kim, J. W. (2018). Characteristics of Korean students' early algebraic thinking: a generalized arithmetic perspective. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds. ICME-13 monographs* (pp. 141-165). Springer.

Pinto, E., & Cañadas, M. C. (2018). Generalization in fifth graders within a functional approach. *PNA*, 12(3), 173-184.

Radford, L. (2011). Grade 2 students' non-symbolic algebraic thinking. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 303-322). Springer Berlin Heidelberg.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *The Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427.

Stephens, A., Torres, R. V., Sung, Y., Strachota, S., Gardiner, A., Blanton, M., Stroud, R., & Knuth, E. (2021). From “you have to have three numbers and a plus sign” to “it's the exact same thing”: K–1 students learn to think relationally about equations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 62, 100871.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford, & A. P. Schulte (Eds.), *Ideas of algebra, K–12: 1988 yearbook* (pp. 8–19). National Council of Teachers of Mathematics.

Ventura, A. C., Brizuela, B., Blanton, M., Sawrey, K., Gardiner, A., & Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in kindergarten and first grade students' thinking of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *The Journal of Mathematical Behavior*, 62, 100866.

藤井齊亮 외 41명 (2015). *新しい算數 4下*. 東京書籍.

Fifth Graders' Understanding of Variables from a Generalized Arithmetic and a Functional Perspectives

Pang, JeongSuk
Korea National University of Education
E-mail : jeongsuk@knue.ac.kr

Kim, Leena†
Graduate School of Korea National University of Education
E-mail : kimleena@hanmail.net

Gwak, EunAe
Seongnam jeil elementary school
E-mail : dmsdornt@naver.com

This study investigated fifth graders' understanding of variables from a generalized arithmetic and a functional perspectives of early algebra. Specifically, regarding a generalized perspective, we included the property of 1, the commutative property of addition, the associative property of multiplication, and a problem context with indeterminate quantities. Regarding the functional perspective, we covered additive, multiplicative, squaring, and linear relationships. A total of 246 students from 11 schools participated in this study. The results showed that most students could find specific values for variables and understood that equations involving variables could be rewritten using different symbols. However, they struggled to generalize problem situations involving indeterminate quantities to equations with variables. They also tended to think that variables used in representing the property of 1 and the commutative property of addition could only be natural numbers, and about 25% of the students thought that variables were fixed to a single number. Based on these findings, this paper suggests implications for elementary school students' understanding and teaching of variables.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97H20
* Key words : variables, generalized arithmetic perspective, functional perspective
† corresponding author