韓國數學教育學會誌 시리즈 C <初等數學教育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2023.26.4.219
2023. 10. 제 26권, 제 4호, 219-236

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
October. 2023, Vol. 26, No. 4, 219-236

예비교사의 시각적 표현에서의 수학적 이해와 문제 만들기 능력의 관련성 분석: 분수의 곱셈과 나눗셈을 중심으로

손태권(봉명초등학교, 교사)

본 연구는 분수의 곱셈과 나눗셈에서 예비교사의 수학적 이해와 문제 만들기 사이의 관련성을 탐색하였다. 이를 위하여 41명의 예비교사들을 대상으로 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 시각적 표현과 문제 만들기 과제를 수행하고 수학적 이해 정도와 문제 만들기 능력을 측정하였으며, 수학적 이해 정도와 문제 만들기 능력 사이의 관련성을 교차분석을 통해 알아보았다. 그 결과, 예비교사들의 대부분은 분수의 곱셈과 나눗셈의 개념적 이해를 나타냈으며, 다섯 가지 유형의 어려움이 나타났다. 문제 만들기에서는 대부분의 예비교사들이 풀 수 있는 수학 문제를 만들지 못했으며 이 과정에서 네 가지 유형의 어려움이 나타났다. 또한 교차분석 결과, 수학적 이해 정도는 문제 만들기 능력과 연관이 있었다. 이러한 결과를 바탕으로 예비교사의 수학적 이해와 문제 만들기에 대한 시사점을 제시하였다.

I. 서론

지난 반세기 동안 수학교육은 절차와 알고리즘을 학습하는 대신 수학의 개념적 이해와 수학적 의미의 연결을 강조하도록 변화되었다. 이러한 패러다임의 변화와 함께, 학교 수학에서 개념적 이해를 위한 문제 만들기는 학생들의 성공적인 수학 학습을 위한 주요 활동으로써 강조되어 왔다(Cai et al., 2015; NCTM, 2000; NRC, 2005). 교사는 문제를 만들고 만든 문제를 사용하여 학생의 수학적 사고를 심화할 수 있는 기회를 제공함으로서 수학 성취도와 문제 해결 능력을 기르는데 도움을 줄 수 있다(Cai & Cifarelli, 2005; Chang et al., 2012; Chen et al., 2015; Silver & Cai, 1996). 따라서 교사는 학생의 수학 학습을 향상시키고 생산적인 수학적 담화를 생성하는 교육학적 도구로서 문제 만들기를 활용할 수 있으므로(Boaler & Brodie, 2004; English, 1998; Pirie, 2002), 유용한 문제를 만들 수 있는 능력을 갖추는 것은 예비교사와 현직교사 모두에게 요구되는 핵심 소양이다(Crespo & Sinclair, 2008).

문제 만들기에서 교사의 역할이 강조됨에도 불구하고, 많은 교사들은 예비교사 시절에 문제 만들기를 경험해보지 못했으므로 향후 교실에서 효과적으로 문제를 만들고 제시하는데 어려움을 겪을 수 있다(Ball, 1990; Schoenfeld, 1989). 이로 인해 예비교사들의 문제 만들기 능력을 측정하는 연구가 많이 이루어져 왔으며, 이러한 연구들은 예비교사들이 문제 만들기에 어려움을 겪고 있음을 보여주고 있다. 예비교사들이 제시하는 문제들은 인지적·구조적으로 복잡하지 않고(Stein et al., 2000; Vacc, 1993), 수학적 맥락에서 벗어나는 경우도 있으며(노지화 외, 2016; 허난, 신호철, 2013; Osana & Royea, 2011), 만든 문제의 대부분이 수학적 추론과 개념적 이해가 반영되지 않고 암기나 절차적 이해에 초점을 두고 있다(Stein et al., 2000). 국내에서도 예비교사를 대상으로 문제 만들기에 대한 연구들이 다수 이루어졌으며(예: 노지화 외, 2016; 이대현, 2022; 여승현, 이지영, 2022; 허난, 신호철, 2013), 이러한 연구들 또한 예비교사들의 문제 만들기 능력을 측정하고 그 과정에서 발생하는 오류를 밝히는데 초점이 맞추어져 있다. 그러나 예비교사의 문제 만들기 활동의 질은 예비교사들의 지식과 이해 정도에 영향을 받을 수 있다(Barlow & Cates, 2006; Cankoy & Darbaz, 2010). 학생들이 수학을 충실히 이해하도록 가르치려면, 교사는 가르치는 내용에 대한 충분한 수학적 이해를 가지고 있어야 한다(Ball et al., 2008; Cai & Ding, 2017). 그러나 예비교사들의 수학적 이해는 효과적인 교수를 위해 불충분하며, 특히 분수의 곱셈과 나눗셈 연산에서 더욱 취약한 모습을 보인다(예: 서관석, 전경순,

* 접수일(2023년 8월 14일), 심사(수정)일(2023년 9월 6일), 게재확정일(2023년 9월 22일)
* MSC2000분류 : 97B50
* 주제어 : 수학적 이해, 문제 만들기, 시각적 표현, 예비교사

2000; Adu-Gyamfi et al., 2019; Ball, 1990; Bezuk & Armstrong, 1995; Ma, 1999; Tirosh, 2000). 이처럼 예비교사의 문제 만들기 능력에 대한 다양한 연구가 이루어져 왔지만, 예비교사의 수학적 이해가 문제 만들기에 미치는 영향에 대한 연구는 거의 수행되지 않았다. 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 예비교사들의 수학적 이해 정도와 문제 만들기 능력과의 관계를 살펴보는 과정은 예비교사들의 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 수학적 이해와 문제 만들기 능력 정도를 파악하는데 도움이 될 뿐만 아니라 문제 만들기 능력을 개선하기 위한 시사점을 제공할 수 있다.

이에 본 연구에서는 초등학교 예비교사를 대상으로 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 수학적 이해 정도가 문제 만들기 능력에 미치는 영향이 있는지 살펴보았다. 구체적으로 살펴보면, 분수의 곱셈과 나눗셈 문제를 시각적으로 표현한 산출물을 바탕으로 예비교사들의 수학적 이해를 측정하고 문제 만들기 능력과의 관련성을 살펴보았다. 이를 통해 예비교사 교육에서 분수의 곱셈과 나눗셈의 수학적 이해와 문제 만들기 능력을 향상시키기 위한 시사점을 제시하였다. 설정한 연구문제는 다음과 같다.

첫째, 분수의 곱셈과 나눗셈을 시각적으로 표현한 예비교사의 수학적 이해 정도와 어려움은 무엇인가?

둘째, 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 예비교사의 문제 만들기 능력과 어려움은 무엇인가?

셋째, 분수의 곱셈과 나눗셈에서 예비교사의 수학적 이해와 문제 만들기 능력 사이에는 관련성이 있는가?

II. 이론적 배경

1. 예비교사의 문제 만들기 능력에 관한 선행연구

문제 만들기는 수업을 구상하는 과정이나 수업 중에 문제를 설계하는 행위를 의미한다(Osana & Pelczer, 2015). 문제 만들기는 학생들의 수학 학습을 향상시키고 학생들을 더 나은 문제 생성자로 성장하도록 도울 수 있으므로 교사가 필수적으로 갖추어야할 능력 중 하나이다(Cai et al., 2015). 여러 연구자들은 교사의 문제 만들기 능력을 기르기 위해서 교사 교육 프로그램부터 예비교사들이 문제 만들기 활동에 참여해야 한다고 주장해왔으며(Lavy & Shriki, 2010; Silber & Cai, 2017), 예비교사의 문제 만들기 능력에 관한 다양한 연구도 함께 이루어져왔다. 문제 만들기에 대한 예비교사의 인식(허난, 2011; Kilic, 2013), 문제 만들기 활동이 예비교사의 문제 만들기 능력이나 전략에 미치는 효과 분석(김슬비, 황혜정, 2015; Crespo, 2003), 예비교사의 문제 만들기 능력과 오류(노지화 외, 2016; 허난, 신호철, 2013; Cai & Hwang, 2002; Stein et al., 2000), 문제 해결과 문제 만들기 사이의 상호작용(Xie & Masingila, 2017; Yao et al., 2021)과 같은 연구들은 예비교사의 문제 만들기 능력에 대한 다양한 관점을 교사와 교사교육자에게 제공해 주었다. 이 중 Yao 외(2021)는 문제 만들기를 수학적 이해를 측정할 수 있는 도구로 보고 예비교사의 시각적 표현에서의 수학적 이해와 문제 만들기에서의 수학적 이해의 관련성을 살펴보았다. 그 결과, 문제 만들기 활동은 예비교사의 개념적 이해 발달에 도움이 된다고 보고하였다. 본 연구는 Yao 외(2021)의 연구를 바탕으로 예비교사의 시각적 표현에서의 수학적 이해와 문제 만들기 능력과의 관련성을 살펴보았다. Yao 외(2021)가 분수의 나눗셈에 초점을 두고 문제 만들기를 수학적 이해를 측정하는 평가 도구로 활용한 것과는 달리, 본 연구에서는 분수의 곱셈과 나눗셈으로 내용 영역을 확장하고 수학적 이해가 문제 만들기 능력에 미치는 영향에 초점을 두어 분석을 진행하였다. 그동안 예비교사의 문제 만들기 능력에 관한 연구가 다양하게 이루어졌지만, 예비교사의 문제 만들기 능력에 영향을 미치는 사고 과정의 본질에 관한 대한 연구는 여전히 제한적이다(Christou et al., 2005). 또한 예비교사가 문제 만들기 능력을 기르고 문제를 통해 수학을 가르칠 수 있도록 지원하는 방법은 거의 알려져 있지 않다(Crespo & Sinclair, 2008). 따라서 예비교사의 수학적 이해와 문제 만들기 능력과의 관련성을 살펴보는 것은 예비교사가 교실에서 문제 만들기 활동을 원활하게 수행하기 위한 준비 과정에 도움을 제공할 수 있다.

2. 문제 만들기 능력 평가

문제 만들기는 본질적인 복잡성으로 인해 연구자들이 합의한 공식적인 채점 기준은 없으나(Rosli et al., 2013), 연구자들은 다양한 관점에서 문제 만들기 능력

을 측정하기 위한 분석틀을 제시해왔다(예: 김경탁, 류성림, 2013; 나귀수, 2017; Leung, 2013; Silver & Cai, 1996; Silver & Cai, 2005). 비록 연구자의 관점에 따라 분석틀이 달라질 수 있지만, 크게 '수학 문제로서 해결이 가능한지 여부'와 '문제의 질'의 두 범주로 구분할 수 있다(이자헤, 2018).

'수학 문제로서 해결이 가능한지 여부'는 수학 문제로서의 완성도를 의미한다. 예컨대, 김경탁과 류성림(2013)은 문제 만들기 능력을 완전한 문제와 불완전한 문제로 나누고, 불완전한 문제를 문제 이해의 오류, 정보 부족의 오류, 논리적 오류, 기술적 오류, 기타로 분류하였다. 또한 Silver와 Cai(1996)는 문제를 수학적 응답과 비수학적 응답으로 분류하였으며, Leung(2013)은 만들어진 문제를 문제가 아닌 것, 수학 문제가 아닌 것, 해결이 불가능 한 것, 조건이 불충분한 것, 문제로서 충분한 것의 5가지 범주로 구분하였다. Xie와 Masingila(2017)는 Leung(2013)의 분석틀을 간결하게 수정하여, 풀 수 있는 수학 문제, 풀 수 없는 수학 문제, 수학 문제가 아닌 문제의 세 가지 범주로 통합하고 예비교사의 문제 만들기 능력을 평가하기도 하였다.

'문제의 질'은 수학 문제로서 해결 가능한 문제가 어떤 특징을 가지고 있는지를 반영한다. 예컨대, Silver와 Cai(2005)는 만든 문제를 문제의 수와 관련된 수량성(quantity), 문제에 내포된 관계를 나타내는 복잡성(complexity), 평범하지 않은 문제의 수를 고려하는 독창성(originality)의 세 가지 범주로 구분하였다. 또한 나귀수(2017)는 제시한 문제가 새로운지를 판단하는 확장성, 문제의 해결과정과 결과를 평가하는 정교성, 변경된 조건에 초점을 두어 수평적·수직적 문제 만들기로 나누어 문제를 평가하였다.

이처럼 문제 만들기 능력은 연구자가 설정한 분석 기준에 따라 다르게 정의될 수 있다. 예컨대, 독창성을 기준으로 문제 만들기 능력을 측정하면 문제 만들기 능력은 '독창적인 문제를 만들 수 있는 정도'로 정의된다. 본 연구에서는 '수학 문제로서 해결이 가능한지 여부'에 관련된 수학 문제로서의 완성도에 초점을 두어 문제 만들기 능력을 평가하였다. '문제의 질'은 일반적으로 수학 문제로서 해결이 가능한 문제 내에서 연구자의 연구 초점에 따라 달라지므로 연구 목적과는 맞지 않다고 판단하였다.

3. 분수의 곱셈과 나눗셈의 수학적 이해

학생들은 배운 내용을 유연하게 적용할 수 있는 능력을 기르기 위해 수학을 개념적으로 이해하여야 하고, 교사는 이해 중심의 수학 학습을 위해 가르치는 내용을 깊이 알고 이해해야 한다(Ma, 1999; NCTM, 2000; Siegler & Lortie-Forgues, 2017). 교사가 지녀야할 수학적 개념에 대한 절차적 이해와 개념적 이해는 수학적 이해의 중요한 구성 요소이자 수학적 내용 지식의 일부로 간주되어 왔다(Shulman, 1987; Wearne & Hiebert, 1988). 절차적 이해는 문제를 해결하기 위해 일련의 작업을 수행하는 능력이며, '무엇을 해야 할지 아는 것'을 의미한다(Schneider et al., 2011; Skemp, 1978). 반면, 개념적 이해는 수학적 개념 개념과 그 상호 관계에 대한 이해이며, '무엇을 해야 하는지 그리고 왜 해야 하는지 아는 것'이다(Rittle-Johnson et al., 2001). 따라서 분수의 곱셈과 나눗셈에서 절차적 이해는 연산을 수행하는 절차에 대한 이해하는 것이며, 개념적 이해는 이 연산을 왜 수행하는지 이해하고 관련된 원리나 특성을 연결시켜 일관적 전체로서 이해하는 것을 의미한다(Bailey, 2015). 절차적 이해와 개념적 이해는 서로 상호작용하고 연결되어 있지만, 일반적으로 두 유형의 수학적 이해는 서로 분리되어 있고 구별이 가능하다고 간주된다(Yao et al., 2021).

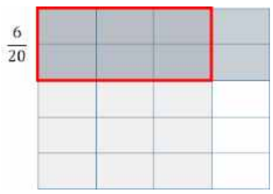
분수의 곱셈은 동수누가, 연산자, 도형의 넓이와 같은 여러 방식으로 이해할 수 있지만 대부분의 상황은 전체(whole)의 부분(part)의 부분(part)과 관련이 있다(Mack, 2000). 전체의 부분의 부분으로 분수를 이해하는 방식에서 개념적 이해를 위해서는 전체(whole)와 단위(unit)의 적절한 개념화가 필요하다(Hiebert & Behr, 1988). 예를 들어, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$를 계산할 때, 절차적으로 효과적인 계산 과정은 피승수와 승수의 분자는 분자끼리, 분모는 분모끼리 곱한 후 기약분수로 나타내는 것이다. 이 문제에서 개념적 이해는 부분(part)의 부분(part), 즉 $\frac{3}{4}$ 중 $\frac{2}{5}$를 찾는 개념을 포함한다(Chinnappan & Forrester, 2014). $\frac{2}{5}$를 4개의 동일한 부분으로 분할한 후 그 중 3개를 찾거나 $\frac{3}{4}$을 5개의

동일한 부분으로 나누고 $\frac{2}{5}$의 $\frac{3}{4}$를 찾을 수도 있다. 즉, 이 문제를 해결하려면 전체의 부분인 1의 $\frac{2}{5}$를 찾을 수 있을 뿐만 아니라 전체의 부분($\frac{2}{5}$)의 부분($\frac{3}{4}$)으로 단위를 조정할 수 있어야 한다(Son & Lee, 2016). 이러한 내포된 단위 수준에 대한 이해는 전체의 부분의 부분이라는 3단계의 단위 구조를 형성하게 되고, 이는 분수의 곱셈에서 단위를 유연하게 개념화할 수 있는 기초가 된다(Steffe, 2003).

분수의 나눗셈의 의미는 등분제, 포함제, 직사각형의 넓이의 의미로 분류할 수 있으며(방정숙, 이지영, 2009), 분수의 나눗셈에서 주요한 개념적 이해는 제수가 피제수에 몇 번 들어가는지를 찾는 것과 관련된다(Fazio & Siegler, 2011). $2\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$을 예로 들어보자. 이 문제에서 개념적 이해는 $2\frac{1}{4}$에 $\frac{1}{2}$이 몇 번 포함되는지에 대한 균등 분배(equal sharing) 개념과 관련되며, $2\frac{1}{4}$을 가분수로 바꾸면 $\frac{9}{4}$가 되고 $\frac{1}{2}$은 $\frac{9}{4}$에 4와 $\frac{1}{2}$번 포함되므로 답은 $4\frac{1}{2}$이 된다(Chinnappan & Forrester, 2014). 반면, 분수의 나눗셈에서 알고리즘에 초점을 둔 '역수를 취한 후 곱하기'는 개념적 이해를 모호하게 만들기 때문에 절차적 이해로 볼 수 있다(Yao et al., 2021).

4. 분수의 곱셈과 나눗셈의 시각적 표현

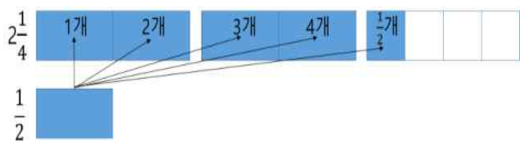
수학적 이해는 학습자들의 내부 표현에 의존하므로 수학적으로 개념을 이해했는지 판단하려면 외부로 이해한 내용을 표현할 필요가 있다(Barmby et al. 2009). 이러한 표현 방법에는 시각적, 언어적, 텍스트와 같은 다양한 방식이 있으며, 이 중 시각적으로 수학적 개념을 표현하는 과정은 학습자의 수학적 이해를 반영할 수 있다(Izsak, 2003; Lamon, 2001). 분수의 곱셈과 나눗셈을 시각적으로 표현하는 과정은 예비교사가 전체의 부분의 부분과 피제수가 제수에 몇 번 들어가는지를 이해하는데 도움을 줄 수 있다(Fazio & Siegler, 2011). 예를 들어, 분수의 곱셈에서 $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$를 설명하기 위해 직사각형을 이용하여 [그림 1]과 같이 표현할 수 있다.



[그림 1] $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$의 시각적 표현

먼저 $\frac{3}{4}$을 표현하기 위해 직사각형(whole)을 그리고 수직으로 4등분 한 뒤 그 중 3개를 음영 처리한다. 그 다음 $\frac{2}{5}$를 표현하기 위해 직사각형을 수평으로 5등분 하고 이 중 2개를 음영 처리한다. 생성된 20개의 작은 직사각형 중 6개가 수직, 수평으로 동시에 음영 처리 되었으므로 $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}$는 $\frac{6}{20}$을 나타낸다. 이러한 과정은 1보다 작은 두 분수의 곱이 항상 원래 분수 중 하나보다 작다는 것을 설명하거나 단위를 재정의해야 하는 필요성을 입증하는데 사용할 수 있다(Fazio & Siegler, 2011).

분수의 나눗셈에서 $2\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$를 설명하기 위해 분수 막대를 사용하여 [그림 2]와 같이 표현할 수 있다.



[그림 2] $2\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}$의 시각적 표현

$2\frac{1}{4}$은 1을 나타내는 분수 막대 2개와 $\frac{1}{4}$을 나타내는 분수 막대 1개로 나타낼 수 있다. $\frac{1}{2}$을 나타내는

분수 막대가 $2\frac{1}{4}$에 몇 개 들어가는지 확인해보면 2에 4개, $\frac{1}{4}$에 $\frac{1}{2}$개가 들어가므로 $2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$은 답은 $4\frac{1}{2}$이라고 할 수 있다.

시각적 표현은 분수를 가르치는데 있어 기본적인 교육 방법 중 하나이며 분수의 단위를 식별하고 예비교사의 수학적 이해 정도를 판별할 수 있는 유용한 도구로 활용될 수 있다(Yao et al., 2021). 이에 본 연구에서는 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 시각적 표현을 예비교사의 개념적 이해와 절차적 이해를 측정하기 위한 도구로 활용하였다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 참여자

연구 참여자는 A 교육대학교에서 분수 연산과 관련된 수학교육방법론을 수강 중인 3학년 학생 41명이다. 학생들은 강의 시간 동안 분수 연산의 의미, 시각적으로 표현하는 방법, 학생의 문제해결 과정에서 나타나는 수학적 사고를 탐구하는 내용을 배웠다. 참여자들은 1-2학년에서 수학과 교육과정, 교육방법론, 수학 교과 영역별 내용을 이수한 경험이 있으므로 이미 분수 연산 지도에 대한 기본적인 내용을 학습한 상태였지만 문제 만들기를 접해본 경험은 없었다.

2. 검사 도구

분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 예비교사들의 수학적 이해를 살펴보기 위해 Yao 외(2021)의 과제를 참고하여 [표 1]과 같은 두 종류의 과제를 선정하였다. 첫 번째는 분수의 곱셈과 나눗셈을 그림으로 표현하는 과제이며, 두 번째 문제는 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 문제 만들기 과제이다. 분수의 곱셈은 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$, 분수의 나눗셈은 $2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$을 문제로 선정하였다. '그림 으로 표현하기' 과제는 시각적 표현에서의 수학적 이해를 평가하기 위한 목적으로 참여자들에게 제시하였으며, '문제 만들기' 과제는 문제 만들기 능력을 측정하기 위한 목적으로 제시하였다. 두 과제는 모두 분수로만 이루어진 문제로 구성하였다. 분수로만 구성된 연산은 자연수가 포함된 연산보다 개념적이나 계산적으로 더 복잡하므로 수학적 이해를 탐색할 수 있는 효과적인 맥락의 문제이다(Ma, 1999; Yao et al., 2021).

3. 자료 수집 및 코딩

자료 수집은 2023년 4월 말에 이루어졌다. 사전에 연구 내용과 목적에 대하여 참여자들에게 안내하고 강의 시간동안 사전 검사, 그림으로 표현하기 검사, 문제 만들기 검사를 지필 평가 형식으로 차례로 실시하였다.

사전 검사는 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 절차적 지식이 있는지 알아보기 위한 목적으로 시행하였다. 현행 교육과정을 참고하여 [표 2]와 같이 분수 연산 유형별로 문제를 선정하였다. 분수의 곱셈은 (자연수)×(진분수), (진분수)×(자연수), (진분수)×(진분수), (대분수)×(진분수)의 4문제로 구성하였으며, 분수의 나눗셈은 (자연수)÷(자연수), (자연수)÷(진분수), (대분수)÷(자연수), (대분수)÷(진분수)의 4문제로 선정하였다.

[표 1] 검사 도구

과제 유형	과제 목적	분수 곱셈	분수 나눗셈
그림으로 표현하기	수학적 이해 평가	$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$의 풀이를 그림으로 표현해보세요.	$2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$의 풀이를 그림으로 표현해보세요.
문제 만들기	문제 만들기 능력 평가	$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$를 이용하여 실생활 문제를 만들어 보세요.	$2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$을 이용하여 실생활 문제를 만들어 보세요.

[표 2] 사전 검사(단순 계산 문제)

분수 곱셈		분수 나눗셈	
$4\times\frac{2}{3}=$	$\frac{3}{4}\times5=$	$5\div4=$	$2\div\frac{1}{3}=$
$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}=$	$1\frac{3}{5}\times3=$	$2\frac{1}{2}\div2=$	$2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}=$

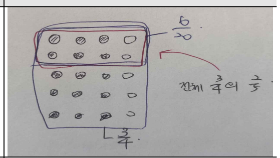
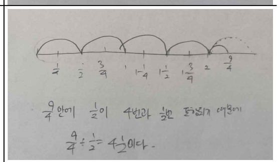
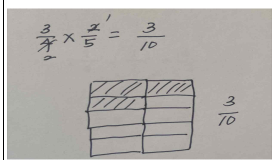
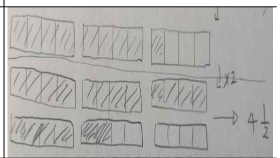
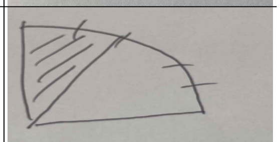
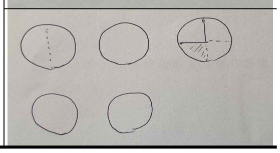
검사가 완료된 후 단순 계산 문제는 정답인지 오답인지를 채점하고 총 8개의 문제 중 정답이 몇 문제인지 점수화하였다(8점 만점). 참여자들은 단순 계산 문제에서 평균 7.9점을 나타냈으며, 이는 예비교사들이 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 절차적 이해를 가지고 있음을 의미한다(Yao et al., 2021).

사전 검사가 완료된 후, 참여자들은 그림으로 표현하기와 문제 만들기 검사를 차례로 수행하였다. 41명의 예비교사가 모두 검사에 참여하였으며, 불성실하게 응답한 자료가 없었으므로 모든 자료를 분석에 사용하였다.

4. 분석 방법

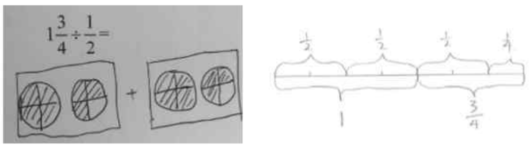
그림으로 표현하기는 Chinnappan와 Forrester(2014), Yao 외(2021)의 분석틀을 수정하여 분석하였다. 수집된 자료는 개념적 이해(C), 절차적 이해(P), 이해 없음(N)의 세 가지 중 하나로 코딩하였으며, 이에 관한 설명과 예시는 [표 3]과 같다. 분수의 곱셈에서 '개념적

[표 3] 그림으로 표현하기 분석틀

수학적 이해	코드	분수 연산	설명	예시
개념적 이해	C	분수의 곱셈	전체의 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{5}$(part of part)의 개념을 포함하는 경우	
		분수의 나눗셈	$2\frac{1}{4}$안에 $\frac{1}{2}$가 몇 번 들어가는지에 관한 균등 분배(equal sharing) 개념을 포함하는 경우	
절차적 이해	P	분수의 곱셈	전체의 부분의 부분(part of part) 개념이 드러나지 않고 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$을 약분하여 $\frac{3}{10}$을 표현하는 경우	
		분수의 나눗셈	$1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$를 역수를 취한 후 곱하기로 이해하고 $1\frac{3}{4}\times2$를 표현하는 경우	
이해 없음	N	분수의 곱셈	주어진 과제를 적절한 그림으로 표현하지 못하는 경우	
		분수의 나눗셈		

이해'는 전체의 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{5}$(part of part)나 $\frac{3}{4}$를 5등분한 것 중 2개, $\frac{2}{5}$를 4등분하여 $\frac{2}{5}$의 $\frac{3}{4}$를 구하는 것과 같이 전체의 부분의 부분이라는 개념적 이해가 드러나도록 표현한 경우이다(Chinnappan & Forrester, 2014). 반면, '절차적 이해'는 시각적으로 전체의 부분의 부분이라는 개념적 이해가 드러나지 않는 상황이며, 전체의 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{5}$를 그림으로 그리지 못하거나 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$의 연산 결과만을 그림으로 드러내는 경우이다. '이해 없음'은 분수의 곱셈과 나눗셈에서 주어진 과제를 적절한 그림으로 표현하지 못하는 경우이다.

Yao 외(2021)는 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$의 분수 나눗셈 문제의 시각적 표현을 [그림 3]과 같이 개념적 이해, 절차적 이해로 구분하였다.



개념적 이해　　　　절차적 이해

[그림 3] $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$의 시각적 표현의 개념적 이해와 절차적 이해(Yao et al., 2021, p. 941)

개념적 이해는 $1\frac{3}{4}$안에 $\frac{1}{2}$가 몇 번 들어가는지에 관한 균등 분배(equal sharing) 상황을 포함한다. 반면, 절차적 이해는 $1\frac{3}{4}\div\frac{1}{2}$을 역수를 취한 후 곱하기로 이해하고 $1\frac{3}{4}\times 2$를 그림을 표현하는 경우이다. 본 연구에는 Yao 외(2021)의 분류 기준에 따라 $2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$에서 균등 분배 상황이 포함되면 개념적 이해, 역수를 취한 후 곱하기로 표현하면 절차적 이해로 분류하였다.

문제 만들기 능력은 Xie와 Masingila(2017)의 분석틀을 활용하여 평가하였다. 문제 만들기 능력은 풀 수 있는 수학 문제(SP), 수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제(UP), 문제를 만들지 못함(NP)의 세 개의 범주로 코딩하였다. 이러한 분류는 간결하고 잘 정의되어 있으므로 문제 만들기 능력과 문제 해결과의 상호작용을 쉽게 파악할 수 있다(Xie & Masingila, 2017). 문제 만들기 능력 분석틀과 예는 [표 4]와 같다.

코딩은 저자가 아닌 두 명의 초등수학교육 박사가 수행했으며 각자 개별적으로 코딩하고 그 결과를 비교하였다. 그림으로 표현하기의 Cohen's kappa 계수는 0.93, 문제 만들기는 0.82로 나타났으며 일치되지 않은 부분은 토의를 통해 해결하였다.

코딩이 완료된 후, 분수의 곱셈과 분수의 나눗셈에서의 그림으로 표현하기와 문제 만들기에서의 수행 능

[표 4] 문제 만들기 능력 분석틀

분석 기준	코드	분수의 곱셈 예시	분수의 나눗셈 예시
풀 수 있는 수학 문제	SP	피자가 전체의 $\frac{3}{4}$만큼 남아있습니다. 수연이가 남아있는 피자의 $\frac{2}{5}$만큼 먹었다면, 수연이가 먹은 피자는 전체의 몇 분의 몇 입니까?	$2\frac{1}{4}$m의 막대가 있습니다. 이 막대에 $\frac{1}{2}$m막대는 몇 개 들어갈 수 있나요?
수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제	UP	피자 $\frac{3}{4}$조각을 5명이서 각각 2조각을 먹도록 나누려면 한 사람 당 몇 조각을 먹을 수 있을까?	빵이 $2\frac{1}{4}$조각만큼 있습니다. A와 B가 똑같이 나눠먹으려고 할 때 A가 먹을 수 있는 빵의 양은 얼마입니까?
문제를 만들지 못함	NP	-	-

력에 대한 빈도 분석을 실시하였다. 이 후, 그림으로 표현하기에서는 '이해 없음', 문제 만들기에서는 '수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제'로 코딩된 참여자들의 오류를 살펴보고 그 유형을 범주화하여 기술하였다. 이 후 수학적 이해와 문제 만들기 사이의 관련성을 살펴보기 위해 그림으로 표현하기와 문제 만들기를 교차표(cross tabulation)로 표현하고 교차분석을 실시하였다. 분석 과정은 SPSS 23.0 프로그램을 사용하였다.

Ⅳ. 연구결과

1. 그림으로 표현하기에서의 수학적 이해

그림으로 표현하기에서 나타난 참여자의 수학적 이해는 [표 5]와 같다.

[표 5] 그림으로 표현하기에 대한 수학적 이해

수학적 이해	분수의 곱셈	분수의 나눗셈
C	30명(73.2%)	28명(68.3%)
P	6명(14.6%)	7명(17.1%)
N	5명(12.2%)	6명(14.6%)
합계	41명(100%)	41명(100%)

C: 개념적 이해, P: 절차적 이해, N: 이해 없음

그림으로 표현하기에서 분수의 곱셈은 30명(73.2%), 분수의 나눗셈은 28명(68.3%)이 개념적 이해를 보였으며, 절차적 이해를 보인 참여자는 분수의 곱셈이 6명(14.6%), 분수의 나눗셈이 7명(17.1%)으로 나타났다. 이해 없음을 보인 참여자는 분수의 곱셈이 5명(12.2%), 분수의 나눗셈은 6명(14.6%)이었다.

이해 없음으로 코딩된 참여자는 [표 6]과 같이 네 가지 유형의 어려움이 나타났다.

유형 1은 수식을 그림으로 표현하지 못하는 경우이다. 이 유형의 예비교사들은 수식에 포함된 분수의 일부를 그림으로 표현했지만 연산 과정을 그림으로 나타내지 못했다.

유형 2는 수식에 포함된 각각의 분수를 그림으로 표현할 수 있지만 둘 사이를 적절하게 연결하지 못했다. 이 유형의 예비교사들은 $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$와 $2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$을 각각 그림으로 표현할 수 있었지만 전체의 부분을 분할할 수 없었다.

유형 3은 두 수식을 같은 단위로 표현하지 않고 각기 다른 모델을 사용하여 그림으로 나타냈다. 이 유형의 예비교사들은 그림으로 두 분수를 나타낼 수 있지만 서로 다른 모델을 사용함으로서 단위의 크기가 달라졌고 이로 인해 수식을 그림으로 나타내지 못했다.

유형 4는 전체(whole)를 표현하지 않고 부분의 부분만을 표현하였다. 예컨대, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$을 그림으로 표현할 때 $\frac{3}{4}$을 전체를 4등분한 것 중 3개가 아니라 $\frac{3}{4}$을 전체(1)라고 생각하고 있었다. 고정된 전체(fixed whole)를 고려하지 않고 $\frac{3}{4}$을 전체라 고려하였기 때문에 $\frac{6}{20}$이 아니라 $\frac{6}{15}$이라는 답을 도출하였다. 이 유형의 참여자는 부분의 부분을 나타낼 수는 있지만 전체의 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{5}$를 찾지 못하였으며, 전체를 4개의 $\frac{1}{4}$단위로 구성된 합성 단위로 인식하는 재귀적 분할(recursive partitioning; Steffe, 2003)을 이해하지 못했다.

2. 예비교사들의 문제 만들기 능력과 어려움

예비교사들의 문제 만들기 능력을 분석한 결과는 [표 7]과 같다.

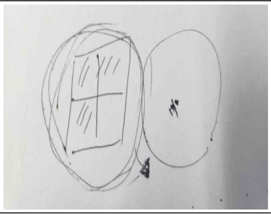
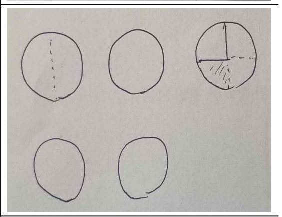
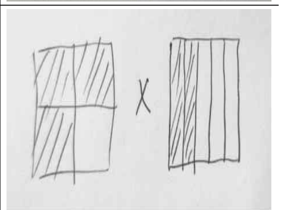
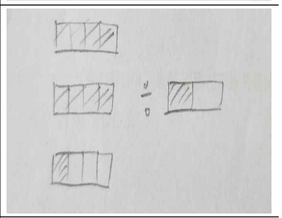
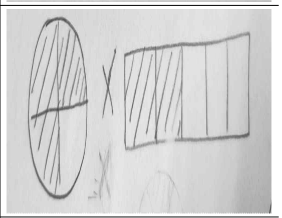
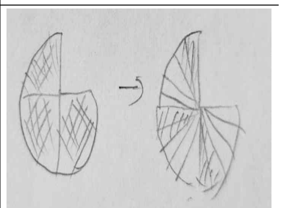
[표 7] 예비교사들의 문제 만들기 능력

능력	분수의 곱셈	분수의 나눗셈
SP	17명(41.5%)	9명(22.0%)
UP	19명(46.3%)	28명(68.3%)
NP	5명(12.2%)	4명(9.8%)
합계	41명(100%)	41명(100%)

SP: 풀 수 있는 수학 문제,
UP: 수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제,
NP: 문제를 만들지 못함

'풀 수 있는 수학 문제'는 분수의 곱셈에서 17명(41.5%), 분수의 나눗셈에서 9명(22.0%)으로 나타났다. '수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제'는 분수의 곱셈과 나눗셈에서 가장 많은 비중을

[표 6] 그림으로 표현하기에서 나타난 예비교사의 어려움

어려움 유형	설명	분수 연산	빈도(명)	예시
그림 표현의 어려움 (유형 1)	수식을 그림으로 표현하지 못하는 경우	분수의 곱셈	2	
		분수의 나눗셈	3	
표현 연결의 어려움 (유형 2)	수식에 포함된 분수를 그림으로 표현할 수 있지만 연결하지 못하는 경우	분수의 곱셈	1	
		분수의 나눗셈	3	
모델 사용의 어려움 (유형 3)	두 수식을 같은 단위로 표현하지 않고 각기 다른 모델을 사용하는 경우	분수의 곱셈	1	
		분수의 나눗셈	0	
전체의 의미 이해 부족 (유형 4)	전체(whole)를 표현하지 않고 부분의 부분만을 표현하는 경우	분수의 곱셈	1	
		분수의 나눗셈	0	

차지하고 있었으며, 각각 19명(46.3%), 28명(68.3%)으로 나타났다. '문제를 만들지 못함'은 분수의 곱셈에서 5명(12.2%), 분수의 나눗셈에서 5명(12.2%)로 나타났다.

'수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제'로 나타난 예비교사들의 어려움은 [표 8]과 같이 다섯 가지 유형으로 범주화할 수 있었다.

[표 8] 문제 만들기에서 나타난 예비교사들의 어려움

어려움 유형	설명	분수 연산	빈도 (명)	예시
현실 맥락에 맞지 않음 (유형 1)	현실 맥락에 맞지 않는 경우	분수의 곱셈	0	-
		분수의 나눗셈	7	색종이가 $2\frac{1}{4}$장 있습니다. 한 사람당 $\frac{1}{2}$장씩 나누어준다면 몇 명에게 나누어줄 수 있습니까?
수식과 관련 없는 문제 (유형 2)	수식과 관련 없는 문제를 만든 경우	분수의 곱셈	3	도넛 1개를 $\frac{3}{4}$만큼 먹고 또 $\frac{2}{5}$만큼 먹었습니다. 남은 도넛은 처음 도넛의 얼마입니까?
		분수의 나눗셈	2	지식이는 리본 $2\frac{1}{4}m$를 가지고 있습니다. 이 중 $\frac{1}{2}m$를 썼을 때 남아있는 리본의 양은 얼마입니까?
조건 불충분 (유형 3)	조건이 불충분하여 풀 수 없는 문제를 만든 경우	분수의 곱셈	8	피자가 $\frac{3}{4}$조각 있습니다. $\frac{2}{5}$조각은 얼마입니까?
		분수의 나눗셈	10	막대 $2\frac{1}{4}cm$가 있습니다. $\frac{1}{2}$등분하면 막대는 몇 cm인가?
수식 혼동 (유형 4)	수식을 혼동하여 승수나 제수의 역수로 문제를 만든 경우	분수의 곱셈	3	피자 한 판의 $\frac{3}{4}$을 다시 2조각으로 나누었습니다. 이중 5조각의 양은 얼마입니까?
		분수의 나눗셈	4	쿠키가 $2\frac{1}{4}$개가 있습니다. 철수는 2일 동안 똑같은 양의 쿠키를 매일 먹으려고 합니다. 철수가 하루에 먹는 쿠키의 양은 얼마입니까?
수식과 같은 문제 (유형 5)	실생활 맥락의 문제를 만들지 않고 주어진 수식을 그대로 따라 만든 문제	분수의 곱셈	5	$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$를 구하시오.
		분수의 나눗셈	5	$2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$을 구하세요.

유형 1은 현실 맥락에 맞지 않는 경우이다. 예를 들어, '색종이가 $2\frac{1}{4}$장 있습니다. 한 사람당 $\frac{1}{2}$장씩 나누어준다면 몇 명에게 나누어줄 수 있습니까?'는 수학적 맥락에서 답을 구하면 $4\frac{1}{2}$명이지만 현실 맥락에서 $\frac{1}{2}$명은 불가능하므로 적절하지 않다.

유형 2는 수식과 관련 없는 문제이다. 예를 들어, '도넛 1개를 3/4만큼 먹고 또 2/5만큼 먹었습니다. 남은 도넛은 처음 도넛의 얼마입니까?'와 같은 문제에서 원래 의도는 도넛 1개의 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{5}$의 양을 구해야 하는 곱셈 문제이지만 문제에 기술된 내용은 '$1-\frac{3}{4}-\frac{2}{5}$'를 묻는 뺄셈 문제이다.

유형 3은 조건이 불충분하여 풀 수 없는 문제이다. 예를 들어, '피자가 $\frac{3}{4}$조각 있습니다. $\frac{2}{5}$조각은 얼마입니까?'에서 $\frac{2}{5}$는 $\frac{2}{5}$ 자체를 나타내는 말인지, 전체 1의 $\frac{2}{5}$인지, $\frac{3}{4}$조각 중 $\frac{2}{5}$를 의미하는지 모호하다.

유형 4는 수식을 혼동하여 승수나 제수의 역수로 문제를 만든 경우이다. 예를 들어, '쿠키가 $2\frac{1}{4}$개가 있습니다. 철수는 2일 동안 똑같은 양의 쿠키를 매일 먹으려고 합니다. 철수가 하루에 먹는 쿠키의 양은 얼마입니까?'는 $2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$가 아니라 $2\frac{1}{4}\div 2$의 문제이다.

유형 5는 실생활 맥락의 문제를 만들지 않고 주어진 수식을 그대로 따라 만든 문제이다. 예를 들어, '$\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$를 구하시오.', '$2\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$을 구하세요.'와 같은 문제는 분수의 곱셈과 나눗셈 문제를 만들기 위해 제시한 과제를 똑같이 표현한 것이다.

3. 그림으로 표현하기와 문제 만들기와의 관련성

그림으로 표현하기와 문제 만들기의 관련성에 대한 교차 분석을 실시하였다. 분석 결과, 5 미만의 기대빈도가 전체 셀의 77.8%를 차지했으므로 Pearson의 카이제곱 검정이 아닌 Fisher의 정확검정을 수행하였다. 분수의 곱셈에서 그림으로 표현하기와 문제 만들기 점수 사이의 관계를 나타낸 교차표와 Fisher의 정확검정 수행 결과는 [표 9]와 같다.

[표 9] 분수의 곱셈에서 그림으로 표현하기와 문제 만들기에 관한 교차표와 Fisher의 정확검정 수행 결과

		문제 만들기			Fisher의 정확검정(p)
		SP	UP	NP	
그림으로 표현하기	C	14명	15명	1명	10.354(.014*)
	P	2명	3명	1명	
	N	1명	1명	3명	

C: 개념적 이해, P: 절차적 이해, N: 이해 없음
SP: 풀 수 있는 수학 문제,
UP: 수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제,
NP: 문제를 만들지 못함
$p^{*} < .05$

분수의 곱셈에서 그림으로 표현하기와 문제 만들기 사이의 관련성을 살펴본 결과, Fisher의 정확검정 값은 10.354(p=.014)로 나타나 통계적으로 유의하게 나타났다. 이러한 결과는 '분수의 곱셈에서 그림으로 표현하기에 대한 예비교사들의 수학적 이해는 문제 만들기 수행능력과 연관이 있음'을 의미한다.

분수의 나눗셈에서 그림으로 표현하기와 문제 만들기 점수 사이의 관계를 나타낸 교차표와 Fisher의 정확검정 수행 결과는 [표 10]과 같다.

[표 10] 분수의 나눗셈에서 그림으로 표현하기와 문제 만들기에 관한 교차표와 Fisher의 정확검정 수행 결과

		문제 만들기			Fisher의 정확검정(p)
		SP	UP	NP	
그림으로 표현하기	C	7명	21명	0명	9.466(.023*)
	P	2명	4명	1명	
	N	0명	3명	3명	

C: 개념적 이해, P: 절차적 이해, N: 이해 없음
SP: 풀 수 있는 수학 문제,
UP: 수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제
NP: 문제를 만들지 못함
$p* < .05$

분수의 나눗셈에서 그림으로 표현하기와 문제 만들기 사이의 관련성을 살펴본 결과, Fisher의 정확검정 값은 9.466(p=.023)으로 나타나 통계적으로 유의하게 나타났다. 이러한 결과는 '분수의 나눗셈에서 그림으로

표현하기에 대한 예비교사들의 수학적 이해는 문제 만들기 수행능력과 연관이 있음'을 의미한다.

V. 논의 및 결론

본 연구는 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 예비교사들의 수학적 이해와 문제 만들기 능력을 측정하고 그 사이의 관련성을 살펴보았다. 이를 통해 도출한 논의와 결론은 다음과 같다.

첫째, 대부분의 예비교사들은 그림으로 표현하기에서 개념적 이해를 보였다. 연구 결과에서 나타난 바와 같이 분수의 곱셈에서 73.2%, 분수의 나눗셈에서는 68.3%의 예비교사들이 그림으로 표현하기에서 개념적 이해를 드러냈다. 이러한 결과는 대부분의 예비교사들이 분수의 곱셈과 나눗셈에서 표상을 이용하여 자신의 생각을 드러내지 못한다고 보고한 Ball(1990), Bezuk과 Armstrong(1995)의 연구 결과나 대부분의 예비교사들이 분수의 연산에서 근본적인 이해가 매우 부족하다고 보고한 서관석과 전경순(2000)의 연구 결과와는 차이를 보인다. 예비교사들은 20년 전보다 표상을 이용하여 분수의 곱셈과 나눗셈을 시각적으로 표현하는 능력이 향상되었으며(Son & Lee, 2016), 이는 매우 고무적인 일이다. 그러나 여전히 일부 예비교사들은 분수의 곱셈과 나눗셈을 시각적으로 표현할 때 표준 알고리즘에 의존하여 절차적 이해만을 나타내는 경향이 있었으며(분수의 곱셈: 14.6%, 분수의 나눗셈: 17.1%), 표상을 이용하여 시각적으로 자신의 생각을 표현하지 못하는 경우도 나타났다(분수의 곱셈: 12.2%, 분수의 나눗셈: 14.6%). 개념적 이해와 절차적 이해는 예비교사의 내용 지식을 구성하는 중요한 요인이며, 서로 구별되지만 상호의존적으로 개발된다(Hallett et al., 2010). 그러나 분수의 연산을 절차적으로만 이해하는 것은 분수의 곱셈과 나눗셈에 관한 개념적 이해를 향상시키고 수학 개념들을 연결하는데 도움을 주지 못할 수 있으며 (Lesh & Zawojewski 2007; Tirosh, 2000), 학생의 오개념을 유발할 수도 있다(Ma 1999). 깊은 수학적 이해를 바탕으로 수학 개념의 구조를 파악하는 과정은 교사의 개념적 이해에서 비롯한다(Mason et al., 2009). 따라서 예비교사들은 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 개념적 이해가 필요하며 이에 대한 예비교사 교육 방안도 함께 모색되어야할 것이다.

둘째, 예비교사들은 분수의 곱셈과 나눗셈을 시각적으로 표현할 때 여러 가지 유형의 어려움이 나타났다. 단순 계산 문제를 풀 때 거의 모든 예비교사들이 정답을 제시했으나(8점 만점에 7.9점), 그림으로 표현하기에서는 일부 예비교사들이 분수의 곱셈과 나눗셈을 시각적으로 표현하지 못했다. 이러한 결과는 한 가지 유형의 문제만으로는 예비교사들의 수학적 이해를 온전히 파악할 수 없다는 점을 나타내며, 예비교사의 수학적 이해를 평가하기 위한 지필평가 방식의 한계를 보여준다. 예비교사들이 단순 계산 문제를 능숙하게 해결하더라도 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 근본적 이해는 부족할 수 있으므로, 향후 예비교사들의 수학적 이해를 정교하게 평가하기 위해서는 다양한 수학적 표현과 맥락을 함께 활용할 필요가 있다.

예비교사들은 시각적 표현에서 네 가지 유형의 어려움을 드러냈다. 1) 수식을 그림으로 그리지 못함 2) 그림으로는 표현할 수 있으나 전체의 부분을 분할하지 못함 3) 두 수식을 같은 단위로 표현하지 않고 다른 모델을 사용 4) 전체를 표현하지 않고 부분의 부분만을 표현. 이러한 어려움들은 대부분 분수의 단위 구조에 대한 개념적 이해와 밀접하게 관련되어 있었으며, 이는 전체와 부분에 대한 이해와 단위 수준을 조정하는 능력에 대한 예비교사들의 지식 부족으로 인해 발생할 수 있다(Son & Lee, 2016). 본 연구의 결과는 분수의 곱셈과 나눗셈을 시각적으로 표현할 때 예비교사들이 나타낼 수 있는 어려움을 범주화했다는 점에서 향후 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 수학적 이해를 개선하기 위한 기초 자료로 활용할 수 있다.

셋째, 예비교사들은 주어진 수식을 이용하여 문제를 만드는데 어려움을 보였다. 예비교사들은 분수의 곱셈에서는 41.5%, 분수의 나눗셈에서는 22%만이 풀 수 있는 수학 문제를 만들었으며 나머지 예비교사들은 주어진 수학적, 현실적 맥락에 맞지 않고 조건이 불충분한 문제를 만들거나 문제를 만들지 못하였다. 본 연구의 결과는 예비교사들의 문제 만들기 능력이 부족하다고 지적한 여러 선행연구들(노지화 외, 2016; 허난, 신호철, 2013; Osana & Royea, 2011; Stein et al., 2000; Vacc, 1993)과도 맥을 함께하며 대다수의 예비교사들이 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 문제 만들기 능력이 부족함을 시사하고 있다. 이는 예비교사들의 문제 만

들기 경험의 부족함으로 기인할 수 있다. 문제 만들기 경험이 없는 예비교사들은 문제를 구성하고 주어진 수학적 맥락을 이해하는데 어려움을 느낄 수 있다 (Korkmaz & Gür, 2006). 따라서 예비교사 교육 프로그램에서 문제 만들기 활동을 추가하여 예비 교사가 문제 만들기 능력을 기를 수 있도록 문제를 제기할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있다.

본 연구에 참여한 예비교사들은 문제 만들기 경험이 없음에도 불구하고 수학이 아닌 문제를 만든 예비교사는 나타나지 않았다. 이는 예비교사들이 수학이 아닌 문제를 만드는 경우가 있다고 보고한 노지화 외(2016), 허난과 신호철(2013), Osana와 Royea(2011)의 연구와는 다른 결과이며, 예비교사들이 수학이 아닌 문제를 거의 만들지 않았다고 보고한 Yao 외(2021)의 연구 결과와는 일치한다. Cai 외(2015)는 문제 만들기에서 추가적인 연구가 필요한 14개의 풀리지 않는 문제(unanswered question)를 제시하고 그 중 하나를 일부 학생과 교사가 비수학적 문제를 만드는 경우라고 언급한 바 있다. Crespo와 Sinclair(2008)는 이러한 현상에 대한 원인이 문제 상황에 대한 탐색 기회 부족이라고 가정하였다. 그러나 상충되는 연구 결과에 대한 공백을 채우려면 교사가 주어진 수학적 맥락을 이해하고 해석하는 방법과 문제 만들기 사이의 관련성에 대한 연구가 추가적으로 이루어져야할 것이다.

예비교사들은 분수의 곱셈에서 46.3%, 분수의 나눗셈에서 68.3%가 수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제를 만들었으며, 이에 대한 어려움은 다섯 가지 유형으로 분류할 수 있었다. 1) 현실 맥락에 맞지 않음 2) 수식과 관련 없는 문제 3) 조건이 불충분하여 풀 수 없는 문제 4) 수식을 혼동한 경우 5) 주어진 수식을 그대로 따라 만든 문제. 이러한 결과는 예비교사들이 문제를 만들더라도 주어진 수학적 맥락에 대한 충분한 고려와 함께 신중한 문제 상황의 고려가 필요함을 시사한다.

넷째, 분수의 곱셈과 나눗셈에서 예비교사들의 시각적으로 표현하기를 통해 드러난 수학적 이해는 문제 만들기 능력과 연관이 있었다. 예비교사들의 수학적 이해는 문제 만들기 능력에 영향을 미치며, 개념적 이해를 가진 예비교사들이 풀 수 있는 수학 문제를 만들 수 있는 가능성이 높았다. 이러한 결과는 예비교사들의 문제 만들기 능력을 높이려면 관련된 수학 내용에 대한 개념적 이해가 바탕이 되어야함을 시사한다. 수학적 지식의 부족은 교사의 실제 교육 관행을 제한한다(Barlow & Cates, 2006). 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 이해가 부족한 예비교사는 문제 만들기를 제대로 수행할 수 없고 향후 학교 현장에서 학생의 수학적 이해를 돕기 위해 문제를 만들고 제시하기 힘들 수 있다. 따라서 예비교사들은 문제 만들기를 수행하기 전에 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 수학적 이해를 공고히 할 필요가 있으며, 이를 바탕으로 문제 만들기 활동에 참여하고 교실 수업에 효과적으로 구현하는 기회가 주어져야 할 것이다. 다만, 예비교사의 수학적 이해와 문제 만들기의 교차표([표 9, 10])에서 드러나듯이, 그림으로 표현하기에서 절차적 이해와 이해 없음으로 나타난 예비교사들 중 일부는 문제를 만들 수 있었다는 점에 유의할 필요가 있다. 이는 문제 만들기가 예비교사들에게 분수의 곱셈과 나눗셈에 대한 자신의 생각을 표현할 수 있는 다른 기회를 제공할 수 있음을 시사한다. 전통적인 지필 평가와는 달리 문제 만들기는 예비교사의 생각을 드러내는 하나의 평가 도구로 활용될 수 있으며, 예비교사들이 만든 문제를 통해 어려움이 나타나는 유형과 원인을 파악할 수도 있다(Yao et al., 2021). 따라서 예비교사의 생각을 진단하고 평가하는 방법으로서 문제 만들기를 활용할 수 있으며, 이는 예비교사에게 자신의 생각을 표현할 수 있는 더 개방적인 기회를 제공할 수 있을 것이다.

본 연구는 분수의 곱셈과 나눗셈에서 예비교사의 수학적 이해와 문제 만들기 수행능력을 측정하고 그 과정에서 나타나는 어려움을 범주화하였으며, 수학적 이해와 문제 만들기 사이의 관련성에 대해 알아보았다. 이를 통해 예비교사들이 분수의 곱셈과 나눗셈 문제를 시각적으로 표현하고 문제를 만들 때 나타나는 어려움을 범주화하였으며, 문제 만들기 능력을 개선하려면 그에 앞서 수학적 이해가 선행되어야 한다는 점을 확인할 수 있었다. 본 연구의 제한점은 다음과 같다. 첫째, 연구 참여자들의 수가 한정적이므로 본 연구의 결과를 모든 예비교사들을 대상으로 확장하기는 어렵다. 둘째, 본 연구는 분수의 곱셈과 나눗셈의 수학적 이해를 포착하기 위해 이해 정도를 그림으로 표현하게 하였다. 비록 표상을 활용한 시각적 표현이 예비교사의 수학적 이해 정도를 드러내는데 효과적인 방법이라고 알려져 있지만(예: Izsak, 2003; Lamon, 2001), 예비교

사의 수학적 이해 정도를 정밀하게 드러내기에는 제한적일 수 있다. 수학적 이해를 드러내는 방식은 글, 풀이 과정, 인터뷰 등과 같이 다양할 수 있으며, 다양한 방식을 사용하여 예비교사의 수학적 이해를 측정했다면 개념적 이해를 보인 예비교사의 빈도가 더 높아졌을 수도 있다(Yao et al., 2021). 셋째, 본 연구는 문제 만들기의 수행 능력을 측정하기 위해 수학 문제의 완전성이라는 한 가지 평가 기준만을 적용하였다(풀 수 있는 수학 문제, 수학적, 현실적 맥락에 맞지 않거나 조건이 불충분한 문제, 문제를 만들지 못함). 그러나 문제 만들기는 수학적 정교성, 인지적 요구, 창의성, 관련된 수학 개념의 의미(예: 분수의 의미)와 같이 '문제의 질'과도 관련된다. 따라서 예비교사의 수학적 이해가 문제 만들기와 관련된 여러 가지 측면에 미치는 영향을 이해하려면 추가적인 연구를 통해 본 연구의 결과를 보완할 필요가 있다.

참 고 문 헌

김경탁, 류성림(2013). 5, 6학년 수학교재의 문제만들기 내용 및 6학년 학생들의 문제만들기에서의 오류 분석. 한국초등수학교육학회지, 17(2), 321-350.

김슬비, 황혜정(2015). 예비교사의 문제 생성과 재구성 활동에 관한 탐색. 수학교육논문집, 29(3), 533-551.

나귀수(2017). 수학 영재 학생들의 문제 만들기에 대한 연구. 학교수학, 19(1), 77-93.

노지화, 고호경, 허난(2016). 분수 나눗셈 스토리 문제 만들기에 관한 예비교사 지식 조사 연구. 초등수학교육, 19(1), 19-30.

방정숙, 이지영(2009). 사례연구를 통한 분수 나눗셈의 연산 감각 분석. 학교수학 11(1), 71-91.

서관석, 전경순(2000). 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구. 수학교육학연구, 10(1), 103-113.

여승현, 이지영(2022). 문제제기 및 해결을 통한 한국과 미국 예비교사의 분수 곱셈 이해 탐색. 수학교육, 61(1), 157-178.

이대현(2022). 초등 예비교사들이 제시한 분수 나눗셈 문장제와 해결 방법 분석. 과학교육연구지, 46(1), 109-120.

이자혜(2018). 개방형 문제 만들기 수업에서 나타난 초등 수학 영재 학생의 개방형 문제 생성 능력, 문제 해결 능력 및 메타인지에 관한 연구. 이화여자대학교 박사학위논문.

허난(2011). 수학 교과에서의 문제 만들기에 대한 초등학교 교사들의 인식과 활용도 조사 연구. 한국학교수학회논문집, 14(4), 539-564.

허난, 신호철(2013). 초등학교 예비교사들의 수학적 '문제 만들기'에 나타나는 문장의 오류 유형 분석. 한국학교수학회논문집, 16(4), 797-820.

Adu-Gyamfi, K., Schwartz, C. S., Sinicope, R., & Bosse, M. J. (2019). Making sense of fraction division: Domain and representation knowledge of preservice elementary teachers on a fraction division task. *Mathematics Education Research Journal, 31*(4), 507–528.

Bailey, D. H., Zhou, X., Zhang, Y., Cui, J., Fuchs, L. S., Jordan, N. C., Gersten, R., & Siegler, R. S. (2015). Development of fraction concepts and procedures in U.S. and Chinese children. *Journal of Experimental Child Psychology, 129*, 68–83.

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132–144.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008), Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Barlow, A. T., & Cates, J. M. (2006). The impact of problem posing on elementary teachers' beliefs about mathematics and mathematics teaching. *School Science and Mathematics, 106*(2), 64-73.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The array representation and primary children's understanding and reasoning in multiplication. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 217-241.

Bezuk, N. S., & Armstrong, B. E. (1995). Understanding of fraction multiplication and division of Fractions. *Mathematics Teacher, 86*(1), 120-131.

Boaler, J., & Brodie, K. (2004). The importance, nature and impact of the teacher questions. In D. E. McDougall & J. A. Ross (Eds.), *Proceedings from the 26th Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 774-782). Toronto, Ontario, Canada: OISE/UT.

Cai, J., & Cifarelli, V. (2005). Exploring mathematical exploration: How two college students formulated and solved their own mathematical problems. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 27*(3), 43-72.

Cai, J., & Ding, M. (2017). On mathematical understanding: Perspectives of experienced Chinese mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(1), 5–29.

Cai, J., & Hwang, S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(4), 401-421.

Cai, J., Hwang, C., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered questions and unanswered questions. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 3–34). Springer.

Cankoy, O., & Darbaz, S. (2010). Effect of a problem posing based problem solving instruction on understanding problem. *Hacettepe University Journal of Education, 38*, 11-24.

Chang, K. E., Wu, L. J., Weng, S. E., & Sung, Y. T. (2012). Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning. *Computers & Education, 58*(2), 775-786.

Chen, L., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2015). Enhancing the development of Chinese fifth-graders' problem-posing and problem-solving abilities, beliefs, and attitudes: A design experiment. In F. M. Singer, N. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing: From research to effective practice* (pp. 309–329). Springer.

Chinnappan, M., & Forrester, T. (2014). Generating procedural and conceptual knowledge of fractions by preservice teachers. *Mathematics Education Research Journal, 26*(4), 871–896.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM–Mathematics Education*, *37*(3), 149-158.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers′ practices. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 243-270.

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(5), 395–415.

English, L. D. (1998). Children′s problem posing within formal and informal contexts. *Journal for Research in mathematics Education, 29*(1), 83-106.

Fazio, L., & Siegler, R. S. (2011). *Teaching fractions* (Vol. 22). International Academy of Education.

Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology, 102*(2), 395.

Hiebert, J., & Behr, M. (1988). *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2). National Council of Teachers of Mathematics.

Izsák, A. (2003). "We want a statement that is always true": Criteria for good algebraic representations and the development of modelling knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(3), 191-227.

Kilic, C. (2013). Turkish primary school teachers′ opinions about problem posing applications: students, the mathematics curriculum and mathematics textbooks. *Australian Journal of Teacher Education, 38*(5), 144-155.

Korkmaz, E., & Gür, H. (2006). Determining of prospective teachers’ problem posing skills. *Journal of Balıkesir University Institute of Science and Technology, 8*(1), 64-74.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing from fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 146–165). National Council of Teachers of Mathematics.

Lavy, I., & Shriki, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers’ mathematical knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(1), 11-24.

Lesh, R., & Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). NCTM.

Leung, S. K. S. (2013). Teachers implementing mathematical problem posing in the classroom: Challenges and strategies. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 103-116.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers’ understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Lawrence Erlbaum.

Mack, N. K. (2000). Long-term effects of building on informal knowledge in a complex content domain: The case of multiplication of fractions. *Journal of Mathematical Behavior, 19*(3), 307–332.

Mason, J., Stephens, M., & Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10–32.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* NCTM.

National Research Council. (2005). *How students learn: History, mathematics, and science in the classroom.* Washington, DC: Division of Behavioral and Social Sciences and Education, National Research Council of the National Academies.

Osana, H. P., & Pelczer, I. (2015). A review on problem posing in teacher education. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical Problem Posing* (pp. 469-492). Springer.

Osana, H. P., & Royea, D. A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers’ explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(4), 333-352.

Pirie, S. (2002). Problem posing: What can it tell us about students’ mathematical understanding? In D. Mewborn, P. Sztajn, E. White, H. Wiegel, R. Bryant & K. Nooney (Eds.), *Psychology of Mathematics Education North America (PME-NA), Athens, GA* (pp. 927–958, vol 11). Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics: An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346-362.

Rosli, R., Goldsby, D., & Capraro, M. M. (2013). Assessing students′ mathematical problem-solving and problem-posing skills. *Asian Social Science, 9*(16), 54.

Schneider, M., Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). Relations among conceptual knowledge, procedural knowledge, and procedural flexibility in two samples differing in prior knowledge. *Developmental Psychology, 47*(6), 1525–1538.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. Journal for *Research in Mathematics Education, 20*(4), 338-355.

Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher, 26*(3), 9 - 15.

Siegler, R. S., & Lortie-Forgues, H. (2017). Hard lessons: Why rational number arithmetic is so difficult for so many people. *Current Directions in Psychological Science, 26*(4), 346-351.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-23.

Silber, S., & Cai, J. (2017). Pre-service teachers' free and structured mathematical problem posing. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(2), 163-184.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521-539.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129-135.

Son, J. W., & Lee, J. E. (2016). Pre-service teachers' understanding of fraction multiplication, representational knowledge, and computational skills. *Mathematics Teacher Education and Development, 18*(2), 5-28.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 237-295.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction.* Teachers College Press.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5-25.

Vacc, N. (1993). Questioning in the mathematics classroom. *Arithmetic Teacher, 41*(2), 88 - 91.

Wearne, D., & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(5), 371-384.

Xie, J., & Masingila, J. O. (2017). Examining interactions between problem posing and problem solving with prospective primary teachers: A case of using fractions. *Educational Studies in Mathematics, 96*(1), 101-118.

Yao, Y., Hwang, S., & Cai, J. (2021). Preservice teachers' mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *ZDM - Mathematics Education, 53*(4), 937-949.

Analysis of the Relationship Between Preservice Teachers' Mathematical Understanding in Visual Expressions and Problem-Posing Ability: Focusing on Multiplication and Division of Fractions

Son, Taekwon
Bongmyong Elementary School
E-mail : sontaekwon7@gmail.com

This study examined the relationship between preservice teachers' mathematical understanding and problem posing in fractions multiplication and division. To this purpose, 41 preservice teachers performed visual representation and problem posing tasks for fraction multiplication and division, measured their mathematical understanding and problem posing ability, and examined the relationship between mathematical understanding and problem posing ability using cross-tabulation analysis. As a result, most of the preservice teachers showed conceptual understanding of fraction multiplication and division, and five types of difficulties appeared. In problem posing, most of the preservice teachers failed to pose a math problem that could be solved, and four types of difficulties appeared. As a result of cross-tabulation analysis, the degree of mathematical understanding was related to the ability to pose problems. Based on these results, implications for preservice teachers' mathematical understanding and problem posing were suggested.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97B50
* Key Words : mathematical understanding, problem posing, visual representation, preservice teacher