

## van Schooten의 연동장치에 대한 현대적 재해석

허 남 구 (순천대학교, 부교수)

17세기 수학자 van Schooten(1657)은 저서 'Exercitationum mathematicarum'에서 포물선, 타원, 쌍곡선을 그리기 위한 연동장치를 제시하였다. van Schooten이 제시한 연동장치는 활동 중심 수학교육과 학교수학에서 수학을 활용하기 위한 소재로 사용될 수 있다. 특히 학생들이 고등학교 교육과정에서 이차곡선을 조작하며 학습할 기회를 제공받지 못하고 있다는 점에서, van Schooten의 연동장치는 활동과 탐구 중심의 수학교육을 실현하는 데 도움을 줄 수 있다. 이를 위해 van Schooten의 연동장치를 동적 기하 환경에서 구현하는 방법을 제시하고, van Schooten의 연동장치를 이용하여 그린 도형의 자취가 포물선, 타원, 쌍곡선임을 증명하였다.

### I. 서론

최근 우리나라는 체험과 탐구 활동 중심의 수학교육을 강조하고 있다(교육부, 2015, 2020, 2022). 교육부(2020)는 '제3차 수학교육 종합계획'에서 학생들의 수학적 호기심을 자극하고 기초 수학 역량 및 정의적 태도를 신장시키는 방법으로 체험과 탐구 중심 수학교육을 제시하였다. 또한 2022 개정 교육과정은 문제해결, 추론, 의사소통, 연결, 정보처리를 수학 교과 역량으로 설정하였으며, 정보처리 역량의 함양을 위한 교수·학습 방법으로 "교구나 공학 도구를 활용하여 추상적인 수학 내용을 시각화하고 수학의 개념, 원리, 법칙에 대한 직관적 이해와 논리적 사고를 돕는다.", "학생이 주도적으로 교구나 공학 도구를 활용하여 탐구하게 한다."와 "계산 기능 함양을 목표로 하지 않는 교수·학습 상황에서는 복잡한 계산을 할 때 공학 도구를 이용할 수 있게 한다."를 제시하고 있어 체험과 활동 중심 수학교육의 중요성을 강조하고 있다(교육부, 2022).

수학교육에서 교구와 공학적 도구는 모든 학생에게 유용하게 활용될 수 있다. 고대부터 현대까지 교육적 목적으로 사용된 교구는 물리적 참여를 통해 추상화될 수 있도록 수학적 아이디어를 표현한 물체(Young, 1983), 학생이 감각을 통해 만질 수 있고 이동시킬 수 있으며 재배열이 가능하여 조작할 수 있는 물체(Kennedy, 1986), 수학적 개념을 병합하고 학생들이 여러 감각을 통해 만지거나 이동시킬 수 있는 물체(Bartolini Bussi, 2000)로 정의되고 있다. 이러한 교구는 학생들의 경험과 추상적인 수학 사이의 간격을 줄이는 데 활용될 수 있으며(Fennema, 1973), 모든 나이의 학생들이 수학을 학습하는 데 도움을 줄 수 있다(김수미, 2000). 더 나아가 정보 기술의 발달로 학생은 공학 도구를 활용하여 탐구함으로써 수학적 개념을 이해하고, 문제해결, 의사소통 및 창의력 신장에 도움을 받을 수 있다(부덕훈, 2021; 허남구, 류희찬, 2015).

수학사는 수학교육에서 좋은 소재로 사용될 수 있다. 수학사를 수학교육에서 활용하는 방법으로 수학사에 제시된 문제를 학생들에게 제시하는 것, 수학자에 대한 일화를 통해 학생들의 수학 학습 동기를 유발하는 것, 학생들과 프로젝트를 진행하는 것 등이 있다(Fauvel, & van Maanen, 2000). 특히 Bartolini Bussi(2000)는 학교수학에서 수학사를 활용하는 방법으로 고대 수학자들이 사용한 교구를 소개하고 이를 수학적으로 탐구하는 사례를 소개하였다. 이때 Bartolini Bussi는 학생의 나이에 맞추어 Dürer의 유리, Napier의 자 등을 소개하고 수학적으로

\* 접수일(2023년 8월 11일), 심사(수정)일(2023년 9월 16일), 게재확정일(2023년 9월 27일)

\* MSC2000분류 : 97U60

\* 주제어 : van Schooten, 연동장치, 링키지, 활동 중심 수학교육

탐구할 수 있는 과제를 제시하였다. 그 결과, 학생들은 고대 수학자들이 사용한 교구를 탐구함으로써 수학이 인류 문화의 발전에 이바지했다는 것을 인식할 수 있으며, 조작 활동을 통해 정의적 태도가 신장될 수 있으며, 수학적 사고를 할 수 있다(Bartolini Bussi, 2000). 더 나아가 학생들에게 추론을 통해 추측을 형성하고 이를 정당화할 수 있는 상황을 제공해 줄 수 있다(Antonini & Martignone, 2011).

이차곡선은 학교수학에서 중요하게 다루어지는 주제이다. 이차곡선은 고대 그리스 시대의 논증기하와 17세기 해석기하에서 중요하게 다루어지는 내용으로, 논증기하와 해석기하의 두 기하를 학습할 수 있는 유용한 주제이다(박경미 외, 2015, p. 175). 더 나아가 이차곡선의 성질은 실생활에서 많이 활용되고 있으며(이승훈, 조완영, 2014) 천문학 등 다른 교과와 관련되어 있어(허남구, 2017) 학생들에게 융합 역량을 신장시키는 데 활용될 수 있다. 하지만 학교수학에서 이차곡선은 대수적인 방법을 중심으로 지도하고 있어, 학생들이 이차곡선의 동적인 의미를 이해하지 못하고 있다. 이에 많은 연구자는 학생들이 이차곡선의 동적인 측면을 이해할 수 있도록 동적 기하 환경에서의 수학적 탐구를 강조하거나(양성현, 강욱기, 2011; 허남구, 2014, 2017) 교구의 사용을 강조하고 있다(권오남, 박정숙, 김은지, 2013; 진만영, 김동원, 송민호, 조한혁, 2012).

van Schooten(1657)은 그의 저서 'Exercitationum mathematicarum'에서 이차곡선을 그리기 위한 다양한 연동장치를 제시하고 있다. 학생들은 이러한 연동장치를 통해 포물선, 타원, 쌍곡선을 작도함으로써 이차곡선의 동적인 의미를 살펴볼 수 있다. 더 나아가 특정한 이차곡선을 그리기 위한 연동장치의 원리를 탐구해 볼 수 있는 기회를 제공해 줄 수 있다. 따라서 학생들은 van Schooten의 연동장치를 동적 기하 환경에서 탐구함으로써 이차곡선의 동적인 의미를 이해할 수 있으며, 수학자들이 사용한 교구를 수학적으로 탐구하는 과정에서 추론을 형성하고 이를 정당화할 수 있는 기회를 제공받을 수 있다.

본 연구에서는 17세기 수학자 van Schooten이 그의 저서 'Exercitationum mathematicarum'에서 제시한 이차곡선을 그릴 수 있는 연동장치를 동적 기하 환경(GSP 환경)에서 구현하는 방법을 제시하고, van Schooten의 연동장치를 이용하여 그린 도형이 이차곡선임을 증명할 것이다.

## II. 연구의 배경

눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용한 고대 그리스 시대의 작도는 이차곡선 위의 한 점을 작도할 수 있지만 고대 그리스 시대의 작도 방법을 통해 포물선, 타원과 쌍곡선을 그릴 수 없다. 고대 수학자들은 이차곡선을 그리기 위하여 도구를 사용하였다고 알려져 있으나 후대에 전달되지 못하였으며, Serlio는 여러 개의 원을 이용하여 타원과 유사한 도형을 작도하여 사용하였다(Rosin, 2001). 이후 van Schooten과 Descartes 등은 이차곡선을 그릴 수 있는 연동장치를 개발하였으며, 최근 공학 도구의 발전에 따라 동적 기하 환경에서 이차곡선의 자취를 그릴 수 있다. 현재 수학교과서는 동적 기하 환경에서 이차곡선의 자취를 그리는 방법을 제시(류희찬 외, 2019)하거나 종이접기를 이용하여 이차곡선 위의 몇 개의 점이나 포락선을 이용하여 그래프의 개형을 표현하는 방법을 제시(김원경 외, 2019; 류희찬 외, 2019)하고 있다.

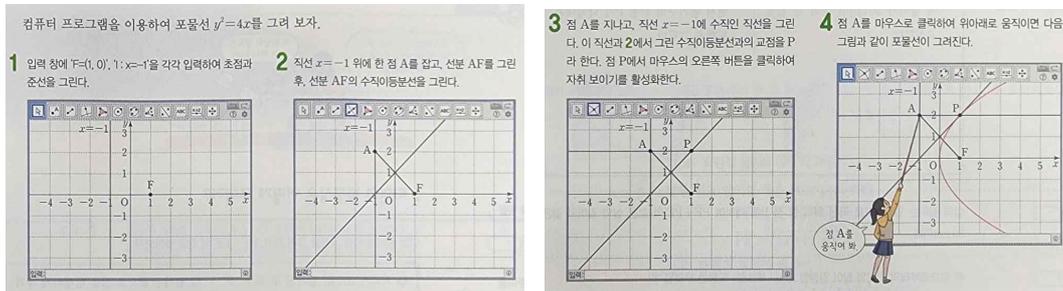
### 1. 수학교과서의 이차곡선

수학교과서는 동적 기하 환경에서 이차곡선의 그래프를 표현하거나 종이접기를 이용하여 이차곡선 위의 유한 개의 점이나 포락선을 이용하여 그래프의 개형을 표현하고 있다.

학생들은 동적 기하 환경에서 이차곡선의 그래프를 표현할 수 있다. 학생들은 중학교 1학년에 학습한 작도 도구인 눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용해서 이차곡선 위의 한 점을 작도할 수 있으나 포물선, 타원, 쌍곡선을 그릴 수 없다. 하지만 학생들이 GeoGebra, Algeomath, GSP 등 동적 기하 소프트웨어를 활용하여 작도 도구를 활

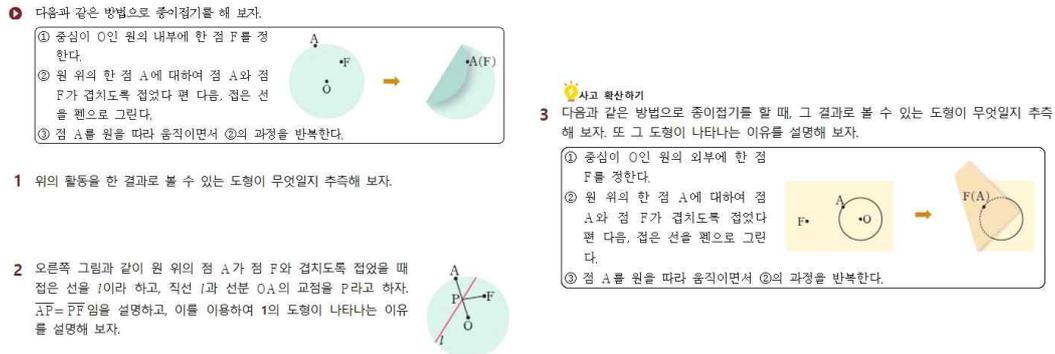
용하여 이차곡선을 작도하는 것과 같은 방법으로 이차곡선 위의 한 점을 작도한 후, 독립적인 개체를 움직이면 이차곡선 위의 점의 자취를 이용하면 이차곡선을 표현할 수 있다.

이차곡선은 원뿔곡선의 절단면, 이심률을 이용한 방법, 기하대수적 방법으로 정의할 수 있다(이승훈, 조완영, 2014). 원뿔곡선의 절단면으로서의 이차곡선은 3차원 기하 표현이 가능한 동적 기하 환경에서 탐구할 수 있으나 눈금 없는 자와 컴퍼스를 이용하여 작도할 수 없다. 따라서 2차원의 동적 기하 소프트웨어를 활용한 이차곡선에서는 이심률을 이용한 정의(허남구, 2017)나 기하대수적 정의 방법(류희찬 외, 2019)을 이용한다. 특히 고등학교 기하 과목은 이차곡선을 기하대수적 방법으로 정의하고 있으며 이심률은 다루지 않으므로(교육부, 2015) 학교수학에서 동적 기하 환경에서 이차곡선을 표현할 때는 기하대수적 정의를 이용한다. [그림 II-1]은 류희찬 외(2019)가 지오지브라 환경에서 포물선  $y^2 = 4x$ 를 그리는 방법을 제시한 것이다.



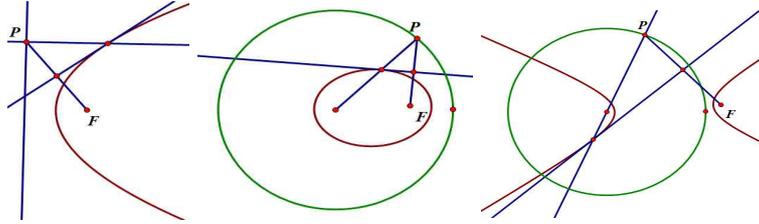
[그림 II-1] GeoGebra 환경에서 포물선  $y^2 = 4x$  그리기 (류희찬 외, 2019, p. 19)

학생들은 종이접기를 통해 이차곡선의 개형을 나타낼 수 있다. 작도 도구를 이용하여 포물선 위의 점을 작도하는 방법은 여러 가지가 있지만, 주어진 직선(준선)에 수직인 직선과 두 점을 지나는 선분의 수직이등분선의 교점으로 포물선 위의 점을 작도하는 방법이 있다. 마찬가지로 타원과 쌍곡선 위의 점을 작도하는 방법은 여러 가지가 있지만, 두 점을 지나는 선분의 수직이등분선과 두 점을 지나는 직선의 교점으로 타원과 쌍곡선 위의 점을 작도할 수 있다. 이때 두 점을 지나는 직선, 주어진 직선에 수직인 직선과 두 점을 지나는 선분의 수직이등분선은 종이접기를 이용하여 표현할 수 있다. 따라서 종이접기는 학생들이 이차곡선 위의 한 점을 표현할 수 있도록 도와줄 수 있으며, 이차곡선 위의 점을 여러 개 표현하여 그래프의 개형을 관찰할 수 있다. [그림 II-2]는 김원경 외(2019)가 학생들이 종이접기를 통해 타원과 쌍곡선 위의 점을 표현하고 이를 반복할 때 나타나는 도형을 추측하고 증명하는 과제를 제시한 것이다.

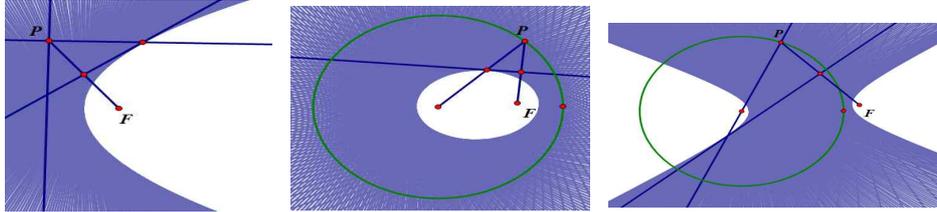


[그림 II-2] 종이접기를 통해 타원과 쌍곡선 표현하기 (김원경 외, 2019, p. 32)

이차곡선의 그래프는 포락선을 이용하여 나타낼 수 있다. [그림 II-3]은 GSP 환경에서 포물선, 타원과 쌍곡선 위의 한 점을 작도한 것이다. 이때 선분  $PF$ 의 수직이등분선은 앞서 작도한 이차곡선 위의 점에서의 접선이다(허남구, 2014). 따라서 선분  $PF$ 의 수직이등분선의 흔적을 동적 기하 환경에 나타내면 [그림 II-4]와 같이 포락선으로서 이차곡선을 표현할 수 있다.



[그림 II-3] 선분  $PF$ 의 수직이등분선과 이차곡선 사이의 관계



[그림 II-4] 포락선으로서의 이차곡선

[그림 II-4]의 포락선을 이용하여 이차곡선의 그래프를 나타낸 결과를 살펴보면, 포물선은 주어진 직선(준선)에 수직인 직선과 두 점을 지나는 선분에 대한 수직이등분선이 사용되었으며, 타원과 쌍곡선은 직선, 두 점을 지나는 선분에 대한 수직이등분선이 사용되었다. 따라서 종이접기는 학생들이 선분  $PF$ 의 수직이등분선을 반복하여 나타냄으로써 포락선으로서의 이차곡선을 관찰할 수 있도록 도와준다. [그림 II-5]는 류희찬 외(2019)가 학생들이 선분  $PF$ 의 수직이등분선을 펜으로 표시하고 이를 반복적으로 시행하여 포물선과 타원을 포락선의 관점에서 만들어보도록 제시한 과제이다.

포물선, 타원, 쌍곡선은 여러 가지 방법으로 만들 수 있다. 예를 들어 원뿔을 여러 가지 각도로 잘라 그 단면으로 만들 수도 있고, 저와 실을 이용하여 만들기도 하고, 동심원들을 그려 만들기도 한다. 여기서는 종이를 접은 선이 접선이 되는 이차곡선을 만들어 보자. 다음 순서에 따라 직사각형 모양의 종이를 접어 포물선을 만들어 보자.

**준비**

① 직사각형 모양의 종이의 하단에서 약간 밑에서 종이를 접는다.      ② 종이의 하단이 점 F와 만나도록 종이를 접는다.

③ ①와 같은 방법으로 종이를 20~30번 접고, 접은 자국을 선으로 긋는다.      ④ ③에서 그은 선이 나타내는 곡선의 모양을 관찰한다.

**문제 해결하기**      다음과 같은 순서로 원 모양의 종이를 접어 타원을 만들어 보자. 세 번째 그림을 완성하고, 종이를 접은 자국에서 타원의 모양이 나타나는 이유를 설명하여 보자.

**도움**

① 원 모양의 종이의 내부에 임의의 점을 찍고 종이의 둘레가 이 점과 만나도록 접는다.      ② 약간의 간격을 두고 원 모양의 종이를 한 바퀴 돌리면서 ①과 같은 방식으로 종이를 계속 접고 그 접은 자국을 선으로 그으면 타원의 모습이 나타난다.



[그림 II-5] 종이접기를 통해 포물선과 타원 만들기 (류희찬 외, 2019, p. 56)

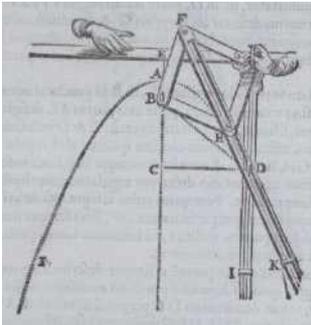
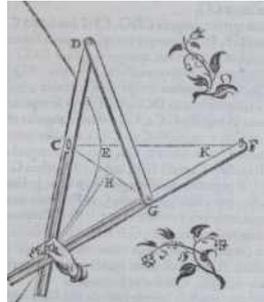
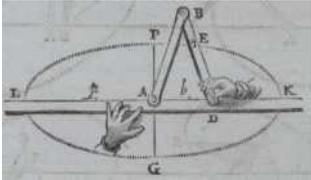
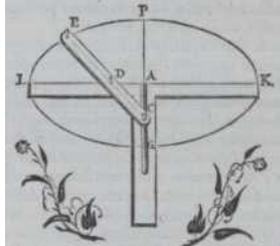
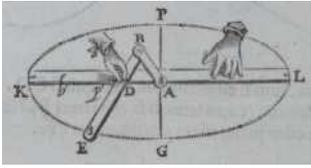
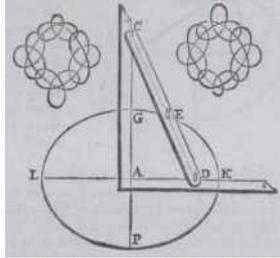
2. 연구대상 및 연구방법

본 연구는 van Schooten의 저서 'Exercitationum mathematicarum'에서 제시한 포물선, 타원, 쌍곡선을 그리기 위한 연동장치를 동적 기하 환경(GSP 환경)에서 구현하고, 연동장치를 이용하여 그린 도형의 그래프가 이차곡선임을 증명하는 데 목적이 있다. 본 연구에서 동적 기하 환경에서 구현한 연동장치는 <표 II-1>과 같다.

<표 II-1>은 van Schooten이 제시한 포물선, 타원, 쌍곡선을 그리기 위한 연동장치이다. 연동장치 1은 포물선을 그리기 위한 것이고, 연동장치 2-1과 연동장치 2-2는 연동장치를 이용하여 상부타원과 하부타원을 그리기 위한 것이다. 연동장치 3은 쌍곡선을 그리는 것으로 <표 II-1>에서는 쌍곡선 일부로 왼쪽 부분을 그리는 방법을 보여주고 있다. 연동장치 4와 연동장치 5는 타원을 그리는 연동장치로 <표 II-1>의 그림에서는 타원 일부로 각각 왼쪽 부분과 오른쪽 부분을 그리는 방법을 보여주고 있다.

본 연구에서는 <표 II-1>에 나타난 6개의 연동장치를 GSP 환경에서 구현하는 방법을 제시하고, 연동장치를 이용하여 그린 그림이 이차곡선이 됨을 수학적으로 증명할 것이다.

<표 II-1> van Schooten의 연동장치

| 순번  | 연동장치  | 관련된 이차곡선    | 순번 | 연동장치   | 관련된 이차곡선    |
|-----|---|-------------|----|--|-------------|
| 1   |   | 포물선 (p.357) | 3  |   | 쌍곡선 (p.345) |
| 2-1 |  | 타원 (p.322)  | 4  |  | 타원 (p.324)  |
| 2-2 |  |             | 5  |  | 타원 (p.325)  |

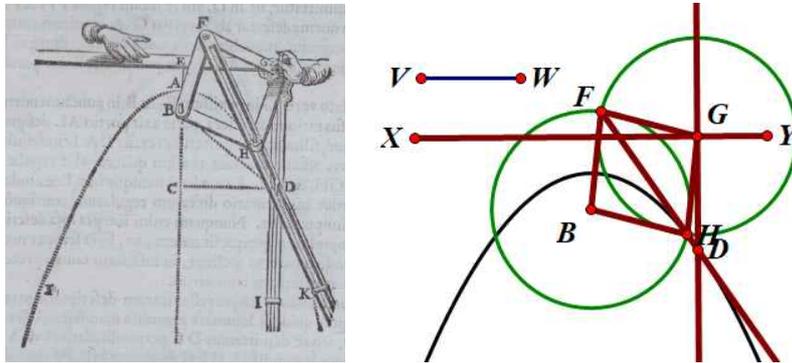
### III. 연구 결과 및 논의

#### 1. 연동장치 1의 동적 기하 환경에서의 구현 및 수학적 증명

##### 가. 동적 기하 환경에서의 구현

GSP 환경에서 연동장치 1을 구현하는 과정은 다음과 같다.

- 1) 두 선분  $VW$ 와  $XY$ 를 작도한다.
- 2) 선분  $XY$  위의 임의의 한 점  $G$ 와 점  $G$ 를 지나면서 선분  $XY$ 에 수직인 직선  $h$ 를 작도한다.
- 3) 직선  $XY$  위에 있지 않은 점  $B$ 를 작도한다.
- 4) 두 점  $B$ 와  $G$ 가 각각 중심이고, 반지름의 길이가  $\overline{VW}$ 인 두 원을 작도한다. 이때 두 원의 교점을  $F$ 와  $H$ 라 하자.
- 5) 두 점  $F$ 와  $H$ 를 지나서 직선을 작도하고, 두 직선  $FH$ 와  $h$ 의 교점을  $D$ 라 하자. 이때 점  $G$ 를 움직이면서 점  $D$ 의 자취를 나타내면 포물선이다.



[그림 III-1] 연동장치 1과 동적 기하 환경에서의 구현

##### 나. 수학적 증명

증명) 선분  $FH$ 는 마름모  $FBHG$ 의 대각선이므로  $\angle BHF = \angle GHF$ 이다.

두 삼각형  $BHD$ 와  $GHD$ 에 대하여

$$\overline{BH} = \overline{GH}, \overline{HD} \text{ (공통)}, \angle BHD = \angle GHD = 180^\circ - \angle BHF$$

이므로  $\triangle BHD \cong \triangle GHD$ 이다. 따라서  $\overline{BD} = \overline{GD}$ 이다.

즉, 연동장치 1을 이용하여 만든 도형은 초점이  $B$ 이고, 준선이  $\overline{XY}$ 인 포물선이다. ■

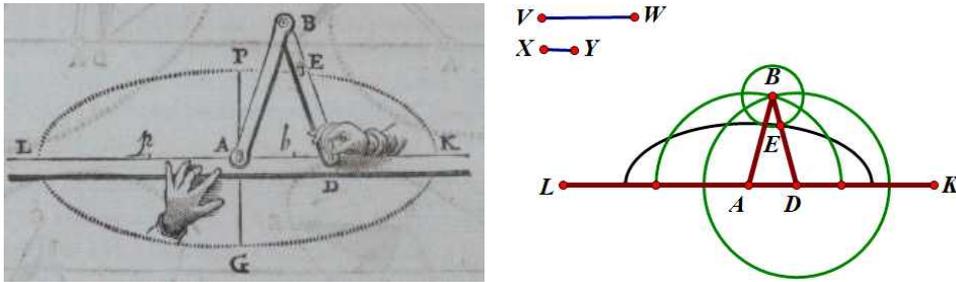
#### 2. 연동장치 2-1)과 2-2)의 동적 기하 환경에서의 구현 및 수학적 증명

##### 가. 동적 기하 환경에서의 구현

GSP 환경에서 연동장치 2-1)를 구현하는 과정은 다음과 같다.

- 1) 연동장치의 고정된 길이를 나타내는 두 선분  $VW$ 와  $XY$ 를 작도한다.
- 2) 선분  $LK$ 를 작도한다.

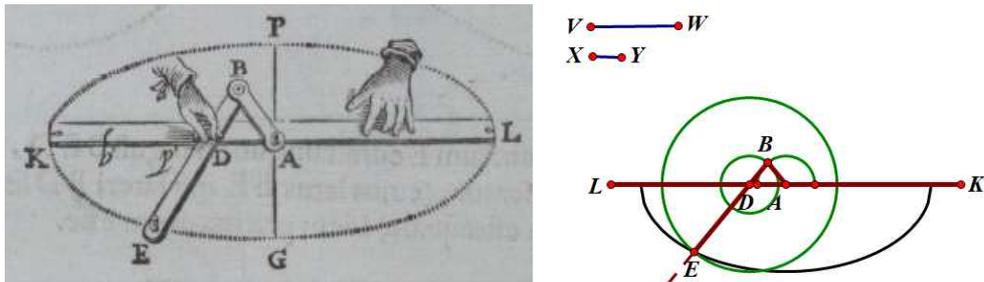
- 3) 선분  $LK$ 의 중점  $A$ 와 임의의 한 점  $D$ 를 작도한다.
- 4) 점  $A$ 가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{VW}$ 인 상반원과 점  $D$ 가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{VW}$ 인 원을 작도한다. 이때 상반원과 원의 교점을  $B$ 라 하자.
- 5) 점  $B$ 가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{XY}$ 인 원과 선분  $BD$ 의 교점을  $E$ 라 하자. 이때 점  $D$ 를 움직이면서 점  $E$ 의 자취를 나타내면 상부타원이다.



[그림 III-2] 연동장치 2-1)과 동적 기하 환경에서의 구현

GSP 환경에서 연동장치 2-2)를 구현하는 과정은 다음과 같다.

- 1) 연동장치의 고정된 길이를 나타내는 두 선분  $VW$ 와  $XY$ 를 작도한다.
- 2) 선분  $LK$ 를 작도한다.
- 3) 선분  $LK$ 의 중점  $A$ 와 임의의 한 점  $D$ 를 작도한다.
- 4) 점  $A$ 가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{XY}$ 인 상반원과 점  $D$ 가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{XY}$ 인 원을 작도한다. 이때 상반원과 원의 교점을  $B$ 라 하자.
- 5) 점  $D$ 가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{VW}$ 인 원과 반직선  $\overline{BD}$ 의 교점을  $E$ 라 하자. 이때 점  $D$ 를 움직이면서 점  $E$ 의 자취를 나타내면 하부타원이다.



[그림 III-3] 연동장치 2-2)과 동적 기하 환경에서의 구현

나. 수학적 증명

연동장치 2-1)의 증명) 직선  $LK$ 를  $x$ 축이라 하고, 점  $A$ 의 좌표를  $(0,0)$ , 점  $D$ 를  $(t,0)$ 이라 하자.

$a = \overline{VW}$ ,  $b = \overline{XY}$ 라 하면  $\overline{AB} = \overline{BD}$ 이므로 점  $B$ 의 좌표는  $(\frac{t}{2}, \sqrt{a^2 - \frac{t^2}{4}})$ 이고,

점  $E$ 는 선분  $BD$ 를  $b:a-b$ 로 내분하는 점이므로 점  $E$ 의 좌표는  $\left(\frac{t(a+b)}{2a}, \frac{a-b}{a}\sqrt{a^2-\frac{t^2}{4}}\right)$ 이다.

$x = \frac{t(a+b)}{2a}, y = \frac{a-b}{a}\sqrt{a^2-\frac{t^2}{4}}$  라 하면  $t = \frac{2ax}{a+b}$  이므로  $\left(\frac{ay}{a-b}\right)^2 = a^2 - \frac{t^2}{4} = a^2 - \frac{a^2x^2}{(a+b)^2}$  이다.

즉  $\frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a-b)^2} = 1$  이고,  $y > 0$  이므로 상부타원이다. ■

연동장치 2-2의 증명) 직선  $LK$ 를  $x$ 축이라 하고, 점  $A$ 의 좌표를  $(0,0)$ , 점  $D$ 를  $(t,0)$ 이라 하자.

$a = \overline{AV}, b = \overline{XY}$ 라 하면  $\overline{AB} = \overline{BD}$ 이므로 점  $B$ 의 좌표는  $\left(\frac{t}{2}, \sqrt{b^2 - \frac{t^2}{4}}\right)$ 이고,

점  $E$ 는 선분  $BD$ 를  $a:b$ 로 외분하는 점이므로 점  $E$ 의 좌표는  $\left(\frac{t(2a-b)}{2(a-b)}, -\frac{b}{a-b}\sqrt{b^2 - \frac{t^2}{4}}\right)$ 이다.

$x = \frac{t(2a-b)}{2(a-b)}, y = -\frac{b}{a-b}\sqrt{b^2 - \frac{t^2}{4}}$  라 하면  $t = \frac{2(a-b)x}{2a-b}$  이므로  $\left\{-\frac{(a-b)y}{b}\right\}^2 = b^2 - \frac{t^2}{4} = b^2 - \frac{(a-b)^2x^2}{(2a-b)^2}$  이다.

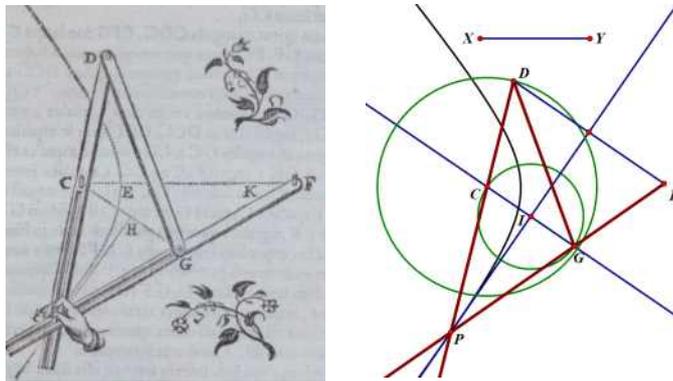
즉  $\frac{x^2}{(2a-b)^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{b^2}{(a-b)^2}$  이고,  $y < 0$  이므로 하부타원이다. ■

### 3. 연동장치 3의 동적 기하 환경에서의 구현 및 수학적 증명

#### 가. 동적 기하 환경에서의 구현

GSP 환경에서 연동장치 3을 구현하는 과정은 다음과 같다.

- 1) 연동장치의 고정된 길이를 나타내는 선분  $XY$ 를 작도한다.
- 2) 두 정점  $C$ 와  $F$ 를 작도한다.
- 3) 점  $C$ 가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{XY}$ 인 원을 작도하고, 원 위의 임의의 한 점을  $D$ 라 하자.
- 4) 선분  $DF$ 의 수직이등분선을 작도하자.
- 5) 점  $C$ 를 지나면서 선분  $DF$ 에 평행한 직선을 작도하자. 이 직선이 선분  $DF$ 의 수직이등분선과의 교점을  $I$ 라 하자.
- 6) 점  $C$ 를 지나면서 선분  $DF$ 에 평행한 직선과 점  $I$ 가 중심이고 점  $C$ 를 지나는 원의 교점을  $G$ 라 하자.
- 7) 두 직선  $CD$ 와  $FG$ 의 교점을  $P$ 라 하자. 이때 점  $D$ 를 움직이면서 점  $P$ 의 자취를 나타내면 쌍곡선이다.



[그림 III-4] 연동장치 3과 동적 기하 환경에서의 구현

**나. 수학적 증명**

증명) 두 직선  $CD$  와  $GF$  의 교점을  $P$  라 하자.

삼각형  $PDF$  에 대하여 선분  $DF$  의 수직이등분선이  $P$  를 지나므로  $\overline{PD} = \overline{PF}$  이다.

$$\overline{PF} - \overline{PC} = \overline{PD} - \overline{PC} = \overline{CD} = \overline{XY}$$

이므로 점  $P$  는 두 점  $C$  와  $F$  를 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점이다.

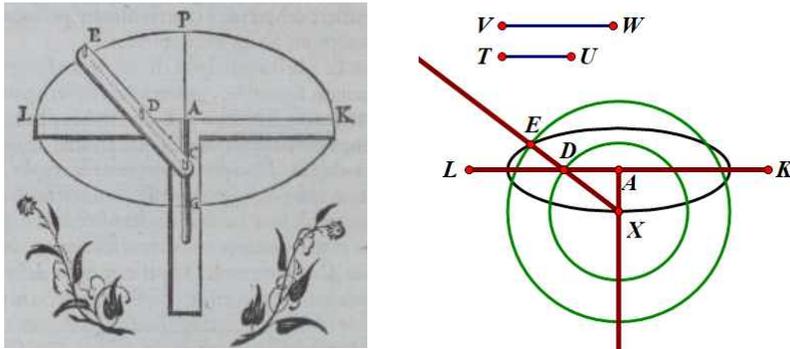
즉, 연동장치 3을 이용하여 만든 도형은 초점이  $C$  와  $F$  인 쌍곡선이다. ■

**4. 연동장치 4의 동적 기하 환경에서의 구현 및 수학적 증명**

**가. 동적 기하 환경에서의 구현**

GSP 환경에서 연동장치 4를 구현하는 과정은 다음과 같다.

- 1) 연동장치의 고정된 길이를 나타내는 두 선분  $VW$  와  $TU$  를 작도한다.
  - 2) 선분  $LK$  를 작도한다.
  - 3) 선분  $LK$  의 중점  $A$  과 점  $A$  를 지나면서  $LK$  에 수직인 반직선을 작도한다.
  - 4) 3)의 반직선 위의 임의의 한 점  $X$  를 작도한다.
  - 5) 점  $X$  가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{TU}$  인 원을 작도한다. 이때 원과 선분  $LK$  의 교점을  $D$  라 하자.
  - 6) 점  $X$  가 시점이고 점  $D$  를 지나는 반직선  $\overline{XD}$  를 작도한다.
  - 7) 점  $X$  가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{VW}$  인 원을 작도한다. 이때 원과 반직선  $\overline{XD}$  의 교점을  $E$  라 하자.
- 그러면 점  $X$  를 움직이면서 나타나는 점  $E$  의 자취는 타원이다.



[그림 III-5] 연동장치 4와 동적 기하 환경에서의 구현

**나. 수학적 증명**

증명) 직선  $LK$  를  $x$  축이라 하고, 점  $A$  의 좌표를  $(0,0)$ , 점  $P$  를  $(0,t)$  라 하자.

$$a = \overline{VW}; b = \overline{XY}; \theta = \angle ADE \text{ 라 하면}$$

두 점  $D$  와  $E$  의 좌표는 각각  $(b\cos\theta, a\sin\theta + t)$  와  $(a\cos\theta, t + b\sin\theta)$  이다.

$t + a\sin\theta = 0$  으로부터  $t = -a\sin\theta$  가 되어, 점  $E$  의 좌표는  $(a\cos\theta, (b-a)\sin\theta)$  이다.

$$x = a\cos\theta, y = (b-a)\sin\theta \text{ 라 하면 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(b-a)^2} = 1 \text{ 이다.}$$

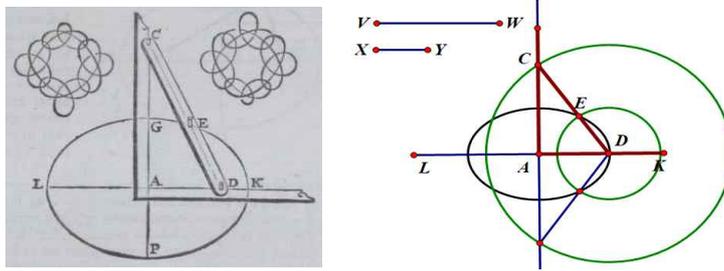
따라서 연동장치 4을 이용하여 만든 도형은 타원이다. ■

## 5. 연동장치 5의 동적 기하 환경에서의 구현 및 수학적 증명

### 가. 동적 기하 환경에서의 구현

GSP 환경에서 연동장치 5를 구현하는 과정은 다음과 같다.

- 1) 연동장치의 고정된 길이를 나타내는 두 선분  $VW$ 와  $XY$ 를 작도한다.
- 2) 선분  $LK$ 를 작도한다.
- 3) 선분  $LK$ 의 중점  $A$ 와 임의의 한 점  $D$ 를 작도한다. 또한 선분  $LK$ 의 수직이등분선을 작도한다.
- 4) 점  $D$ 가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{VW}$ 인 원을 작도한다. 이때 원과 선분  $LK$ 의 수직이등분선의 교점을  $C$ 라 하자.
- 5) 점  $D$ 가 시점이고 점  $C$ 를 지나는 반직선  $\overrightarrow{DC}$ 를 작도한다.
- 6) 점  $D$ 가 중심이고 반지름의 길이가  $\overline{XY}$ 인 원을 작도한다. 이때 원과 반직선  $\overrightarrow{DC}$ 의 교점을  $E$ 라 하자. 그러면 점  $D$ 를 움직이면서 나타나는 점  $E$ 의 자취는 타원이다.



[그림 III-6] 연동장치 5와 동적 기하 환경에서의 구현

### 나. 수학적 증명

증명) 직선  $LK$ 를  $x$ 축이라 하고, 점  $A$ 의 좌표를  $(0,0)$ , 점  $D$ 를  $(t,0)$ 라 하자.

$a = \overline{VW}$ ,  $b = \overline{XY}$ ,  $\theta = \angle KDC$ 라 하면

두 점  $D$ 와  $E$ 의 좌표는 각각  $(t + a\cos\theta, a\sin\theta)$ 와  $(t + b\cos\theta, b\sin\theta)$ 이다.

$t + a\cos\theta = 0$  으로부터  $t = -a\cos\theta$ 가 되어, 점  $E$ 의 좌표는  $((b-a)\cos\theta, b\sin\theta)$ 이다.

$x = (b-a)\cos\theta$ ,  $y = b\sin\theta$ 라 하면  $\frac{x^2}{(b-a)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이다.

따라서 연동장치 4을 이용하여 만든 도형은 타원이다. ■

## IV. 결론 및 제언

본 연구에서는 van Schooten이 제시한 연동장치를 동적 기하 환경(GSP 환경)에서 구현하고, 이를 수학적으로 증명하였다. Bartolini Bussi(2000)에 따르면 학교수학에서 수학을 활용하는 좋은 방법 중 하나는 고대 수학자들이 사용했던 도구를 실제 수업에서 활용하여 수학적으로 탐구하는 것이라고 하였다. van Schooten의 연동

장치는 고대 그리스 시대의 눈금없는 자와 컴퍼스를 활용하여 그리기 힘든 포물선, 타원과 쌍곡선을 그리는 도구로 수학적 의미가 있다. 또한 학교수학의 이차곡선 지도는 기하적인 의미보다는 대수적인 방법을 중심으로 이루어지고 있다는 한계가 있다(진만영, 김동원, 송민호, 조한혁, 2012). van Schooten이 제시한 연동장치를 이차곡선의 지도에 활용함으로써 학생들은 대수적인 방법과 함께 동적인 의미를 이해할 수 있으며, 수학자들이 이차곡선을 그리는 데 사용한 연동장치의 원리를 탐구하는 과정에서 수학적 추론 능력을 함양시킬 수 있다. 이러한 점에서 van Schooten이 제시한 연동장치를 학교수학에서 활용하고 이를 탐구하는 것은 의미가 있다.

본 연구에서 van Schooten이 제시한 연동장치를 동적 기하 환경(GSP 환경)에서 구현하는 과정에서 여러 기하적 대상 사이의 종속 관계를 탐구해야 할 필요가 있으며, 연동장치에서 막대(bar)의 길이가 불변량을 고려해야 할 필요가 있었다. 이는 동적 기하 소프트웨어를 이용하여 작도하는 과정에서 불변량 수준이 중요하다는 Leung, Baccaglioni-Frank, Mariotti(2013)의 연구와 Cissoid 곡선, Lemniscate 곡선, Conchoid 곡선 등을 작도하는 데 불변량을 인식하고 사용하는 수준이 중요하다는 최남광과 류희찬(2015)의 연구를 고려하였을 때, 학생들이 van Schooten이 제시한 연동장치를 동적 기하 환경에서 구현하는 것은 의미 있는 활동이 될 수 있다.

본 연구에서 van Schooten이 제시한 연동장치를 이용하여 그린 도형이 이차곡선이 되는 것을 증명하였다. 연동장치를 이용하여 그린 도형이 이차곡선임을 증명하는 과정에서 포물선, 타원, 쌍곡선의 기하대수적 정의가 사용된다는 점에서, 연동장치는 학생들이 이차곡선을 학습한 이후 수학사에서 탐구할 수 있는 좋은 소재로 활용될 수 있다.

고대 그리스 시대부터 현대까지 수학적 지식을 이해하기 위한 도구로 다양한 교구가 사용되었다. 특히 교구는 학생의 나이와 관계없이 수학 학습에 인지적인 측면과 정의적인 측면에서 도움을 줄 수 있다. 따라서 연구자들은 수학과 수학교육사의 측면에서 중요하게 활용되었던 교구에 대해 다시 한번 살펴보고, 이를 수학교육에서 활용할 수 있는 방법에 관해 지속적으로 연구할 필요가 있다.

## 참 고 문 헌

- 교육부 (2015). 2015 개정 교육과정. 교육부 고시 제2015-74 [별책 8]. 교육부.
- Ministry of Education (2015). *2015 Revised curriculum*. No. 2015-74 [Additional Book 8]. Ministry of Education.
- 교육부 (2020). 수학교육 종합계획 (안) (2020년~2024년). 교육부.
- Ministry of Education (2020). *A comprehensive math education plan (2020-2024)*. Ministry of Education.
- 교육부 (2022). 2022 개정 교육과정. 교육부 고시 제2022-33호 [별책 8]. 교육부.
- Ministry of Education (2022). *2022 Revised curriculum*. No. 2022-33 [Additional Book 8]. Ministry of Education.
- 권오남 · 박정숙 · 김은지 (2013). 수학기계를 활용한 수학과 수업. 한국수학사학회지, **26(4)**, 301-320.
- Kwon, O. N., Park, J. S., & Kim, E. J. (2013) Instructions of history of mathematics with mathematical machines. *The Korean Journal for History of Mathematics*, **26(4)**, 301-320.
- 김수미 (2000). 수학교육에서의 조작교구에 관한 연구. 학교수학, **2(2)**, 459-474.
- Kim, S. (2000). A study on manipulative materials in mathematics education. *School Mathematics*, **2(2)**, 459-474.
- 김원경 외 (2019). 기하. 비상교육.
- Kim, W. K. et al. (2019). *Geometry: Visang*.
- 박경미 외 (2015). 2015 수학과 교육과정 개정 시안 개발 정책 연구. 한국과학창의재단.
- Park, K. M. et al. (2015). *A study on the development policy of the 2015 mathematics curriculum revised draft*. KOFAC.
- 부덕훈 (2021). 수학 사과과정에서 공학도구를 이용한 창의력 증진. 수학교육논문집, **35(1)**, 119-136.

- Boo, D. H. (2021). Improvement of the mathematical creativity using engineering tools in mathematics mentorship program. *Communications of Mathematical Education*, **35(1)**, 119-136.
- 류희찬 외 (2019). 기하. 천재교과서.
- Lew, H. C. et al. (2019). *Geometry*: Chunjae.
- 양성현 · 강욱기 (2011). GeoGebra를 활용한 역동적인 시각적 표상에 기반한 이차곡선 지도 방안. *학교수학*, **13(3)**, 447-468.
- Yang, S. H. & Kang, O. K. (2011). Instruction method for quadratic curve based on dynamic visual representation by applying GeoGebra. *School Mathematics*, **13(3)**, 447-468.
- 이승훈 · 조완영 (2014). 사범대학의 이차곡선 영역 교육에 대한 교수 및 교사의 인식. *학교수학*, **16(4)**, 827-845.
- Yi, S. H. & Cho, W. Y. (2014). The perception of the professors and teachers about the education on quadratic curves in various universities. *School Mathematics*, **16(4)**, 827-845.
- 진만영 · 김동원 · 송민호 · 조한혁 (2012). 원뿔곡선의 수학과 수학교육. *한국수학사학회지*, **25(4)**, 83-99.
- Jin, M. Y., Kim, D. W., Song, M. H., & Cho, H. H. (2012). The history of conic sections and mathematics education. *The Korean Journal for History of Mathematics*, **25(4)**, 83-99.
- 최남광 · 류희찬 (2015). 역동적 기하 환경에서 곡선 탐구를 통한 수학영재들의 불변량 활용에 관한 사례 연구. *수학교육학연구*, **25(4)**, 473-498.
- Choi, N. K., & Lew, H. C. (2015). A case study on utilizing invariants for mathematically gifted students by exploring algebraic curves in dynamic geometry environments. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **25(4)**, 473-498.
- 허남구 (2014). 기하학적 방법을 통한 이차곡선 접선의 작도에 관한 연구. *과학영재교육*, **6(3)**, 125-133.
- Heo, N. G., (2014). Analogical reasoning in construction of quadratic curves. *Journal of Science Education for the Gifted*, **6(3)**, 125-133.
- 허남구 (2017). 이차곡선의 작도 활동에서 나타난 유추적 사고. *수학교육학연구*, **27(1)**, 51-67.
- Heo, N. G., (2017). A study on construction of tangent line of quadratic curves through geometric method. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **27(1)**, 51-67.
- 허남구 · 류희찬 (2015). 활동 중심 수학과 디지털교과서의 개발 및 적용. *수학교육학연구*, **25(2)**, 241-261.
- Heo, N. G., & Lew, H. C. (2015). Development and application of action based mathematics digital textbook. *Journal of Educational Research in Mathematics*, **25(2)**, 241-261.
- Antonini, S. & Martignone, F. (2011). *Pantographs for geometrical transformation: An explorative study on argumentation*. Consultado el 14 de abril de 2011 en.
- Bartolini Bussi, M. G. (2000). Ancient instruments in the modern classroom, In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI Study* (pp. 343-351). Kluwer.
- Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000). *History in mathematics education: The ICMI Study*. Kluwer.
- Fennema, E. (1973). Manipulatives in the classroom. *Arithmetic Teacher*, **20(May)**, 350-352.
- Kennedy, L. M. (1986). A rationale. *Arithmetic Teacher*, **33(6)**, 6-7.
- Leung, A., Baccaglioni-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2013). Discernment of invariants in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, **84(3)**, 439-460.
- Rosin, P. L. (2001). On Serlio's constructions of ovals. *The Mathematical Intelligencer*, **23(1)**, 58-69.
- van Schooten, F. (1657). *Exercitationum mathematicarum*. Elsevier.
- Young, S. L. (1983). How teacher educators can use manipulative materials with preservice teachers. *Arithmetic Teacher*, **31**, 12-13.

## A Modern Reinterpretation of the Linkages by Van Schooten

**Heo, Nam Gu**

Sunchon National University

E-mail : [ngheo@snu.ac.kr](mailto:ngheo@snu.ac.kr)

In his book "Exercitationum Mathematicarum," a 17th-century mathematician van Schooten proposed linkages for drawing parabola, ellipse, and hyperbola. The linkages proposed by van Schooten can be used in action-based mathematics education and as a material for using mathematical history in school mathematics. In particular, students are not provided with the opportunity to learn by manipulating the quadratic curves in the high school curriculum, so van Schooten's linkages can be used for school mathematics. To this end, a method of implementing van Schooten's linkage in a dynamic geometry environment was presented, and proved that the traces of the figure drawn using van Schooten's linkage were parabola, ellipse, and hyperbola.

---

\* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U60

\* Key words : van Schooten, linkage, action based mathematics education