韓國數學敎育學會誌 시리즈 C <初等數學敎育>
https://doi.org/10.7468/jksmec.2023.26.4.349
2023. 10. 제 26권, 제 4호, 349-368

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
October. 2023, Vol. 26, No. 4, 349-368

수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 방안 탐색

이예진(서울잠전초등학교, 교사)・최미라(서울선사초등학교, 교사)
김윤정(서울화계초등학교, 교사)・임미인(서울교육대학교, 교수)†

본 연구의 목적은 수학적 모델링 수업에서 학생들이 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 방안을 탐색하는 것이다. 이에, 초등학생들이 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 데 어려움을 보이는 학습 내용 중 최대공약수를 선정하고. 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하면서 최대공약수 관련 문제를 해결할 수 있도록 수학적 모델링 수업을 설계하여 실행하였다. 분석 결과, 해당 수학적 모델링 수업은 학생들이 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하여 문제를 해결하는 데 긍정적인 영향을 미친 것으로 나타났다. 또한 실제 수업 적용을 통해 수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식을 의미 있게 연결하기 위한 교수학습 방안을 도출하였다.

I. 서론

수학 학습 시 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 관계를 파악하는 것은 깊이 있는 수학적 이해를 하는 데 필수적이다. ‘개념적 지식’은 수학적 개념, 연산, 관계 등의 영역과 관련된 지식이며, 이들 간의 관계를 다룬다는 점에서 수학적 아이디어의 통합적이고 기능적인 지식을 의미한다(Crooks & Alibali, 2014; Hibert, 1986; Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001). 개념적 지식은 문제를 이해하는 데 사용되며 이미 알려진 방법으로 문제를 풀거나 새로운 방법을 생성하는 데 필요하다(Hiebert & Lefevre, 1986). ‘절차적 지식’은 어떻게 할지를 아는 것에 대한 지식으로, 기술, 전략, 산출물 및 내재화된 행동을 통해 특정된다(Byrnes, 1992). 즉, 문제를 해결하기 위한 행동을 유연하고 정확하며 효율적이고 적절하게 실행하는 능력이라 할 수 있다(Rittle-Johnson, Siegler, & Alibali, 2001).

* 접수일(2023년 7월 3일), 심사(수정)일(1차: 2023년 7월 20일, 2차: 2023년 10월 23일), 게재확정일(2023년 10월 30일)
* MSC2000분류: 97D40
* 주제어: 수학적 모델링, 개념적 지식, 절차적 지식, 연결
†교신저자: miin@snue.ac.kr

개념적 지식을 잘 이해하려면 단편 정보들 사이에 관계가 형성되어야 하는데 그 정보 중 하나가 바로 절차적 지식이다. 개념적 지식과 절차적 지식이 잘 연결되면, 개념은 올바른 알고리즘을 실행하기 위한 인지적인 제어 체계로서 역할을 하며 절차는 수학적 대상을 이해하는 데 사용되어 성공적인 ‘개념적 이해’의 과정으로 나아갈 수 있다(Nesher, 1986; Rittle-Johnson & Koedinger, 2005). 따라서 개념적 이해는 개념적 지식과 절차적 지식을 포괄하는 관계적 이해라고 할 수 있다. 이는 학생들의 견고한 배경 지식에서 형성됨으로써 학생들이 이미 알고 있는 것과 새로운 개념을 연결할 수 있게 되고 실세계 상황에서 개념을 활용할 수 있게 된다(Soheil & Naji, 2021). 한편, 다수의 선행연구(예, Nahdi & Jatisunda, 2000; Rittle-Johnson et al., 2001 등)에서 ‘개념적 지식’과 ‘개념적 이해’의 용어가 혼용되어 나타나는데, 본 연구에서는 관련된 지식을 지칭할 때는 ‘개념적 지식’을 사용하고, 학습을 통해 달성하고자 하는 궁극적 상태를 지칭할 때는 ‘개념적 이해’로 용어를 구분하여 사용할 것이다. 이는 본 연구에서 Nesher(1986), Rittle-Johnson & Koedinger(2005)와 마찬가지로 학생들이 개념적 지식과 절차적 지식을 연결할 수 있어야 개념에 대한 진정한 이해가 가능하다고 보았기 때문이다.

학생들의 개념적 이해를 지원하기 위한 교수학습 방법 중 하나로 ‘현실적 맥락 교수’가 있고(손승현, 서유진, 이주영 외 1인, 2011), 수학적 모델링은 이에 해당하는 대표적 교수법이다. 수학적 모델링은 실생활 문제를 해결하여 도출한 수학적 결과를 실생활에 적용해보는 수업으로, 수학적 모델링이 개념 형성에 끼치는 긍정적인 영향은 여러 선행연구에서 다루어진 바 있다(신은주, 이종희, 2004; Lege, 2003; Soheil & Naji, 2021). Soheil & Naji(2021)에 따르면 수학적 모델링 수업은 허용적인 분위기에서 개념을 토대로 수학적 모델을 표현하고 학습자 간 토의를 통해 상호작용하면서

개념적 이해를 위한 깊은 탐구가 일어나도록 할 수 있다. 이러한 수학적 모델링은 학생들이 학습한 수학적 개념에 대한 이해를 뒷받침하며 이전에 학습했던 지식을 이끌어낸다. 또 기계적인 학습을 넘어 수학적 개념에 의미를 부여하여 개념을 확장하게 한다(Oswalt, 2012).

한편, 초등학교 수학 수업 시 학생들의 개념적 이해를 독려함에도 불구하고, 개념에 대한 충분한 이해 없이 절차적 능력이 발현되는 경우를 종종 관찰할 수 있다. 대표적인 예로 최대공약수와 최소공배수를 다루는 상황이 이에 해당한다. '약수와 배수'는 자연수 이론의 핵심 중 하나이고, 더 나아가 분수의 이해 및 연산의 기초가 된다(최지영, 강완, 2003). 그러나 초등학교 수학에서는 소수(素數)와 소인수분해를 명시적으로 학습하지 않기 때문에 최대공약수와 최소공배수를 구하는 방법에 대한 충분한 개념적 이해를 하는 데 불가피한 어려움이 따른다. 따라서 학생들은 최대공약수와 최소공배수를 구하는 방법을 단순히 알고리즘적으로 이해하는 경우가 많다(김희리, 김성준, 2020; 방정숙, 이유진, 2018). 김희리, 김성준(2020)은 5학년 학생들의 최대공약수를 구하는 방법에 대한 정답률을 조사하였는데, 최대공약수 개념을 이용한 방법의 정답률이 나눗셈틀 형식의 알고리즘을 이용한 방법의 정답률보다 낮았다. 방정숙, 이유진(2018)에서도 마찬가지로 5학년 학생들은 나눗셈틀을 이용하여 최대공약수를 구할 수 있음에도 불구하고 그 방법의 의미를 제대로 이해하지 못하였다. 이는 학생들이 최대공약수 개념에 대해 제대로 이해하지 못한 상태에서 단순 절차에 익숙해져 있음을 함의하며, 최대공약수의 개념적 지식과 절차적 지식 간의 연결이 이루어지지 못한 상태라 할 수 있다. 이럴 경우, 최대공약수 개념을 활용하는 문제를 해결하기 어렵고, 다른 개념과의 연결을 형성하거나 새로운 학습으로의 전이에도 문제가 발생할 수 있다.

따라서 본 연구에서는 최대공약수를 학습 요소로 선정하고, 수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 방안을 탐색하고자 하였다. 또한 초등학교 현장에서 수학적 모델링 수업을 통해 학생들의 성공적인 개념적 이해를 지원하는 교수학습 방안을 모색하고자 하였다.

II. 이론적 고찰

1. 수학적 모델링 수업을 통한 개념적 이해

현실적 맥락 교수로서 수학적 모델링에 대한 연구는 국내외에서 폭넓게 이루어지고 있다. 수학적 모델링의 가장 중요한 특징은 현실 세계로부터 수학적 모델을 도출하고 그 결과를 현실 세계에 비추어서 검증하는 모델링 사이클을 거친다는 점이다(Ferri, 2018). 즉, 수학적 모델링은 현실과 수학 세계를 오가는 전이 가능한 활동으로서 현실 상황에 기반한 과제에 수학을 적용하는 과정을 포함한다. 이후 수학적 모델링 결과를 다시 실생활 문제에 적용하여, 문제를 해결하는 데 사용한 수학적 모델을 정교화한다. 수학적 모델링 수업에서 현실적 맥락과의 연계는 필수적이다.

수학적 모델링 수업을 위한 모델링 사이클(Cycle) 또한 다양한 형태로 나타난다. 정혜윤, 이경화, 백도현 외 2인(2018)에 따르면 다수의 선행연구에서 '실세계 탐구→수학적 모델 수립→수학적 결론→모델 적용'으로 이루어지는 수학적 모델링 사이클을 따르고 있음을 알 수 있다. Blum & Leiß(2007)은 다음과 같이 수학적 모델링 사이클을 제시하였다. 먼저, 문제 해결자는 실제 상황과 문제를 이해하여 상황 모델을 만든다. 그 상황 모델이 단순화, 구조화되고 더 정교화되는 과정을 거쳐 실제 모델이 만들어진다. 이 실제 모델을 수학적 모델로 변환하는 수학화를 거친 후, 수학적 개념, 원리, 법칙을 이용해 수학적 결과를 도출하게 된다. 이 수학적 결과를 실제 결과로 해석한 다음, 실제 결과가 실제 상황에 맞는지 정당화하는 과정을 거친다. 결과가 합리적인지, 적절한 정확성을 지니는지 확인하여 실제 상황에 적용하게 된다. 이러한 수학적 모델링 사이클에서는 상황 모델과 상황의 정신적 표상을 통해 모델링 과정에 대한 인지적 관점이 드러나게 되므로, 수학적 모델링은 학생의 이해를 확인하기 위한 좋은 수단이 된다. 만약 교사가 모델링 사이클 내에서 단계를 명명하고 구분할 수 있다면 모델링 과정 동안 학생들의 인지적 장애를 진단할 수 있다(장혜원, 최혜령, 강윤지 외 1인, 2019). 따라서 수학적 모델링은 개념에 대한 이해가 뒷받침되지 않은 채 절차적 유창성만 갖춘 학생이나 개념적 지식과 절차적 지식의 연결이 이

루어지지 않은 학생을 진단하는 데 유용하다.

수학적 모델링은 개념적 이해를 형성하는 데 긍정적인 영향을 끼친다(Soheil & Naji, 2021). 구체적으로 첫째, 수학적 모델링은 구성주의의 원리에 기초하고 있으며 수학적 이해와 사고의 발달에 기여한다(Hennig, 2010; Soheil & Naji, 2021). 둘째, 수학적 모델링 수업 시 학생들은 수학적 개념을 탐구하고 다양하게 표현하는 과정을 경험하게 된다. 개념을 기호, 그림, 모델 등 여러 방법으로 표현하면서 학생들은 다양한 상황에서 수학적 개념을 학습하며 깊이 있는 이해가 가능해진다. 셋째, 학습자 간의 상호작용이 학생들의 개념적 이해를 촉진한다. 학생들은 대화나 토의를 통해 개념적 지식을 탐구할 수 있다. 수학적 모델링은 여러 수준의 질문을 제기해서 학생들이 개념을 발견하고 차후 단계를 밟아갈 수 있도록 한다. 마지막으로 수학적 모델링 수업은 학생들에게 흥미로운 실생활 상황을 제시하고 수학적 경험을 해석하도록 하며 반성의 과정을 거치게 함으로써 개념적 이해의 발달을 돕는다(Soheil & Naji, 2021).

Romberg(1994)는 수학적 모델링에 사용되는 수학화가 개념적 이해를 형성하는 하나의 구성 요소라 주장하였다. 수학화를 통해 수학적 모델을 만들고 전략을 수립하는 것이 개념적 이해의 과정이며 수학화 자체를 개념을 구성하는 하나의 블록에 비유하였다. Lege(2003) 또한 수학적 모델링이 학생들의 개념적 이해를 돕는 전략으로서 의미가 있다고 주장하였다. 기존의 아이디어에 새로운 아이디어를 연결하기 위해서는 새로운 연결 관계를 만들어야 하는데, 모델을 만드는 활동이 이러한 연결 관계를 형성하는 데 기여할 수 있다고 하였다.

그러나 실제 학교 현장의 수학적 모델링 수업은 개념의 ‘적용’에만 초점을 맞추는 경향이 있고, 수학적 모델링을 통해 개념적 이해를 깊게 하는 것은 종종 간과되곤 한다. Zulkarnaen(2018)에 따르면 다수의 학생들이 수학적 모델링 과제를 해결할 때 잘못된 절차를 사용하거나 불완전한 스키마를 사용하는 모습을 보이는데, 이는 학생들이 개념적 지식과 절차적 지식의 연결이 부족하기 때문이다.

한편 Lesh, Hoover, Hole et al.(2000)은 개념적 이해를 향상시키기 위한 모델 도출 활동의 6가지 원리를 다음과 같이 제시하였다. 첫째는 모델 구성의 원리이다. 학생들은 수학화 과정을 통해 구체물, 그림, 기호, 언어 등 여러 표현 체계의 모델을 생성한다. 이러한 모델은 자신의 사고를 설명하고 정당화하는 과정에 사용되며 대안적 해결책이나 다른 사람들이 제기한 해석을 분석하고 평가하는 데 활용된다. 둘째, 현실성의 원리이다. 학생들은 현실 맥락에서 다양하고 의미 있는 수학적 해석을 형성한다. 현실성의 원리는 진정한 실제에서 이루어져야 한다는 의미라기보다는 학생들이 학습한 수학이 실생활에서 활용된다는 것을 인식하고 실생활에 기반해서 답하고 확장해서 생각할 수 있도록 학생들을 독려해야 한다는 의미로 볼 수 있다. 셋째, 자기평가의 원리이다. 학생들은 자신의 사고를 확인하고 시험하고 수정하고 어떻게 자신이 만든 모델이 실생활 문제를 만족시키고 해결하는지를 평가한다. 친구들로부터 얻은 피드백을 바탕으로 자기평가를 하여 자신의 사고에서 부족한 점을 찾고 대안적 사고를 하게 된다. 이를 통해 아이디어의 강점을 통합하고 약점을 최소화해 나아간다. 넷째, 일반화 가능성의 원리이다. 이 원리는 개념적 도구, 수학적 모델과 절차가 특정 문제 상황에만 제한되어 있는지, 새로운 정보에도 유용한지, 일반화가 가능한지에 관련된 것이다. 모델이 개발자에게만 유용하게 개발되지는 않았는지, 문제에 제시된 특정 상황에만 적용 가능한 것은 아닌지, 공유, 변형, 수정, 재사용이 가능한지에 대한 고려가 이루어져야 한다. 다섯째, 문서 구성의 원리이다. 이 원리는 학생이 문제에 대한 자신의 사고를 보여주기 위해 특정 형태의 문서를 작성하도록 하는 것이다. 문서에는 학생들의 사고 과정에 대한 기록이 자세하게 담기며 이는 학생들의 자기평가와 메타인지 신장을 위한 자료로 사용될 뿐만 아니라 교사나 연구자의 관찰 및 평가 자료로도 활용된다. 여섯째, 효율적 전형의 원리이다. 이는 모델링 과제와 그 해결책이 전형성을 띠는지에 관한 것이다. 과제가 다양한 수학적 연결을 만들고 많은 주제를 학습하는 데 효과적인 수단의 역할을 하는지, 학생들이 이후에 구조적으로 비슷한 다른 상황을 마주했을 때 과제의 해결책이 활용될 수 있는지에 대한 것이다.

2. 개념적 지식과 절차적 지식의 연결

앞서 언급했듯이, 개념적 지식은 수학적 개념, 연산,

관계 등과 관련된 지식이며 이들 간의 관계를 다룬다는 점에서 통합적인 지식이다(Rittle-Johnson et al., 2001). 개념적 지식은 문제를 이해하거나 해결할 때 사용되고 새로운 방법을 생성하는 데 필요하다(Hiebert & Lefevre, 1986). 학생들이 개념적 지식을 형성하면 이를 여러 수학적 맥락에 적용할 수 있고 수학적 아이디어의 필요성과 유용성을 깨닫게 된다. 또한 개념적 지식은 학생들로 하여금 더 깊고 지속적인 개념적 이해를 가능하게 하고(Crooks & Alibali, 2014), 개념들을 분절적으로 학습할 때보다 서로 연결 지어 학습할 경우 더 쉽고 정확하게 기억할 수 있게 된다(National Research Council, 1989).

절차적 지식은 어떻게 할지를 아는 것에 대한 지식으로 기술, 전략, 내재화된 행동을 통해 특정된다(Byrnes, 1992). 즉 문제를 해결하기 위한 행동을 유연하고 정확하고 효율적이며 적절하게 실행하는 능력으로 정의된다(Rittle-Johnson, et al., 2001). 이러한 절차적 지식은 기호 등 수학의 표현 체계에 대한 지식과 문제를 해결하는 규칙 및 절차에 대한 지식으로 구성된다(Hiebert & Lefevre, 1986).

개념적 지식과 절차적 지식을 구분하려는 시도는 실제적이면서도 이론적인 의의를 지닌다(Crooks & Alibali, 2014). 실제적으로 학생들이 개념적 지식을 형성했는지, 어떤 수업 상황이 적절한 개념적 지식을 형성할 수 있도록 하는지 파악하는 것은 중요한 문제인데, 이론적인 관점에서 지식의 이해 변화를 보기 위해서는 수학적 논증에 활용되는 지식의 본질이 구체화되어야 하기 때문이다. 물론 이 두 지식은 긴밀하게 상호연결되어 있기 때문에 명확히 구분하기는 어렵다(Baroody & Lai, 2007). 그러나 개념적 지식과 절차적 지식은 다른 상황에서 서로 다른 경로를 통해 발달하는 것으로 여겨지므로(Crooks & Alibali, 2014) 두 지식을 구분하기 위한 시도는 계속해서 이루어지고 있다. 두 지식의 가장 큰 차이점은 절차적 지식에서는 순서에 대한 지식이 중심이라는 점이다. Hiebert & Lefevre(1986)에 따르면 절차적 지식에서 중요한 관계는 하위 절차와 상위 절차를 차례대로 처리하는 것에 있다. 둘째로는 학습 방법의 차이이다. 개념적 지식은 의미 있게 학습되어야 하는 반면 절차적 지식은 개념적 지식과 연결되는지에 따라 의미 학습, 암기 학습 중 선택되어 학습된다.

이러한 두 지식은 구분됨과 동시에 연결되어 학습되어야 한다(Hiebert & Lefevre, 1986). 개념적 지식과 절차적 지식의 관계를 다룬 여러 선행연구(Byrnes, 1992; Crooks & Alibali, 2014; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Rittle-Johnson et al., 2001) 중에서 Rittle-Johnson & Alibali(1999)는 개념적 지식과 절차적 지식의 비대칭적인 관계를 주장하였다. 개념적 지식을 형성한 경우에는 절차적 지식을 제대로 형성하는 경우가 대부분이었지만, 절차적 지식을 학습했음에도 개념적 지식을 잘 형성하지 못한 경우가 많았다. 이처럼 개념적 지식의 형성 없이 절차적 지식만 습득한 학생들은 수학적 아이디어의 이해를 심화하거나 문제를 해결하는 데 어려움을 겪게 된다. 개념적 지식과 절차적 지식이 제대로 연결되지 않으면 문제를 풀 수 있을 것 같은 직관적인 느낌이 들어도 제대로 해결하지 못하는 경우가 발생하며, 학생들은 자신이 하고 있는 것을 이해하지 못한 채 기계적으로 답을 구하곤 한다. 따라서 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 것은 개념적 이해를 위해서 뿐만 아니라 성공적인 문제 해결을 위해서도 필수적이다. 또한 개념적 지식과 절차적 지식을 성공적으로 연결하여 학습하게 되면 절차적 지식을 장기기억으로 전이하여, 지식을 보다 효율적으로 사용할 수 있게 된다는 이점이 있다(Hiebert & Lefevre, 1986).

3. 최대공약수의 개념적 지식과 절차적 지식의 연결

최대공약수는 나눗셈과 약수의 일차적 개념[1]과 이러한 일차적 개념들을 결합한 이차적 개념인 공약수 개념이 연결된 개념이다. 나눗셈과 약수, 공약수 개념의 연결에 의해서 스키마(Schema)를 형성할 때, 최대공약수를 구하는 방법은 대표적으로 '최대공약수의 개념', '소인수분해', '나눗셈틀'을 이용하는 방법의 세 가지가 있다(이상덕, 김화수, 2004). 이상덕, 김화수(2004)에서 제시한 방법을 초등학교 교육과정 내 용어를 토대로 수정한 것은 [표 1]과 같다. 이 중 <방법 1>은 최대공약수를 구하는 절차적 지식이기는 하나, 최대공약수의 개념을 직접적으로 이용한다는 특징이 있다.

1) 개념들의 결합 없이 단독으로 형성된 개념 또는 스키마를 구성하는 가장 하위 단계의 개념

<방법 2>와 <방법 3>은 최대공약수의 개념이 간접적으로 활용된 방법으로, 최대공약수를 구하기 위한 절차에 보다 초점이 맞추어져 있다. 현행 초등학교 교육과정에서 소수, 소인수분해의 개념을 다루지 않기 때문에 <방법 2>와 <방법 3>처럼 여러 수의 곱으로 분해하거나 나눗셈틀을 이용해 최대공약수를 구하는 절차에서 개념적 지식을 연결하지 못하는 경우에는 절차만 기계적으로 수행하는 문제가 발생할 수 있다.

[표 1] 최대공약수를 구하는 세 가지 방법

구분	최대공약수를 구하는 방법
<방법 1>	자연수 범위에서 두 개 이상의 자연수들의 공약수 중에서 최대인 것(가장 큰 공약수)
<방법 2>	자연수 범위에서 두 개 이상의 자연수들을 각각 소인수분해 한 것 중에 공통적으로 포함되어 있는 소수 또는 소수들의 곱 중에서 가장 큰 값
<방법 3>	자연수 범위에서 두 개 이상의 자연수들을 나눗셈틀에 놓고 동시에 나누었을 때, 나누어떨어지게 하는 소수 또는 소수들의 곱 중에서 가장 큰 값

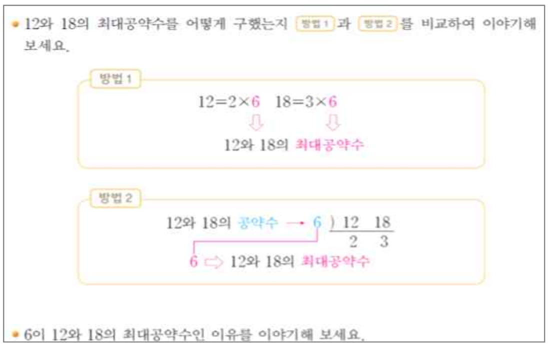
이와 관련하여, 2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 5학년 국정 및 검정 수학 교과서 총 11종에서 최대공약수를 구하는 방법을 어떻게 제시하고 있는지 분석하였고, 그 결과는 [표 2]와 같이 나타났다.

[표 2] 수학 교과서에 제시된 최대공약수를 구하는 방법 분석 결과

교과서	<방법 1>	<방법 2>	<방법 3>	개념-절차 연결
국정	○	○	○	○
검정 A	○	×	○	×
검정 B	○	○	○	×
검정 C	○	○	○	○
검정 D	○	○	○	×
검정 E	○	○	○	×
검정 F	○	○	○	×
검정 G	○	○	○	○
검정 H	○	○	○	○
검정 I	○	○	○	×
검정 J	○	×	○	×

11종의 교과서 모두 최대공약수 개념을 직접적으로 이용하는 절차적 지식에 관한 <방법 1>을 다루고 있었다. 한편 개념적 지식과 <방법 2>, <방법 3> 관련 절차적 지식을 연결하여 차시를 구성한 교과서는 국정 교과서 포함 4종뿐이었다. 국정 교과서에서는 [그림 1]과 같이 <방법 2>, <방법 3>과 관련하여 6이 최대공약수인 이유를 설명하도록 하였고, 검정 교과서 C, G, H에서도 구한 수가 최대공약수인 이유를 말해보게 함으로써 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하려는 시도가 확인되었다. 나머지 7종 중 5종의 교과서에서는 '공약수와 최대공약수 알기'와 '최대공약수를 구하는 방법'으로 개념적 지식과 절차적 지식을 분리하여 차시를 구성하고 있었다. 교과서 분석 결과, 다수의 교과서에서 최대공약수에 대한 개념적 지식과 절차적 지식의 연결이 의미 있게 이루어지지 않은 것으로 나타났다. 이는 최대공약수를 구하는 방법, 즉 절차적 지식을 다룰 때 최대공약수의 개념에 대해 다루지 않거나 왜 그런 방법을 사용하는지에 대한 학습이 이루어지지 않음을 통해 확인할 수 있다. 이러한 분석 결과를 통해 수학 수업 시 학생들이 최대공약수에 대한 개념적 지식과 절차적 지식을 의미 있게 연결하여 학습할 수 있도록 지원할 필요를 재차 확인할 수 있다.

이러한 선행연구 고찰을 종합하여, 본 연구에서는 수학적 모델링 수업에서 학생들이 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하여 최대공약수에 대한 깊이 있는 개념적 이해를 할 수 있도록 지원하는 방안을 탐색해보고자 한다.



[그림 1] 국정 교과서 – 최대공약수를 구하는 방법 학습 장면 (교육부, 2019)

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상

연구 대상은 S시 소재 S초등학교 5학년 1개 학급 21명으로, 1학기 초 진단평가 결과 90% 이상의 학생들이 수학 교과에 대한 기초학력 도달 수준인 것으로 확인되었다. 학생들은 5학년 1학기 2단원 약수와 배수 수업을 11차시에 걸쳐 학습했다. 본 연구는 질적 연구에 해당하므로 비확률표집방법 중 하나인 편의 표집을 사용하였다. 이때 교육과정 상 약수와 배수 단원을 학습했음에도 불구하고 개념적 지식과 <방법 2>, <방법 3> 관련 절차적 지식을 연결하지 못하는 학생이 70% 이상 나타난 학급을 연구 대상으로 선정하였다. 수업 적용을 위한 수업자는 본 연구의 연구자 중 1인으로, 연구 대상의 학급 담임을 맡고 있으며 18년차 교육경력을 지니고 있다. 학생들의 평소 특성을 잘 알아 수업 중 행동을 의미 있게 관찰할 수 있고 보다 밀도 있는 면담이 가능하다는 논의 하에 해당 학급의 담임교사를 수업자로 선정하였다. 다만 연구자가 수업자로 참여함으로써 연구의 독립성을 저해하지 않도록 유의하였다.

2. 연구 절차 및 방법

선행연구를 바탕으로 일차적으로 최대공약수 관련 사전·사후 평가 문항, 수학적 모델링 수업 과제, 수업 지도안 및 활동지를 포함한 수업자료를 개발하여 수업을 설계하였다. 수업 적용 2일 전에 연구 대상 학생들을 대상으로 사전 평가 및 면담을 하여 최대공약수에 대한 개념적 지식과 절차적 지식, 두 지식 간의 연결에 대한 이해 정도를 확인하였다. 사전 평가는 1교시 40분간 이루어졌으며, 이후 학생의 이해에 대한 추가적인 확인이 필요한 학생들을 대상으로 쉬는 시간과 방과후 시간을 활용하여 개별 심층 면담을 실시하였다. 사전 평가 결과에 따른 모둠 구성 후 총 80분 블록타임의 수학적 모델링 수업을 진행하였다. 수업 적용 다음 날 사후 평가를 통해 학생들의 변화를 확인하였고, 이때 사후 평가는 사전 평가와 마찬가지로 1교시 40분간 실시하였다. 이를 토대로 연구 대상 21명 중 개념적 지식과 절차적 지식의 연결에서 긍정적인 변화가 있는 11명과 절차적 지식에서 긍정적인 변화가 있는 2명, 총 13명을 면담 대상으로 선정하였다. 개별 심층 면담은 사후 평가 당일을 포함한 이틀간 쉬는 시간 또는 방과후 시간을 활용하여 학생당 10분 이내로 실시하였다. 심층 면담은 사후 평가 결과지를 토대로 학생들의 수학적 이해에 대한 상세한 정보를 얻기 위한 방식으로 진행되었고, 사후 평가 결과에 대한 구체적인 내용을 확인하는 질문을 통해 이루어졌다. 사전·사후 평가 결과, 수업 관찰 및 활동 결과물, 심층 면담 결과 분석을 바탕으로 수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 교수학적 방안을 도출하였다.

가. 검사도구의 구성

2015 개정 교육과정에 따른 성취기준 및 수학 교과용 도서의 내용을 토대로, 최대공약수 관련 개념적 지식과 절차적 지식, 두 지식 간의 연결에 대한 이해를 확인하는 검사도구(사전, 사후 평가)를 개발하였다. 사전 검사도구는 수학적 모델링 수업 전에 학생들의 이해도 확인 및 모둠 구성을 위한 자료로 활용하였고, 사후 검사도구는 수업 후에 개인별 변화를 알아보고 심층 면담 대상자를 선정하기 위해 활용하였다. 비록 본 연구의 관심이 수학적 모델링 수업의 효과를 측정하는 데 있지는 않으나, 사후 평가를 통해 수업 실시 후 유의미한 변화를 파악함으로써 수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 방안에 관한 시사점을 도출할 수 있으리라 기대하였다. 사전, 사후 검사도구는 동형으로 구성하였으며 [표 3]과 같이 각각 4개 문항(하위 문항까지 총 7개 문항)으로 이루어진다. 약수, 공약수, 최대공약수의 개념적 지식과 절차적 지식의 형성 여부와 두 지식의 연결에 대한 이해 정도를 분석할 수 있는 문항으로 구성하였다. 문항 코드는 개념적 지식(Conceptual knowledge)은 C, 절차적 지식(Procedural knowledge)은 P를 사용하여 부여하였다. 이때 P는 다시 Pi, Pii, Piii 세 가지로 구분되는데, Pi는 최대공약수를 구하는 <방법 1>에 대한 절차적 지식이고, Pii는 <방법 2>, Piii <방법 3>에 대한 절차적 지식을 의미한다. 개념적 지식과 절차적 지식의 연결은 관계(Relation)를 다룬다는 점에서 R을 사용하여 Ri, Rii, Riii로 나타냈다. Ri은 최대공약수를 구하는 <방법 1>의 절차적 지식과 개념적 지식의 연결이고,

Rii는 <방법 2>와, Riii는 <방법 3>과 개념적 지식의 연결을 뜻한다.

[표 3] 사전, 사후 검사도구의 구성

문항	평가 내용	분석 내용	문항 코드
1	약수, 공약수, 최대공약수의 개념을 설명할 수 있는가?	개념적 지식	C
2-1	두 수의 약수와 공약수를 구해 최대공약수를 구할 수 있는가?	절차적 지식	Pi
2-2	2-1의 풀이 과정을 최대공약수 개념과 관련지어 설명할 수 있는가?	개념적 지식과 절차적 지식의 연결	Ri
3-1	두 수를 여러 수의 곱으로 나타내어 최대공약수를 구할 수 있는가?	절차적 지식	Pii
3-2	3-1의 풀이 과정을 최대공약수 개념과 관련지어 설명할 수 있는가?	개념적 지식과 절차적 지식의 연결	Rii
4-1	나눗셈틀로 두 수의 최대공약수를 구할 수 있는가?	절차적 지식	Piii
4-2	4-1의 풀이 과정을 최대공약수 개념과 관련지어 설명할 수 있는가?	개념적 지식과 절차적 지식의 연결	Riii

사전, 사후 평가 문항 초안에 대해 수학교육 전문가 4인의 검토를 받아 수정하였고 연구 대상이 아닌 5학년 학생 2명을 대상으로 어렵게 느껴지는 어휘나 문장에 대한 반응을 확인하여 수정함으로써 문항 완성도를 높였다. 또한 학업 성취도가 연구 대상과 비슷하다고 판단된 타 학교의 5학년 학생 17명에게 수업 적용 2주 전 예비 검사를 실시하여 일부 문항의 지시문을 학생들이 문제의 의도를 잘 이해할 수 있는 방향으로 수정함으로써 최종 검사 도구를 완성하였다. 또한, 3-1 문항에서 학생이 <방법 2>나 <방법 3> 중 원하는 방법으로 최대공약수를 구하게 하고, 4-1 문항을 3-1 문항에서 사용하지 않은 나머지 방법으로 구하게 함으로써 지나친 가이드 없이 학생 스스로 자신이 알고 있는 절차적 지식을 드러낼 수 있도록 의도하였다. 구체적인 사전 평가 문항별 내용은 [표 4]와 같다. [표 3]과 [표 4]에서 개념적 지식과 절차적 지식의 연결에 관한 평가 문항에 별도 음영처리 하였다.

[표 4] 사전 평가 문항(최종)

문항	문항 내용
1	1. 다음 수학 개념을 설명해 보시오. 1) 약수란? 2) 공약수란? 3) 최대공약수란?
2-1	어떤 두 수의 최대공약수를 구하는 방법에는 여러 가지가 있습니다. 1-3)에서 설명한 최대공약수의 개념을 적용하여 15와 10의 최대공약수를 구해보시오.
2-2	2-1의 풀이 과정을 최대공약수의 개념과 관련지어 설명해 보시오.
3-1	2에서 푼 방법과 다른 방법으로 28과 42의 최대공약수를 구해보시오.
3-2	3-1의 풀이 과정을 최대공약수 개념과 관련지어 설명해 보시오.
4-1	2, 3에서 푼 방법과 다른 방법으로 36과 54의 최대공약수를 구해보시오.
4-2	4-1의 풀이 과정을 최대공약수 개념과 관련지어 설명해 보시오.

나. 사전 평가 결과에 따른 연구 대상의 모둠 구성

사전 평가 후 학생들이 최대공약수에 대한 개념적 지식을 형성하고 있는지(C), 최대공약수를 구하는 절차적 지식을 형성하고 있는지(Pi, Pii, Piii), 개념적 지식과 절차적 지식을 연결할 수 있는지(Ri, Rii, Riii)를 분석하였다.

최대공약수의 개념을 설명하는 1번 문항에서 개념을 제대로 서술하여 개념적 지식이 형성되었다고 판단된 경우 C, 제대로 서술하지 않은 경우 c로 표기하였다. 2-1, 3-1, 4-1 문항에서 약수, 공약수를 구해 최대공약수를 구하는 <방법 1>, 여러 수의 곱으로 분해하여 최대공약수를 구하는 <방법 2>, 나눗셈틀을 활용하는 <방법 3>의 세 가지 방법을 모두 사용하여 문제를 전부 풀이한 경우 P3, 2가지 방법을 사용한 경우 P2, 1가지 방법만 사용한 경우 P1, 제대로 풀이한 문항이 없는 경우는 p로 나타내었다. 또한 최대공약수의 개념인 '공약수 중 가장 큰 수'를 적용하여 2-2, 3-2, 4-2 문항을 모두 서술한 경우 개념적 지식과 절차적 지식 간의 연결을 형성했다고 판단하여 R3, 2개 문항만 옳게 서술한 경우 R2, 1개 문항만 옳게 서술한 경우 R1, 세 문항 모두 서술하지 못하거나 수학적 오류를 보인 경우는 r로 표기하였다. 한편, 학생이 보인 풀이 과정 중 중학교에서 다루는 수학 개념인 '소인수분해'를 명시적으로 사용한 경우는 *로 별도 표기하였다. 학생들에게 사전 평가 문항을 제공한 다음 불분명하게 개념

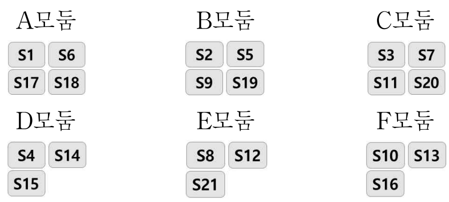
을 기술한 경우(예, <방법 3>에서 '두 수가 나누어떨어질 때까지 끝까지 나눈다.'라고 기술한 경우)에는 추가적으로 심층 면담을 통해서 학생들의 이해 양상을 면밀히 파악하고자 하였다. 연구 대상 21명의 사전 평가 결과는 [표 5]와 같다.

[표 5] 사전 평가 결과

학생	C	Pi	Ri	Pii	Rii	Piii	Riii	코드
S1	○	○	○	○	×	○	○	CP3R2
S2	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1*
S3	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S4	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S5	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S6	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S7	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S8	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S9	○	○	○	×	×	○	○	CP2R2
S10	○	○	○	○	×	×	×	CP2R1*
S11	○	○	○	×	×	○	×	CP2R1
S12	○	○	○	×	×	○	×	CP2R1
S13	○	○	○	×	×	○	×	CP2R1
S14	○	○	○	×	×	○	×	CP2R1
S15	○	○	○	×	×	○	×	CP2R1
S16	○	○	○	×	×	×	×	CP1R1
S17	○	○	×	×	×	×	×	CP1r
S18	×	×	×	×	×	○	×	cP1r
S19	×	×	×	×	×	×	×	cpr
S20	×	×	×	×	×	×	×	cpr
S21	×	×	×	×	×	×	×	cpr

사전 평가 결과, 80.95%의 학생이 최대공약수에 대한 개념적 지식(C)을 형성하고 <방법 1>에 대해 절차적 지식(Pi)을 형성하고 있었다. 또 76.19%의 학생이 <방법 1>에서 절차적 지식과 개념적 지식을 연결(Ri)할 수 있었다. 42.86%의 학생이 <방법 2>에서 절차적 지식(Pii)을 형성하고 있었고, <방법 2>에서 개념적 지식과 절차적 지식을 연결(Rii)하여 설명할 수 있는 학생은 없었다. 71.43%의 학생이 <방법 3>에 대해 절차적 지식(Piii)을 형성하고 있었고, 9.52%의 학생이 <방법 3>에서 절차적 지식과 개념적 지식을 연결(Riii)하여 설명했다. 이러한 결과를 통해 학생들이 최대공약수 관련 문제 해결에 필요한 절차적 지식은 어느 정도 갖추고 있으나 개념적 지식과 절차적 지식을 적절히 연결하는 데 어려움을 보인다는 선행연구(김희리, 김성준, 2020; 방정숙, 이유진, 2018) 결과를 재차 확인할 수 있었다.

사전 평가 결과를 토대로 학생들의 개념적 이해 수준을 개념적 지식과 절차적 지식이 모두 형성되지 않은 경우(수준 1), 개념적 지식이나 절차적 지식 중 한 가지만 형성된 경우(수준 2), 개념적 지식과 절차적 지식이 모두 형성되었으나 두 지식을 연결하지 못하는 경우(수준 3), 개념적 지식과 절차적 지식이 모두 형성되었고 두 지식을 연결하여 사고하는 경우(수준 4)의 네 가지로 범주화할 수 있었다. 이러한 결과를 토대로 상이한 수준의 모둠원 1명 이상을 포함하는 이질집단으로 모둠을 구성하여 서로 다른 수준의 학생들 간에 의미 있는 의사소통이 이루어질 것을 의도하였다. 이 때, 연구 대상 중 16명이 이해 정도나 세부 특성은 다르지만 모두 수준 4에 해당하는 것으로 나타났다. 이에 D모둠과 F모둠은 학급 상황을 고려하되, 동일 수준임에도 이질적인 특성이 있는 학생들을 같은 모둠으로 편성하여 절차적 지식과 개념적 지식의 연결에 초점을 맞추어 학생들 간 상호작용을 관찰하고자 하였다. 이에 따라 총 6개의 모둠으로 구성하였으며 그 결과는 [그림 2]와 같다.



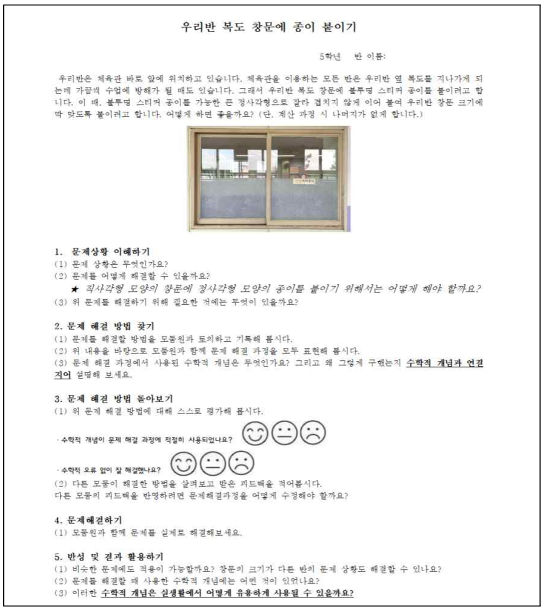
[그림 2] 수학적 모델링 수업을 위한 모둠 구성

다. 수학적 모델링 과제 구성

사전 평가 결과, 학생들은 대체로 최대공약수에 대한 개념적 지식, 절차적 지식은 형성하고 있으나 개념적 지식과 절차적 지식을 적절히 연결하지 못하는 것으로 나타났다. 수학적 모델링은 개념적 이해에 긍정적인 영향을 끼칠 뿐만 아니라 개념의 확장에도 효과적이다(Oswalt, 2012; Soheil & Naji, 2021). 성공적인 수학적 모델링 수업을 위해서는 개념의 확장뿐만 아니라 개념적 이해도 제대로 이루어져야 하므로(Zulkarnaen, 2018) 본 연구에서는 개념적 지식과 절차적 지식의 연결에 초점을 맞추어 수학적 모델링 수업을 설계하였다. 이를 위해 최대공약수 관련 개념적 지식과 절차적 지식을 의미 있게 연결할 수 있는 실생활 과제를 마련하고자 하였다. Maaβ(2007)에서 모델링 과제의 특징으로 제시한 개방성, 복잡성, 현실성, 진정성

을 고려하여 과제를 구성하였고, 개념적 지식, 절차적 지식, 개념적 지식과 절차적 지식의 연결을 활용할 수 있도록 하였다. 수학교육 전문가 4인의 논의를 거쳐 최종적으로 수업에 적용한 모델링 과제와 구체적인 활동지는 [그림 3]과 같다.

<과제> 우리반은 체육관 바로 앞에 위치하고 있습니다. 체육관을 이용하는 모든 반은 우리반 옆 복도를 지나가게 되는데 가끔씩 수업에 방해가 될 때도 있습니다. 그래서 우리반 복도 창문에 불투명 스티커 종이를 붙이려고 합니다. 이때, 불투명 스티커 종이를 가능한 큰 정사각형으로 잘라 겹치지 않게 이어 붙여 우리반 창문 크기에 딱 맞도록 붙이려고 합니다. 어떻게 하면 좋을까요?



우리반 복도 창문에 종이 붙이기

5학년 반 이름:

우리반은 체육관 바로 앞에 위치하고 있습니다. 체육관을 이용하는 모든 반은 우리반 옆 복도를 지나가게 되는데 가끔씩 수업에 방해가 될 때도 있습니다. 그래서 우리반 복도 창문에 불투명 스티커 종이를 붙이려고 합니다. 이 때, 불투명 스티커 종이를 가능한 큰 정사각형으로 잘라 겹치지 않게 이어 붙여 우리반 창문 크기에 딱 맞도록 붙이려고 합니다. 어떻게 하면 좋을까요? (단, 계산 과정 시 나머지가 없게 합니다.)

1. 문제상황 이해하기
(1) 문제 상황은 무엇인가요?
(2) 문제를 어떻게 해결할 수 있을까요?
★ *직사각형 모양의 창문에 정사각형 모양의 종이를 붙이기 위해서는 어떻게 해야 할까요?*
(3) 위 문제를 해결하기 위해 필요한 것에는 무엇이 있을까요?

2. 문제 해결 방법 찾기
(1) 문제를 해결할 방법을 모둠원과 토의하고 기록해 봅시다.
(2) 위 내용을 바탕으로 모둠원과 함께 문제 해결 과정을 모두 표현해 봅시다.
(3) 문제 해결 과정에서 사용된 수학적 개념은 무엇인가요? 그리고 왜 그렇게 구했는지 **수학적 개념과 연결지어** 설명해 보세요.

3. 문제 해결 방법 돌아보기
(1) 위 문제 해결 방법에 대해 스스로 평가해 봅시다.
· 수학적 개념이 문제 해결 과정에 적절히 사용되었나요?
· 수학적 오류 없이 잘 해결했나요?
(2) 다른 모둠이 해결한 방법을 살펴보고 받은 피드백을 적어봅시다.
다른 모둠의 피드백을 반영하려면 문제해결과정을 어떻게 수정해야 할까요?

4. 문제해결하기
(1) 모둠원과 함께 문제를 실제로 해결해보세요.

5. 반성 및 결과 활용하기
(1) 비슷한 문제에도 적용이 가능할까요? 창문의 크기가 다른 반의 문제 상황도 해결할 수 있나요?
(2) 문제를 해결할 때 사용한 수학적 개념에는 어떤 것이 있었나요?
(3) 이러한 **수학적 개념은 실생활에서 어떻게 유용하게 사용될 수 있을까요?**

[그림 3] 수학적 모델링 과제 및 활동지 축약본

라. 자료 수집 및 분석

본 연구에서 수집한 자료는 전체 수업 녹화 자료, 모둠별 녹음 자료, 심층 면담 녹음 자료, 학생 활동지 결과물, 교사의 수업 관찰 기록지, 사전 평가 및 사후 평가 결과이다. 수업 녹화는 2023년 5월 10일 2~3교시에 이루어졌으며, 클로바 노트를 활용하여 전체 수업 녹화 자료, 모둠별 녹음 자료, 심층 면담 녹음 자료를 전사하였다. 연구 과정 전반에 걸쳐 해당 자료를 수학적 모델링 과정 및 모델 구성의 측면, 개념적 지식과 절차적 지식의 형성 및 연결 측면, 교사와 학생의 상호작용 및 학생들의 변화 측면에서 다각도로 분석하였다. 또한 사전, 사후 평가 결과에 대해 분석 및 논의하여 학생별 결과를 코드화하였고, 수업 이후 실시한 심층 면담 결과를 분석하여 학생들의 구체적인 이해를 확인하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 수학적 모델링 수업의 설계

선행연구(Blum & Leiß, 2007; Rittle-Johnson & Alibali, 1999; Soheil & Naji, 2021)를 바탕으로 계획한 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 수학적 모델링 수업의 단계(초안)는 [표 6]과 같다. 단순히 현실 맥락

[표 6] 수학적 모델링 수업의 단계(초안)

수학적 모델링 사이클	개념-절차 수학적 모델링 수업의 단계	관련 원리
과제 이해	1. 개념적 지식이 밑바탕이 된 과제 이해	현실성의 원리
과제 단순화 및 구조화	2. 개념적 지식을 기반으로 한 실제 모델 형성	모델 구성의 원리 문서 구성의 원리
수학화	3. 수학적 모델 형성 및 표현	모델 구성의 원리 문서 구성의 원리
수학을 이용한 문제 해결	4. 모델 구성에 사용된 개념적 지식 파악 및 문제 해결 절차에 사용된 개념적 지식 파악 5. 모델에 대한 자기평가 6. 모둠 토의 및 상호작용 7. 모델 수정 8. 모델을 활용하여 문제 해결하기	자기평가의 원리 문서 구성의 원리
해석	9. 결과 일반화	일반화 가능성의 원리
정당화	10. 개념적 지식 재확인 및 실생활에서 개념의 유용성 확인	효율적 전형의 원리

의 과제를 절차적으로 해결하는 것을 넘어 수학적 모델링을 수행하는 과정에서 개념적 지식이 절차적 지식과 의미 있게 연결될 수 있도록 하였다. 이때 각 단계가 Lesh et al.(2000)에서 제시한 개념적 이해를 향상시키기 위한 모델 도출 활동의 6가지 원리와 어떻게 관련되는지도 함께 기술하였다.

구체적인 수업의 단계를 살펴보면, 먼저 1단계는 '개념적 지식이 밑바탕이 된 과제 이해'이다. 이때 활용되는 과제는 현실성의 원리를 기반으로 학생들이 현실 맥락 속에서 의미 있는 해석을 할 수 있는 성격의 것이어야 한다. 2단계는 '개념적 지식을 기반으로 한 실제 모델 형성'으로, 과제와 관련된 개념적 지식을 확인하고 실제 모델을 형성하는 과정이다. 모델 구성의 원리, 문서 구성의 원리에 따라 학생들이 다양한 표현 체계를 선택해 모델을 구성하고 이를 기록하게 한다. 3단계는 '수학적 모델 형성 및 표현'으로 모델 구성의 원리를 따르며 문서 구성의 원리에 기반하여 학생들이 실제 모델을 수학적 모델로 변환하는 수학화 과정을 기록할 수 있도록 한다. 4단계는 '모델 구성에 사용된 개념적 지식 파악 및 문제 해결 절차에 사용된 개념적 지식 파악', 5단계는 '모델에 대한 자기평가', 6단계는 '모둠 토의 및 상호작용'이며 이러한 과정을 거쳐 7단계에서 '모델 수정'이 이루어진다. 8단계에서는 '모델을 활용하여 문제 해결하기'가 이루어지며, 4~8단계에 걸쳐 자기평가의 원리와 문서 구성의 원리가 적용된다. 9단계는 '결과 일반화'로, 일반화 가능성의 원리를 기반으로 모델을 통해 도출한 결과를 다른 상황에 적용해 보게 된다. 마지막 10단계는 '개념적 지식 재확인 및 실생활에서 개념의 유용성 확인'으로, 결과를 실생활 상황에 되돌리면서 개념적 지식을 재확인하고 실생활에서 해당 개념이 갖는 유용성을 깨닫게 된다. 이때 효율적 전형의 원리를 기반으로 자신의 문제 해결이 구조적으로 비슷한 다른 상황에 전이가 가능한지 다시 한 번 반성하게 된다. 단계에 따라 구체화한 수학적 모델링 수업의 각 활동명과 활동 내용은 [표 7]과 같다.

[표 7] 수업의 단계에 따라 구체화한 수학적 모델링 활동 내용

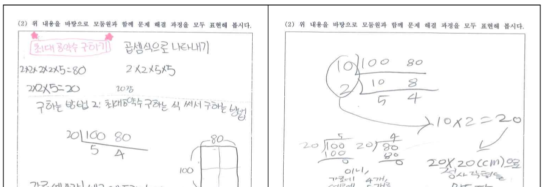
수업의 단계	수업 활동명	수학적 모델링 수업 활동 내용
1. 개념적 지식이 밑바탕이 된 과제 이해	1. 문제 상황 이해하기	▣ 문제 상황 제시하기 - 우리반 창문이 투명해서 다른 반 친구들이 쳐다보게 되는 불편한 상황 이야기 나누기 ▣ 학습문제 알아보기 - 우리반 복도 창문에 스티커 종이 붙이기 문제를 해결하는 학습문제 알아보기
2. 개념적 지식을 기반으로 한 실제 모델 형성 3. 수학적 모델 형성 및 표현 4. 모델 구성에 사용된 개념적 지식 파악 및 문제 해결 절차에 사용된 개념적 지식 파악 5. 모델에 대한 자기평가 6. 모둠 토의 및 상호작용 7. 모델 수정	2. 문제 해결 방법 찾기 3. 문제 해결 방법 돌아보기	▣ 문제 상황 이해하기 - 필요한 정보 알아보기(창문의 가로, 세로, 종이의 가로, 세로) - 필요한 수학적 개념 알아보기(약수, 공약수, 최대공약수, 곱셈 등) ▣ 문제 해결 방법 찾기 - 문제 해결 방법을 기록하고 모델에 사용된 수학적 개념은 무엇인지 질문하기 ▣ 모둠 내 문제 해결 방법 상호평가하기 - 모둠원들과 문제 해결 방법을 공유하면서 피드백 주고받기 ▣ 문제 해결 방법 자기평가하기 - 모둠원들의 피드백을 토대로 자신의 문제 해결 방법 평가하고 수정하기 ▣ 모둠 간 문제 해결 방법 상호평가하기 - 다른 모둠과 문제 해결 방법을 공유하면서 장단점 비교하기
8. 모델을 활용하여 문제 해결하기	4. 문제 해결하기	▣ 실제로 해보기 - 종이를 잘라서 창문에 붙여 보기 - 실제로 창문이 투명해서 불편했던 문제가 해결되었는지 이야기 나누기
9. 결과 일반화 10. 개념적 지식 재확인 및 실생활에서 개념의 유용성 확인	5. 반성 및 결과 활용하기	▣ 비슷한 새로운 문제에 적용 가능한지 알아보기 - 창문 크기가 다른 반에 적용해보기 ▣ 문제 해결에 사용된 수학적 개념 알아보기 - 약수, 공약수, 최대공약수, 곱셈 등 문제 해결에 사용된 수학적 개념 정리해보기 ▣ 사용한 수학적 개념의 실생활에서의 활용 방법 알아보기 - 약수, 공약수, 최대공약수 등의 수학적 개념이 우리 생활에서 활용되는 방법 이야기 나누기

2. 수학적 모델링 수업을 통한 학생의 개념적 지식과 절차적 지식의 변화 및 연결 분석

가. 수학적 모델링 수업 분석 결과

본 연구의 수학적 모델링 수업의 활동 과정 중에서 학생들의 수학적 지식에 대한 사고가 가시화되고 개념적 지식과 절차적 지식의 형성 및 연결과 밀접하게 관련되는 '문제 해결 방법 찾기', '문제 해결 방법 돌아보기', '문제 해결하기'에 대한 구체적인 수업 분석 결과를 정리하면 다음과 같다.

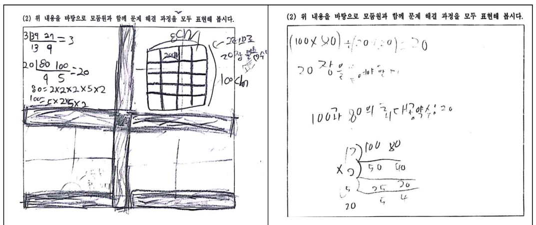
먼저 '문제 해결 방법 찾기'에서 학생들은 모둠 내 협력학습과 교사의 적절한 발문 등을 통해 공약수 중 가장 큰 수가 최대공약수라는 개념적 지식을 형성하고 이를 절차적 지식과 연결하여 그림과 식의 수학적 모델로 표현하였다. 학생 활동지를 분석한 결과, 모든 모둠이 곱셈식을 사용하는 <방법 2>와 나눗셈틀을 사용하는 <방법 3>을 주 방법으로 활용해서 문제를 해결했으며 학생들이 모델을 사용한 예는 [그림 4]와 같다. 그러나 공약수를 나열하고 그 중 최대인 것을 찾는 <방법 1>을 주 방법으로 활용한 모둠은 없었다. 이는 학생들이 최대공약수 관련 현실 맥락 문제를 해결할 때 <방법 1>을 활용하여 문제를 해결하는 것을 선호하지 않거나 이러한 방법이 보편적이지 않음을 추측하게 한다.



<방법 2> 곱셈식 사용 <방법 3> 나눗셈틀 사용

[그림 4] 학생들이 사용한 모델 사례

사전 평가 시 개념적 지식과 절차적 지식이 형성되지 못했던 학생들은 모둠 내 수학적 의사소통 과정을 통해 모델에 사용된 개념적 지식과 절차적 지식을 이해하면서 두 지식을 형성해 나아갔다. 일례로, 사전 평가 시 최대공약수에 대한 개념적 지식과 절차적 지식을 형성하지 못했던 S21(cpr)은 다른 수준의 학생들과의 상호작용을 통해 개념적 지식과 <방법 3>에 대한 절차적 지식을 형성한 것으로 관찰되었다. 개념적 지식과 절차적 지식이 어느 정도 형성되어 있으나 두 지식을 잘 연결하지 못했던 S13(CP2R1)은 주어진 모델링 과제를 해결하기 위해 최대공약수 개념을 떠올리면서 두 지식 간 연결을 적극적으로 시도하는 모습을 보였다. 구체적으로, 먼저 최대공약수 개념을 이용하여 답으로 20을 구한 뒤 100과 80을 나누어떨어지지 않을 때까지 나누어야 답이 도출된다는 사실을 역으로 확인하는 모습을 보였다([그림 5] 참고).



S21 S13

[그림 5] 지식의 형성 및 연결 변화 사례

이때, 이와 같은 수업의 과정에서 교사가 모둠 상황이나 개별 학생에 적합한 발문을 통해 적절히 개입하는 것이 학생들의 수학적 지식 형성 및 지식 간 연결에 도움을 주는 것으로 나타났다. 개념적 지식을 적절하게 설정한 모둠에게는 그 개념이 사용되는 이유를 생각해 볼 수 있도록 발문하여 개념적 지식과 절차적 지식을 연결할 수 있도록 하였고, 문제 해결을 위한 개념적 지식을 옳게 파악하지 못한 모둠에게는 관련 개념적 지식을 유도하는 발문으로 지원하였다. 예를 들어, [표 8]은 수업 중 교사와 학생들 간 상호작용의 일부를 발췌한 것이다. 교사는 ㉠과 같이 "어떤 의미일까?"라는 발문을 통해 문제에 필요한 개념적 지식을 유도하였다. 이때 개념적 지식을 제대로 형성하고 있는 S1(CP3R2)이 ㉡에서 볼 수 있듯이 '최대공약수'라고 답함으로써 모둠의 이후 문제 해결에 긍정적인 도움을 제공하였다. 다만, 이러한 과정에서 교사가 다른 학생들에게도 관련한 개념적 지식을 생각해보고 절차적 지식과 연결할 수 있는 기회를 제공하기 위해서 "왜 그 개념을 사용했나요?", "사용한 개념의 의미가 문제와 연결되나요?"와 같이 개념에 대한 의미를 묻는 발문을 추가 제시할 필요가 파악되었다. 이와 같은 수업 관련 보완 사항을 반영하여 최종적으로 개념적 지

식과 절차적 지식을 연결하는 수학적 모델링 수업 단계에 [표 14]와 같이 '2-3. 해당 개념과 절차를 찾은 이유 설명하기', '4-1. 모델을 만드는 데 사용된 개념적 지식 설명하기', '4-2. 모델을 만드는 데 사용된 절차적 지식 설명하기'의 세부 단계를 추가하였다.

[표 8] 수업 중 교사-학생들 간 문답 사례(1)

T: 그럼 이만큼 들어갈 수 있겠지. <u>종이 한 변은 20cm인데 종이는 총 몇 장이 필요할까요?</u>
S1: 20장이요.
T: 20장. 여기는 <u>창문의 가로, 세로의 길이야. ㉠어떤 의미일까?</u>
S1: <u>딱 맞춰서 20개를 해야 한다는 뜻이에요. ㉡최대공약수.</u>
T: <u>80과 100을 나눌 수 있는 수 중에 가장 큰 수, 최대공약수지. 최대공약수로 나누면 이게 뭐야?</u>
S6: <u>아, 이게 가로, 세로.</u>
S17: 가로의 개수, 세로의 개수.
S18: 길이. 길이 아니에요?
S17: 얘가 길이야. 정사각형이잖아.
T: <u>20은 80과 100을? 공통으로 나눌 수 있는 최대공약수이지? 곱셈식으로도 구해볼까?</u>
S6: 그러면.. 80은 4×2×2×5니까.. 100은 10×10이니까 2×5×2×5. (하략)

한편, 본 연구에서 수학적 모델링 과제를 제시했을 때, 처음에 학생들은 문제 상황에 맞게 최대공약수 개념을 떠올리지 않은 채 기계적으로 창문의 가로와 세로에 대한 최대공약수와 주어진 스티커 종이의 가로와 세로에 대한 최대공약수를 둘 다 구하는 모습을 보였다. [표 9]는 학생들이 교사의 조력으로 문제 상황을 이해하고 수학적 모델로 표현하며 문제 해결 방법을 찾는 과정에서 교사와 학생들 간 대화를 발췌한 것이다. 모델링 과제에서 필요한 최대공약수는 창문의 가로 80cm와 세로 100cm의 최대공약수인 20cm이다. 학생들이 스티커 종이 길이의 최대공약수인 3까지 구한 것으로 보아 일부 학생들은 문제 상황에 대한 충분한 개념적 이해 없이 단순히 절차적으로 문제 해결을 시도한 것을 짐작할 수 있다([표 9]의 ㉠, ㉡ 참고). 이 과정에서 교사는 ㉢, ㉣과 같이 학생들에게 문제 상황과 그에 관한 개념적 지식에 대해 질문하였다. 또 학생들이 표현한 수학적 모델에 대해 그 이유를 물음으로써 개념적 지식과 절차적 지식을 활용한 문제 해결 과정을 스스로 반성해보는 기회를 제공하였다. 즉 학생들이 개념적 지식과 절차적 지식을 의미 있게 연결하도록 지원한 것이다. 수업 적용을 통해 파악된 이러한 보완 사항을 반영하여 최종적으로 수업 단계([표 14])에 앞서 추가한 2-3, 4-1, 4-2 이외에 '2-1. 문제를 해결하기 위한 개념적 지식 찾기', '2-2. 문제를 해결하기 위한 절차적 지식 찾기', '4-3. 모델을 만드는 데 사용된 절차를 개념적 지식으로 설명하기'를 세부 단계로 추가하였다.

또한 문제 해결 방법을 찾는 과정 중 개념적 지식과 절차적 지식의 오류를 발견하고 교정할 수 있게 하는 수업 단계의 필요성을 확인하였다. 이에 수업 5단계에 '모델에 사용된 개념적 지식과 절차적 지식에 대한 평가하기'를 세부 단계로 포함하고자 하였다. 이는 모둠 내 상호작용을 통해 개념적 지식, 절차적 지식의 관점에서 학생들이 표현한 수학적 모델을 평가해 보도록 의도한 것이다.

[표 9] 수업 중 교사-학생들 간 문답 사례(2)

T: 어떤 길이의 최대공약수를 구해야 하는지 생각해 보세요. 여러분, 구했나요?
S2: 최대공약수를 구했어요.
T: <u>어떤 두 수를 공통으로 나누어떨어지게 하는 가장 큰 수를 말하는 거잖아. S2도 최대공약수 구했을까요?</u>
S2: <u>㉠3하고 20이요.</u>
T: <u>S5는 최대공약수가 얼마라고 나왔을까요?</u>
S5: <u>㉡3이랑 20이요.</u>
T: <u>㉢우리는 창문의 가로와 세로의 최대공약수만 구하면 되는 것 같은데, 이건 왜 구했을까요?</u>
S2: 가장 큰 정사각형이니까. 이건 왜 구했냐 진짜.
T: <u>㉣우리가 해결할 거는 복도 창문에 종이를 붙이는 문제이지. 필요한 건 뭘까요? 최대공약수라는 아이디어를 얘기해줬는데, 무엇의 최대공약수를 구해야 하지요?</u>
S5: <u>복도 창문의 가로 길이와 세로 길이에 대한 최대공약수요.</u>
T: 종이의 가로와 세로에 대한 최대공약수는 필요할까요?
S5: 안 필요해요.

‘문제 해결 방법 돌아보기’에서는 개념적 지식과 절차적 지식에 대한 자기평가를 통해 모델을 수정하였다. 이때, 모둠 내 상호작용을 통해 학생들은 절차적 지식의 오류에 관심을 가지고 적절한 상호 피드백을 주고받는 모습을 보였다. 그러나 개념적 지식에 대해서는 충분한 상호작용과 피드백이 관찰되지 않았다. 이에, 수업 단계에서 [표 14]와 같이 5단계를 ‘5-1. 모델에 사용된 개념적 지식에 대한 평가하기’, ‘5-2. 모델에 사용된 절차적 지식에 대한 평가하기’로 세분화함으로써 개념적 지식과 절차적 지식에 대한 자기평가가 각각 의미 있게 이루어지도록 할 필요를 파악하였다. 이는 만약 두 지식을 구분하지 않고 자기평가를 하게 할 경우, 학생들이 계산 과정 등 절차적 지식에 대한 평가에만 초점을 맞출 우려가 있기 때문이다.

이후 모둠 간 의사소통을 통해 다른 모둠의 문제 해결 방법을 살펴보는 기회를 제공하였다. 이를 통해 학생들은 최대공약수에 대한 개념적 지식과 절차적 지식, 두 지식 간의 연결을 재차 상기하는 의미 있는 경험을 할 수 있었다. 이에 수업 6단계에 [표 14]와 같이 ‘6-1. 개념적 지식과 절차적 지식을 활용하여 다른 모둠의 해결 방법과 비교하기’, ‘6-2. 다른 모둠의 피드백을 반영하여 모델 수정하기’를 세부 단계로 추가하였다. 이는 모둠 내 자기평가뿐만 아니라 다른 모둠과의 상호작용으로 학생들이 문제 해결 방법을 비교하고 수학적 모델을 평가해 보도록 의도한 것이다.

‘문제 해결하기’에서는 도출한 수학적 결과를 토대로 실제 종이를 잘라 창문에 붙여서 실질적으로 문제를 해결하는 활동을 하였다([그림 6]). 이를 통해 수학적 결과를 실제 상황에서 검증할 뿐만 아니라 실생활과 수학을 연결할 수 있다는 것을 실천적으로 깨닫게 되었다.

[그림 6] 실제로 해보기 활동 사례

한편, 앞서 ‘문제 해결 방법 돌아보기’에서 모델 수정 과정을 충분히 거쳤기 때문에 문제 해결은 무리 없이 이루어졌지만, 일부 학생들은 해결 과정 전반에서 개념적 지식과 절차적 지식을 의미 있게 연결하지 못한 것으로 관찰되었다. 따라서 수업 단계 중 ‘문제 해결하기’ 다음에 ‘문제 해결에서의 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 확인’ 단계를 추가하여 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하여 해결 방법을 설명하면서 정리하고, 두 지식 간 연결을 확인하는 기회를 제공할 필요를 확인하였다. 이후, 실생활에서 모델의 활용 가능성을 확인하고 비슷한 새로운 문제에 적용해보는 단계를 추가함으로써 본 수학적 모델링 수업 결과를 적용 및 일반화할 수 있도록 하였다.

나. 사후 평가 결과

수학적 모델링 수업 후 구체적인 학생별 지식의 변화 양상을 확인하기 위해 실시한 사후 평가의 분석 결과는 [표 10]과 같다. 전체 학생 중 61.9%가 최대공약수에 대한 개념적 지식 또는 절차적 지식을 형성하거나 개념적 지식과 절차적 지식의 연결을 이해하는 긍정적인 변화를 보였다(표에 음영 표시하였음). 이 학생들 중 76.92%가 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 측면에서 향상되었다(r→R2, R1→R2, R1→R3, R2→R3 중 한 가지에 해당). 또한 최종적으로 90.48%의 학생이 최대공약수 관련 개념적 지식(C)을 형성한 것으로 나타났고, <방법 1>에 대해서는 85.71%의 학생이 절차적 지식을 형성하였으며(Pi) 76.19%의 학생이 절차적 지식과 개념적 지식을 연결할 수 있었다(Ri). 변화는 <방법 2>와 <방법 3>에서 주로 확인되었는데, 71.43%의 학생이 <방법 2>에서 절차적 지식을 형성하고 있었고(Pii), 19.05%의 학생이 <방법 2>에서 개념적 지식과 절차적 지식을 연결할 수 있게 되었다(Rii). 95.24%의 학생이 <방법 3>에 대해 절차적 지식을 형성한 것으로 나타났고(Piii), 52.38%의 학생이 <방법 3>에서 절차적 지식과 개념적 지식을 연결하여 설명하였다(Riii).

대표적으로 S2의 경우 CP3R1에서 CP3R3로 변화했는데, 이 학생은 사전 평가 시 <방법 3>에서 소인수분해의 용어를 언급했지만 제대로 소인수분해의 개념을 이해하지 못한 채 그 절차를 기계적으로 수행하여 문제를 해결하는 모습을 보였었다. 수업 이후 사후 평가 결과, 최대공약수의 개념을 사용하여 <방법 2>, <방법 3> 모두에서 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하여

설명하였다.

[표 10] 사후 평가 결과

학생	사전 결과	C	Pi	Ri	Pii	Rii	Piii	Riii	코드
S1	CP3R2	○	○	○	○	×	○	○	CP3R2
S2	CP3R1	○	○	○	○	○	○	○	CP3R3
S3	CP3R1	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S4	CP3R1	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S5	CP3R1	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S6	CP3R1	○	○	○	○	×	○	×	CP3R1
S7	CP3R1	○	○	○	○	○	○	×	CP3R2
S8	CP3R1	○	○	×	○	×	○	○	CP3R1
S9	CP2R2	○	○	○	○	○	○	○	CP3R3
S10	CP2R1	○	○	○	○	×	○	○	CP3R2
S11	CP2R1	○	○	○	×	×	○	○	CP2R2
S12	CP2R1	○	○	○	×	×	○	○	CP2R2
S13	CP2R1	○	○	○	○	○	○	○	CP3R3
S14	CP2R1	○	○	○	×	×	○	○	CP2R2
S15	CP2R1	○	○	○	○	×	○	○	CP3R2
S16	CP1R1	○	○	○	×	×	○	○	CP2R2
S17	CP1r	○	×	×	×	×	○	×	CP1r
S18	cP1r	×	○	○	○	×	○	○	cP3R2
S19	cpr	×	×	×	×	×	×	×	cpr
S20	cpr	○	○	×	○	×	○	×	CP3r
S21	cpr	○	×	×	×	×	○	×	CP1r

* 사전, 사후 평가 결과를 용이하게 비교할 수 있도록 표의 둘째 열에 사전 평가 시 학생별 코드를 기재하였음.

S9은 CP2R2에서 CP3R3로 변화하였다. 수업 전에는 최대공약수를 구하는 <방법 2>의 절차적 지식을 형성하지 못했고 그에 따라 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하지 못했는데, 사후 평가에서는 <방법 2>의 절차적 지식을 활용하여 문제를 해결하고 그 절차적 지식을 개념적 지식과 연결하여 정확하게 설명하였다.

한편 S18의 경우 cP1r에서 cP3R2로 변화하였다. 본 수업 전에는 최대공약수에 대한 개념적 지식이 형성되지 않았고 <방법 3>에 대한 절차적 지식만으로 문제를 해결했었다. 그러나 수학적 모델링 수업 이후 사후 평가에서는 <방법 1>과 <방법 2>의 절차적 지식도 형성하고, Ri과 Riii에 해당하는 연결이 형성된 것으로 나타났다. 그러나 여전히 최대공약수의 개념적 지식은 명확히 형성되지 않은 것으로 파악되었고 Rii의 연결도 미흡하였다. 이러한 사례를 통해 수학적 모델링 수업 단계 중 '2-3. 해당 개념과 절차를 찾은 이유 설명하기', '4-3. 모델을 만드는 데 사용된 절차를 개념적 지식으로 설명하기', '8-2. 문제 해결에서 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 확인하기'를 추가해야 할 필요를 재차 파악할 수 있었다.

S16은 사전 평가 결과 CP1R1으로 최대공약수에 대한 개념적 지식과 <방법 1>에 대한 지식만 형성하고 있었다. 사후 평가 결과, 수학적 모델링 수업 이후 <방법 3>에 대한 절차적 지식과 그에 따른 Riii 연결이 형성된 것으로 나타났다. 그러나 여전히 <방법 2>에 대해서는 절차적 지식의 형성, 개념적 지식과 절차적 지식의 연결이 이루어지지 못했다. S16이 속한 모둠에서 <방법 3>에 대해 다루었다는 점을 고려할 때, 자신의 모둠에서 사용한 방법에 대해서만 절차적 지식을 형성하고 개념적 지식과의 연결이 이루어진 것으로 추측된다. 이를 통해 수업 단계 중 모둠원 간 결과를 발표하고 공유하는 것과 더불어 '7-2. 다른 모둠의 해결 방법으로 문제 해결하기'를 세부 단계로 추가함으로써 수학적 모델링 수업 시 여러 절차적 지식과 지식 간 연결을 깊이 있게 이해할 수 있도록 지원하는 방안을 제안하였다.

다. 심층 면담 결과

수업 종료 후 심층 면담을 진행하였고, 이 절에서는 긍정적인 변화를 보인 대표적 학생 사례를 정리하였다. [표 11]은 CP3R1에서 CP3R3로 변화한 S2 면담 내용 중 일부이다. 교사는 개념적 지식과 절차적 지식의 연결에 초점을 두어 질문하였고, S2는 최대공약수의 개념을 사용하여 해결 방법을 설명하였다. 또한 S2는 본 연구의 수업이 일상생활 속의 문제를 해결하는 데 도움이 될 것 같다고 답함으로써 수학적 모델링 활동을 긍정적으로 인식하는 것으로 관찰되었다.

[표 11] S2: 심층 면담 사례

T:	식을 세워서 문제를 해결할 때 최대공약수의 의미를 어떻게 이용했어요?
S2:	최대공약수가 공약수 중 가장 큰 수니까.. 80하고 100이었잖아요. 거기에서 최대공약수 20으로 하면 구할 수 있잖아요.
T:	아, 80과 100을 공통으로 나눌 수 있는 수 중에서 제일 큰 수를 최대공약수로 활용한 거예요? 혹시 그럼 이 수학 수업이 어떤 점에서 도움이 될까요?
S2:	일상생활 속에서 갑자기 튀어나온 문제를 해결하는 데 도움이 될 것 같아요.

[표 12]는 cP1r에서 cP3R2로 변화한 S18의 면담 내용 중 일부이다. 모둠 친구들과 이야기하는 과정에서 최대공약수를 구하는 방법에 대해서 알게 되었다고 응답했으며, 여전히 개념적 지식이 제대로 형성되지는 못했으나 최대공약수를 구하는 절차적 지식 세 가지를 모두 알게 된 것에 대해 '구체적'이라는 용어를 사용해 답한 점이 특징적이었다.

[표 12] S18: 심층 면담 사례

T: S18아, 지난번보다 훨씬 잘했어요. 이번 수업을 하고 나서 어떤 점을 알게 됐고 어떤 점이 도움이 됐나요?
S18: 그거 최대공약수를 구하는 방법이 뭐 있는지 알았어요. 최대공약수에 대해서 구체적으로 알았어요.
T: 어떻게 더 잘 알게 됐어요?
S18: 같이 친구들과 이야기하면서 하니까 됐어요.

[표 13]은 CP2R2에서 CP3R3로 변화한 S9의 면담 내용 중 일부이다. 최대공약수를 구하는 방법에서 더 이상 나눌 수 없을 때까지 나누는 이유를 최대공약수의 의미와 연결 지어 설명하여 절차적 지식과 개념적 지식의 연결을 형성한 것으로 확인되었다.

[표 13] S9: 심층 면담 사례

T: 문제를 풀 때 최대공약수의 의미를 어떻게 사용했나요?
S9: 최대공약수는 공약수 중 가장 큰 수인데, 두 수를 나눌 수 있는 거를 구한 다음에... 더 나눌 수가 없잖아요. 여기가 가장 클 때니까.

3. 수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 방안

사전 및 사후 평가 결과, 수업 관찰 및 활동지 분석 결과, 심층 면담 결과 등을 토대로 수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 수업 단계의 수정안을 [표 14]와 같이 도출하였다. 총 9단계이며 세부 단계는 1-1부터 9-2로 구성된다. 수업 단계 중 개념적 지식과 절차적 지식의 형성 및 연결에 직결하는 단계에는 음영 표시하였다.

1단계는 실생활 문제를 해결하기 위한 방법을 모색하며 과제를 이해하는 단계이다. 교사는 현실성의 원리에 따라 학생들이 충분히 실생활에서 경험할 수 있으면서도 개념적 지식과 절차적 지식을 연결할 필요성을 느낄 수 있는 모델링 과제를 마련하여 제공해야 한다. 2단계는 '문제의 개념적 지식과 절차적 지식 확인' 단계로 문제를 해결하기 위한 개념적 지식과 절차적 지식을 찾고 해당 개념과 절차를 찾은 이유를 설명하는 단계이다. 이때 학생들에게 이유를 충분히 설명할 기회를 제공해야 하며, 개념이나 절차를 제대로 찾지 못한 학생이나 모둠에게는 추가 발문을 통해 개념과 절차를 찾을 수 있도록 지원할 수 있다. 수업 단계 초안에는 없었던 2단계가 추가된 이유는 앞 절에서 언급했듯이 개념적 지식이나 절차적 지식 형성의 개인차를 고려하고 자신이 찾은 개념이나 절차에 대한 반성의 기회를 가지도록 하기 위함이다. 3단계는 '수학적 모델 형성 및 표현' 단계이다. 개념적 지식과 절차적 지식을 활용하여 모둠별로 다양하게 수학적 모델을 형성하고 기록하게 된다. 4단계는 '모델에 사용된 개념적 지식과 절차적 지식 설명' 단계이다. 이는 모델을 만드는 데 사용된 개념적 지식과 절차적 지식에 대해 간략히 설명하고, 나아가 두 지식을 연결하여 설명해보게 하는 단계이다. 수정안에서는 개념적 지식과 절차적 지식을 분리하여 세부 단계를 구성했으며 4-3에 '모델을 만드는 데 사용된 절차를 개념적 지식으로 설명하기'를 추가함으로써 모델을 정교화하고 문제에 내재된 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하여 생각할 수 있도록 의도하였다. 5단계는 '개념적 지식과 절차적 지식에 대한 자기평가' 단계이다. 자기평가의 원리에 따라 모델에 사용된 개념적 지식과 절차적 지식에 대한 평가가 각각 이루어진다. 모델, 개념적 지식, 절차적 지식의 측면에서 문제를 해결하면서 발생한 수학적 오류는 없는지 반성하는 과정을 거치게 된다. 6단계는 '모델 수정' 단계로 다른 모둠의 해결 방법과 비교해보고 피드백을 받아 자신의 모둠이 만든 모델을 수정하게 된다. 이때 6-1에 나타나 있듯이 개념적 지식과 절차적 지식을 활용하여 다른 모둠의 해결 방법과 비교하게 되는데, 이는 비교 기준을 제시함으로써 학생들이 활용하는 지식을 명확히 하고 비교 결과에 대한 정당성을 확보할 수 있게 의도한 것이다. 7단계는 '모델을 활용한 문제 해결' 단계이다. 이는 모델을 활용하여 실제 문제를 해결해보는 단계로, 수업 단계 초안과 달리 다른 모둠의 해결 방법으로도 문제를 해결해보도록 하여 여러 절차적 지식 및 그에 따른 연결 형성이 가능하도록 하였다.

[표 14] 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 수학적 모델링 수업 단계(수정안)

1. 실생활 과제 이해
- 1-1 실생활 문제를 해결하기 위한 방법 찾기

2. 문제의 개념적 지식과 절차적 지식 확인
- 2-1. 문제를 해결하기 위한 개념적 지식 찾기
- 2-2. 문제를 해결하기 위한 절차적 지식 찾기
- 2-3. 해당 개념과 절차를 찾은 이유 설명하기

3. 수학적 모델 형성 및 표현
- 3-1. 개념적 지식과 절차적 지식 활용하여 수학적 모델 형성하기
- 3-2. 다양한 방법으로 수학적 모델 표현하기

4. 모델에 사용된 개념적 지식과 절차적 지식 설명
- 4-1. 모델을 만드는 데 사용된 개념적 지식 설명하기
- 4-2. 모델을 만드는 데 사용된 절차적 지식 설명하기
- 4-3. 모델을 만드는 데 사용된 절차를 개념적 지식으로 설명하기(모둠 내)

5. 개념적 지식과 절차적 지식에 대한 자기평가
- 5-1. 모델에 사용된 개념적 지식에 대한 평가하기
- 5-2. 모델에 사용된 절차적 지식에 대한 평가하기

6. 모델 수정
- 6-1. 개념적 지식과 절차적 지식을 활용하여 다른 모둠의 해결 방법과 비교하기
- 6-2. 다른 모둠의 피드백을 반영하여 모델 수정하기

7. 모델을 활용한 문제 해결
- 7-1. 모델을 활용하여 실제로 문제 해결하기
- 7-2. 다른 모둠의 해결 방법으로 문제 해결하기

8. 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 확인
- 8-1. 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하여 해결 방법 설명하기(모둠 간)
- 8-2. 문제 해결에서의 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 확인하기

9. 적용 및 일반화
- 9-1. 실생활에서 모델의 활용 가능성 확인하기
- 9-2. 비슷한 새로운 문제에 적용해보기

학생들이 자신이 기존에 알고 있던 절차적 지식만을 활용하여 문제를 해결할 경우 다른 절차적 지식에 대해 경험하지 못하므로 새로운 지식 형성에 어려움을 겪게 된다. 따라서, 자신의 모둠에서 활용하지 않은 방법을 통해 지식 형성 및 사고 확장의 기회를 제공하고자 하였다. 8단계는 '개념적 지식과 절차적 지식의 연결 확인' 단계이다. 학생들이 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하여 해결 방법을 설명하고, 이를 통해 교사는 학생들이 두 지식을 연결하여 사고할 수 있는지를 관찰하고 판단하는 기회를 가질 수 있다. 이때의 해결 방법 설명은 모둠 간, 즉 전체 학습으로 이루어진다는 점에서 4-3의 모둠 내 설명하기와 차이가 있다. 9단계는 '적용 및 일반화' 단계이다. 실생활에서 모델의 활용 가능성을 확인하고, 모델을 비슷한 새로운 문제에 적용함으로써 일반화하여 사용할 수 있도록 한다. 수업 단계 초안에서는 결과의 일반화 이후에 개념적 지식의 재확인과 유용성 확인이 이루어졌지만, 본 연구의 수업 적용 결과, 개념적 지식과 절차적 지식의 연결 확인이 이루어진 후 모델의 활용 가능성을 확인하고 결과를 일반화할 수 있는지에 대해 토의 및 새로운 문제에 적용해보는 것이 적절하다고 판단되었다.

Ⅴ. 결론

다수의 초등학생들이 수학적 개념(예, 최대공약수) 관련 문제를 해결할 때 개념에 대한 충분한 이해 없이 기계적으로 절차를 수행하는 양상을 보인다(김희리, 김성준, 2020; 방정숙, 이유진, 2018). 본 연구에서는 수학적 모델링이 수학과 실생활의 연결뿐만 아니라 학생들의 개념적 이해를 돕는 전략으로 활용될 수 있다는 선행연구(Soheil & Naji, 2021 등) 결과를 토대로 수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식을 연결할 수 있도록 수업을 설계하여 실제 학교 현장에 적용하고 구체적인 구현 방안을 탐색하였다. 연구 결과로부터 도출한 결론은 다음과 같다.

첫째, 다수의 학생들은 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하여 사고하는 데 어려움을 보이며, 따라서 수학 교과서 및 수업 시 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 경험을 의미 있게 제공할 필요가 있다. 현행 2015 개정 교육과정에 따른 초등학교 5학년 수학 교과서를 분석한 결과, 국정 교과서와 검정 교과서 3종을 제외한 교과서에서는 최대공약수에 대한 개념적 지식과 절차적 지식의 연결을 명시적으로 다루지 않고 있었다. 최대공약수의 개념적 지식과 최대공약수를 구하는 절차적 지식에 대해 분절적으로만 학습하고 두 지

식 간 연결을 다루지 않는 것은 학생들이 관계를 기반으로 최대공약수에 대해 깊이 있는 개념적 이해를 하는 데 부정적인 영향을 미칠 가능성이 크다. 따라서 교과서뿐만 아니라 실제 수학 수업 장면에서 개념적 지식과 절차적 지식을 연결할 수 있는 기회를 충분히 제공하는 것이 필요하며, 본 연구에서 제안한 수학적 모델링 수업([표 14])이 그 방안 중 하나가 될 수 있을 것이다.

둘째, 수학적 모델링 수업에서 수학적 모델의 사용이 학생들의 개념적 이해를 확고히 하는 데 도움이 된 것으로 나타났다. 본 연구의 수학적 모델링 수업에서 학생들은 모둠별로 과제를 해결하면서 나눗셈틀, 곱셈식, 그림 등의 수학적 모델을 사용하였고 실제로 창문에 종이를 붙여 보는 활동을 통해 자신의 모델을 직접 적용해보는 과정을 거쳤다. 즉 문제를 이해하고 해결하는 과정에서 수학적 모델을 의미 있게 활용하였고, 이 과정에서 개념적 지식과 절차적 지식의 형성 및 두 지식 간의 연결이 이루어진 것으로 관찰되었다.

셋째, 수학적 모델링 수업은 '실생활 과제 이해' → '문제의 개념적 지식과 절차적 지식 확인' → '수학적 모델 형성 및 표현' → '모델에 사용된 개념적 지식과 절차적 지식 설명' → '개념적 지식과 절차적 지식에 대한 자기평가' → '모델 수정' → '모델을 활용한 문제 해결' → '개념적 지식과 절차적 지식의 연결 확인' → '적용 및 일반화' 단계를 거침으로써 개념적 지식과 절차적 지식의 연결을 지원할 수 있다. 물론 수학적 모델링 수업의 특성상 다시 앞 단계로 회귀하여 모델을 재구성하고 문제를 해결하는 등 본 수업 단계는 유연하게 변형이 가능하다. 오늘날 학교 현장에서 수학적 모델링 수업은 수학과 실세계의 연결, 수학적 모델의 사용에 초점이 맞추어진 경향이 있지만, 수학적 모델링을 보다 보편적인 학교 현장의 수학 수업 장면에서 활용하기 위해서는 개념적 지식과 절차적 지식을 그 과정 안에서 의미 있게 다루려는 시도가 요구된다. 이에 본 연구에서 제안한 수학적 모델링 수업 단계는 수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식의 연결을 지원함으로써 수학적 모델링의 활용 가능성을 확대하는 데 기여할 수 있을 것이며, 향후 관련 연구의 확산에 토대를 제공할 것이다.

넷째, 개념적 지식과 절차적 지식의 연결에 초점을 둔 수학적 모델링 수업은 학생들 간 상호작용, 교사와 학생 간 상호작용을 통해 학생들의 개념적 이해 수준 향상에 긍정적인 영향을 줄 수 있을 것이다. 수학적 모델링 과제를 해결하기 위해 모둠 토의를 하면서 개념적 지식을 형성하게 되고 모둠 내에서 최대공약수를 구하는 여러 절차적 지식을 공유하게 된다. 이때 개념적 지식과 절차적 지식에 대한 자기평가와 모둠 내 피드백 과정을 통해 오류를 수정할 수 있는 기회도 제공된다. 본 연구에서 수학적 모델링 수업을 실시한 후 개념적 이해 정도가 향상되지 않은 학생들과 별도의 심층 면담을 실시한 결과, 해당 학생들은 수업 과정 속에서 생산적인 상호작용을 겪지 못했음을 확인하였다. 자신이 알고 있는 해결 방법으로만 문제를 해결하였기에 개념적 이해에 있어 유의미한 변화가 일어나지 않은 것이다. 따라서 수학적 모델링 수업 시 개념적 지식과 절차적 지식을 의미 있게 연결하기 위해서는 교사의 의미 있는 발문과 모둠 내, 모둠 간 활발한 상호작용이 매우 중요한 요인임을 알 수 있다.

본 연구는 최대공약수를 주제로 수학적 모델링 수업에서 개념적 지식과 절차적 지식을 연결하는 방안을 탐색하였다. 향후 최대공약수뿐만 아니라 다양한 수학 내용으로 이러한 시도를 확장하여 학생들이 개념적 지식과 절차적 지식을 의미 있게 연결하는 배움의 기회를 보다 많이 가질 필요가 있다. 지식 간의 관계에 기반을 두어 형성된 지식은 해당 개념의 이해를 높일 뿐 아니라 타 개념 및 실생활로의 전이 가능성이 높고 학습 후에도 장기기억으로 전환된다는 점에서 성공적인 학습의 지름길이 될 것이다. 이제까지의 수학적 모델링이 다소 개념의 적용 측면에만 초점을 맞추어 연구되어왔다면 앞으로는 개념적 이해의 강화에도 더욱 초점을 맞출 필요가 있다. 또한 수학적 모델링 수업에 대한 지속적인 연구 및 확장도 요구된다. 이를 통해, 수학적 모델링 수업이 일반적인 본 차시 학습에서는 적용하기 어렵다는 인식, 또는 활용 측면만 강조한 교수학습 방법이라는 인식에서 탈피할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

교육부(2019). 초등학교 수학 5-1. ㈜ 천재교육.

김희리, 김성준(2020). 초등학생의 최대공약수에 대한 이해 분석. 학습자중심교과교육연구, 20(9), 21-47.

방정숙, 이유진(2018). 최대공약수와 최소공배수를 구하는 과정에서 의미를 강조한 지도방안 탐색. 한국초등수학교육학회지, 22(3), 283-308.

손승현, 서유진, 이주영, 문주영(2011). 초등수학 사실적, 개념적, 절차적 지식 교수를 위한 증거기반 중재의 실제. 초등교육연구, 24(3), 217-245.

신은주, 이종희(2004). 모델링 과정에서 지각적, 인지적, 메타인지적 활동의 상호작용에 관한 사례연구. 학교수학, 6(2), 153-179.

이상덕, 김화수(2004). 약수의 관계적 이해에 관한 내용 연구 -스키마(Schema)를 중심으로-. 수학교육논문집, 18(1), 111-121.

장혜원, 최혜령, 강윤지, 김은혜(2019). 초등학교 저학년을 위한 수학적 모델링 과제 개발 및 적용 가능성 탐색. 한국초등수학교육학회지, 23(1), 93-117.

정혜윤, 이경화, 백도현, 정진호, 임경석(2018). 수학적 모델링 관점에 의한 수학과제 탐구 과목용 과제의 설계. 학교수학, 20(1), 149-169.

최지영, 강완(2003). 초등학교 수학 교과서에 나타난 약수와 배수 지도 방법 분석. 한국초등수학교육학회지, 7(1), 45-64.

Baroody, A.J., & Lai, M. (2007). Preschoolers' understanding of the addition-subtraction inversion principle: A Taiwanese study. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(2), 131 - 171.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project. In C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 222 - 231). Horwood.

Byrnes, J. P. (1992). The conceptual basis of procedural learning. *Cognitive Development, 7*(2), 235-257.

Crooks, N. M., & Alibali, M. W. (2014). Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review, 34*(4), 344 - 377. https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.10.

Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education.* Springer Cham.

Hennig, C. (2010). Mathematical models and reality: A constructivist perspective. *Foundations of Science, 15*(1), 29-48.

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Erlbaum.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: an introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1 - 27). Erlbaum. G.

Lege, G. (2003). *A Comparative case study of contrasting instructional approaches applied to the instruction of mathematical modeling.* Columbia University.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Research design in mathematics and science education.* (pp. 591-646). Lawrence Erlbaum Associates.

Maaß, K. (2007). Modelling in class: What do we want the students to learn? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan, & Mathematical Modelling (Eds.), *Education, engineering and economics* (pp. 65-78). Chichester: Horwood Publishing.

Nahdi, D. S. & Jatisunda, M. G. (2020). Conceptual understanding and procedural knowledge: A case study on learning mathematics of fractional material in elementary school. *Journal of Physics: Conference Series, 1477*(4), 04237. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1477/4/042037.

National Research Council. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education.* The National Academies Press.

Nesher, P. (1986). Learning mathematics: A cognitive perspective. *American Psychologist, 41*(10), 1114-1122.

Oswalt, S. (2012). *Mathematical modeling in the high school classroom.* Louisiana State University.

Rittle-Johnson, B., & Alibali, M. W. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other? *Journal of Educational Psychology, 91*(1), 175–189.

Rittle-Johnson, B., & Koedinger, K. R. (2005). Designing knowledge scaffolds to support mathematical problem solving. *Cognition and Instruction, 23*(3), 313–349.

Rittle-Johnson, B., Siegler, R. S., & Alibali, M. W. (2001). Developing conceptual understanding and procedural skill in mathematics. An iterative process. *Journal of Educational Psychology, 93*(2), 346–362.

Romberg, T. A. (1994). Classroom instruction that fosters mathematical thinking an connections between theory and practice. In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 287-304). Erlbaum.

Soheil, S. & Naji, Q. (2021). Impact of the mathematical modeling on conceptual understanding among students' teachers. *Journal of Southwest Jiaotong University, 56*(5), 538-551

Zulkarnaen, R. (2018). Why is mathematical modeling so difficult for students? *Proceedings of the AIP Conference, 2021*(1), 060026. AIP Publishing LLC.

Exploring Ways to Connect Conceptual Knowledge and Procedural Knowledge in Mathematical Modeling

Lee, Ye-jin
Seoul Jamjeon Elementary School
E-mail : pkllj@naver.com

Choi, Mira
Seoul Sunsa Elementary School
E-mail : mummy614@naver.com

Kim, Yoonjung
Seoul Hwagye Elementary School
E-mail : yoonj1001@naver.com

Lim, Miin†
Seoul National University of Education
E-mail : miin@snue.ac.kr

The purpose of this study is to explore ways for students to connect conceptual and procedural knowledge in mathematical modeling lessons. Accordingly, we selected the greatest common divisor among the learning contents in which elementary school students have difficulties connecting conceptual and procedural knowledge. A mathematical modeling lesson was designed and implemented to solve problems related to the greatest common divisor while connecting conceptual and procedural knowledge. As a result of the analysis, it was found that the mathematical modeling lesson had positive effects on students solving problems by connecting conceptual and procedural knowledge. In addition, through actual class application, a teaching and learning plan was derived to meaningfully connect conceptual and procedural knowledge in mathematical modeling lessons.

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40
* Key Words : mathematical modeling, conceptual knowledge, procedural knowledge, connect
† Corresponding Author