

# 열역학 기반 내부 변수를 이용한 균질화 탄소성 구성방정식 및 입자강화 복합재에서의 소성변형집중

윤수진<sup>1,\*</sup>, 김기근<sup>2</sup>

## Homogenized Elastic-plastic Relation based on Thermodynamics and Strain Localization Analyses for Particulate Composite

S. J. Yun and K. K. Kim

(Received August 30, 2023 / Revised November 30, 2023 / Accepted November 30, 2023)

### Abstract

In the present work, the evolution rules for the internal variables including continuum damage factors are obtained using the thermodynamic framework, which are in turn facilitated to derive the elastic-plastic constitutive relation for the particulate composites. Using the Mori-Tanaka scheme, the homogenization on state and internal variables such as back-stress and damage factors is carried out to procure the rate independent plasticity relations. Moreover, the degradation of mechanical properties of constituents is depicted by the distinctive damages such that the phase and interfacial damages are treated individually accordingly, whereas the kinematic hardening is depicted by combining the Armstrong-Frederick and Phillips' back-stress evolutions. On the other hand, the present constitutive relation for each phase is expressed in terms of the respective damage-free effective quantities, then, followed by transformation into the damage affected overall nominal relations using the aforementioned homogenization concentration factors. An emphasis is placed on the qualitative analyses for strain localization by observing the perturbation growth instead of the conventional bifurcation analyses. It turns out that the proposed constitutive model offers a wide range of strain localization behavior depending on the evolution of various internal variable descriptions.

**Keywords :** Constitutive relation, Damage, Elasto-plasticity, Homogenization, Interfacial damage, Kinematic hardening, Plastic deformation, Particle size, Perturbation growth, Stress/strain concentration factor, Strain localization

### 1. 서론

대표적인 복합재로는 MMC(Metal Matrix Composite), FRP (Fiber Reinforced Plastic), CMC(Ceramic Matrix Composite) 등을 들 수 있으며, 복합재의 지속적인 물성 향상에 따른 관심 및 적용이 확대되고 있다. 특정 복합재의 경우, 경량화 및 기계적 물성 향상을 동반한 내열성 개선의 이점을

제공하므로 특히 항공-우주 분야에서는 기존의 내열 합금을 대신하여 주요부품을 대체하고 있는 추세이다. 일례로 금속-세라믹 입자강화 복합재(particulate composite)는 기존의 합금에 비해 강도, 경도, 내마모성 및 내구성의 증가와 아울러 세라믹 고유의 취성의 개선에 따른 신뢰성이 향상되었다[1]. 이러한 독특한 물성은 계재물(inclusion)과 기지(matrix), 각 상(phase)이 제공하는 고유의 기능적 특성에서 비롯되며, 구조물의 최적의 열-기계적 물성을 얻기 위해서 각 상의 체적분율 (volumetric fraction), 계재물 형상 및 배열에 대한 세심한 제어가 요구된다[2].

한편 복합재 전체적인 물성의 평가를 위해 대표

1. 국방과학연구소, 항공원 3부, 수석연구원  
2. 국방과학연구소, 항공원 3부, 선임연구원  
\*Corresponding Author: Aerospace Tech. Res. Inst. 3<sup>rd</sup> Dir. Agency for Defense Development, E-mail: sjy3788@add.re.kr, ORCID: 0009-0001-9287-9491

적 체적 요소(RVE: Representative Volume Element)가 이용되며, 이 때 균질화(homogenization) 기법이 일반적으로 적용된다. 대표적으로는 Eshelby 원리의 응용 및 TFA(Transformation Field Analyses)에 기반한 self-consistent, Mori-Tanaka 및 Hashin-Shtrikman 기법 등을 예로 들 수 있다[3]. 위의 균질화 기법 중에서 Mori-Tanaka 기법은 탁월한 범용성과 적용 용이성으로 선형 탄성 복합재에 널리 사용되고 있다.

위에 언급된 균질화 기법은 점탄성(visco-elastic), 점소성(visco-plastic)을 포함한 비선형물질에도 확장될 수 있다[4, 5]. 이를 위해 mean-field 모델이 제안되었으나, 할선(secant)기법에 기반하므로  $J_2$  변형이론(deformation theory)적용에 한정되며, 또한 단순/비례(monotonic/proportional) 하중조건에서만 적용이 제한된다[6-10]. 반면 affine 균질화 기법은 기존의 탄성 구성방정식을 기본으로 eigen 변수의 도입에 따른 단순화를 시도했다. 하지만 실제 보다 높은 강성을 얻는다는 단점이 있다[9]. 위에 언급된 균질화 기법들은 기존의 선형탄성 구성방정식을 바탕으로 응용한 비선형 물질에 대한 확장으로 후방응력(back-stress)과 같은 일부 내부변수(internal variable)의 부재 혹은  $J_2$  변형이론 적용으로 반복(cyclic)하중 하에서 변형이력을 확보할 수 없는 단점이 있다.

한편 복합재는 제작공정에서 발생하는 고유한 결함 및 과도한 하중 노출에 따른 국부적 변형으로 불연속 결함이 발생할 수 있으며, 이런 결함들은 변형이 진행됨에 의해 결함과 성장으로 최종적인 파단에 이를 수 있다. 상 내부 및 상간의 접촉 계면에서의 응력/변형 상태변수의 불연속성은 연속체 결함역학(continuum damage mechanics)의 적용으로 결함인자의 형태로 구성방정식에 도입되어, 보다 실제적인 분석이 가능하다[11]. 일반적으로 상 내부에서의 결함은 국부적 소성변형에 기인하는 반면 계면 결함은 구성물 간의 계면에서의 응력/변형의 불일치성(mismatch)으로 발생하는 것으로 알려졌다[12-17].

본 연구에서는 등온조건 하에서 변형을 독립(rate independent) 입자강화 복합재에 대해 전반적인 변형이력의 확보 및 보다 현실적인 소성변형 거동분석을 위해 접선(tangential) 기법에 기반하여 응력/변형 집중인자의 적용과 함께 점진적 소성흐름( $J_2$  flow) 구성방정식이 제안되었으며, 이 때 연속체 결함역학을 바탕으로 결함에 따른 기계적 물성의 저하도 구성방정식에 포함되었다. 더욱이 열역학에 기반하여

각 내부변수들의 전개식(evolution)들이 획득되었다. 한편 복합재의 소성변형에 따른 등방경화(isotropic hardening)만이 고려되는 것이 일반적이나, 본 연구에서는 이동경화(kinematic hardening)에 따른 탄소성 구성방정식이 유도되었다. 이는 등방경화의 경우, 소성변형의 국부화에 따른 전단밴드 형성 시의 변형을 과대평가하는 경향이 있다. 항공우주 구조체 특히 터보엔진에 적용되는 부품은 인장/압축 반복하중에 노출될 수 있으므로 대신 이동경화가 본 연구에서 적용되었다. 또한 국부적 소성변형 집중현상 또는 전단밴드(shear band) 분석은 전통적(bifurcation) 분석보다 섭동 분석(perturbation analysis)을 이용, 정성적 분석이 수행되며, 특히 다양한 변수의 변화에 따른 효과에 대한 연구가 수행되었다.

## 2. 구성 방정식

### 2.1 열역학과 내부 변수

무결함 상태의 복합재 내부 에너지(internal energy)는 탄성 및 소성변형 부분으로 분해된다[18-20]:

$$d\tilde{U} = \tilde{\sigma}_y d\tilde{\epsilon}_y = \tilde{\sigma}_y d\tilde{\epsilon}_y^e + \tilde{\sigma}_y d\tilde{\epsilon}_y^p. \quad (1-1)$$

등온 조건 하에서 식 (1-2)의 Helmholtz 자유에너지를 얻으며, 다시 상태변수 및 내부변수의 함수로 탄성과 소성 변형에 해당되는 항들로 구분된다:

$$\rho d\tilde{\psi} = d\tilde{U} - \theta d\tilde{S} - \tilde{S}d\theta = d\tilde{U} - \theta d\tilde{S}, \quad (1-2)$$

$$\tilde{\psi}^e = \tilde{\psi}^e(\tilde{\epsilon}^e, \tilde{\phi}), \quad \tilde{\psi}^p = \tilde{\psi}^p(\tilde{\chi}_y, \tilde{p}) \quad [21]. \quad (1-3)$$

에너지 분산( $\pi$ : dissipation)은 (1-4)과 같다[22]:

$$\theta d\tilde{S} \equiv d\pi = d\tilde{U} - \rho d\tilde{\psi} = d\tilde{U} - \rho d\tilde{\psi}^e - \rho d\tilde{\psi}^p \quad (1-4)$$

$$= \left( \tilde{\sigma}_y - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \tilde{\epsilon}_y^e} \right) d\tilde{\epsilon}_y^e + \tilde{\sigma}_y d\tilde{\epsilon}_y^p - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \tilde{\phi}_y} d\tilde{\phi}_y -$$

$$\rho \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \tilde{\chi}_y} d\tilde{\chi}_y - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \tilde{p}} d\tilde{p}$$

$$= \tilde{\sigma}_y d\tilde{\epsilon}_y^p - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \tilde{\phi}_y} d\tilde{\phi}_y - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \tilde{\chi}_y} d\tilde{\chi}_y - \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \tilde{p}} d\tilde{p} \geq 0.$$

그 결과, 위와 같은 Clausius-Duhem 비등방식

( $d\pi \geq 0$ )을 얻으며, 이를 토대로 각 변수에 대한 열역학적 공액힘(conjugate force)들과 각각의 상태 및 내부변수들에 대한 관계식들이 구성될 수 있다:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \tilde{\epsilon}_{ij}^e}, \quad \tilde{Y}_{ij} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \tilde{\phi}_{ij}}, \quad [23, 24] \quad (1-5)$$

$\tilde{\alpha}_{ij} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \tilde{\chi}_{ij}}, \tilde{R} = \rho \frac{\partial \tilde{\psi}^p}{\partial \tilde{p}}$ , [25]와 같으며, 따라서 (1-6)과 같이 Clausius-Duhem 비등방식은 공액힘과 상태와 내부변수의 형태로 표현된다:

$$d\pi = \tilde{\sigma}_{ij} d\tilde{\epsilon}_{ij}^p - \tilde{Y}_{ij} d\tilde{\phi}_{ij} - \tilde{\alpha}_{ij} d\tilde{\chi}_{ij} - \tilde{R} d\tilde{p} \geq 0 \quad [26]. \quad (1-6)$$

한편, 탄성과 소성 변형 상태로 구분된 각각의 자유 에너지에 대한 정의는 다음의 (1-7)과 같으며, 이를 토대로 상태변수 및 내부변수들에 대한 (1-8)의 상태식 및 전개식들이 도출될 수 있다[27-29].

$$\rho \tilde{\psi}^e = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_{ij}^e \tilde{E}_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}^e, \quad \rho \tilde{\psi}^p = \frac{1}{2} a \tilde{\chi}_{ij} \tilde{\chi}_{ij} + \frac{1}{2} b \tilde{p}^2, \quad (1-7)$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{E}_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl}^e, \quad d\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{E}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{kl}^e, \quad (1-8)$$

$$\tilde{\alpha}_{ij} = a \tilde{\chi}_{ij}, \quad d\tilde{\alpha}_{ij} = a d\tilde{\chi}_{ij},$$

$$\tilde{R} = b \tilde{p}, \quad d\tilde{R} = b d\tilde{p},$$

$$\tilde{Y}_{ij} = \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}_{ij}^e \frac{\partial \tilde{E}_{klmn}}{\partial \tilde{\phi}_{mn}} \tilde{\epsilon}_{kl}^e, \quad d\tilde{Y}_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ij}^e \frac{\partial \tilde{E}_{klmn}}{\partial \tilde{\phi}_{mn}} d\tilde{\epsilon}_{kl}^e.$$

목적함수(objective function)의 도입으로 균질화 상태의 내부변수들의 전개식은 다음 식들에서 보는 바와 같은 일련의 과정을 통해 얻을 수 있다[30, 31].

$$\Omega \equiv d\pi - \tilde{\lambda}^p \tilde{F} - \tilde{\lambda}^d \tilde{G} \quad (\text{objective function}), \quad (1-9)$$

$$\tilde{F} = \tilde{F}(\tilde{\sigma}, \tilde{\alpha}, \tilde{R}) \quad (\text{plasticity potential}), \quad (1-10)$$

$$\tilde{G} = \tilde{G}(\tilde{Y}, \tilde{\phi}) \quad (\text{damage potential}),$$

$$\Omega = \tilde{\sigma}_{ij} d\tilde{\epsilon}_{ij}^p - \tilde{Y}_{ij} d\tilde{\phi}_{ij} - \tilde{\alpha}_{ij} d\tilde{\chi}_{ij} - \tilde{R} d\tilde{p} - \tilde{\lambda}^p \tilde{F} - \tilde{\lambda}^d \tilde{G},$$

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2} (\tilde{s}_{ij} - \tilde{\alpha}_{ij}) (\tilde{s}_{ij} - \tilde{\alpha}_{ij}) - \frac{1}{3} (\tilde{\sigma}_0 + \tilde{R})^2, \quad (\text{yield}) \quad (1-11)$$

$$\tilde{G} = \tilde{g} = \frac{1}{2} \tilde{Y}_{ij} \tilde{Y}_{ij} - \tilde{B}^2(\tilde{\phi}), \quad (1-12)$$

$$\tilde{F} = \tilde{\theta} + \frac{1}{2} k_1 \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\alpha}_{ij} + \frac{1}{2} k_2 \tilde{R}^2, \quad (1-13)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = d\tilde{\epsilon}_{ij}^p - \tilde{\lambda}^p \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = 0 \rightarrow d\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \tilde{\lambda}^p \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}, \quad (1-14)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{Y}_{ij}} = -d\tilde{\phi}_{ij} - \tilde{\lambda}^d \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{Y}_{ij}} = 0 \rightarrow d\tilde{\phi}_{ij} = -\tilde{\lambda}^d \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{Y}_{ij}} \quad [32],$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} = -d\tilde{\chi}_{ij} - \tilde{\lambda}^p \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} = 0 \rightarrow d\tilde{\chi}_{ij} = -\tilde{\lambda}^p \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}},$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{R}} = -d\tilde{p} - \tilde{\lambda}^p \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{R}} = 0 \rightarrow d\tilde{p} = -\tilde{\lambda}^p \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{R}}.$$

따라서, 구체적으로 각 내부변수들에 대한 공액힘과의 관계는 다음과 같이 열거될 수 있다.

$$d\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \tilde{\lambda}^p \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\sigma}_{ij}} = \tilde{\lambda}^p (\tilde{s}_{ij} - \tilde{\alpha}_{ij}) = \tilde{\lambda}^p \tilde{\Sigma}_{ij}, \quad (1-15)$$

$$(\tilde{\Sigma}_{ij} \equiv \tilde{s}_{ij} - \tilde{\alpha}_{ij}, \quad \tilde{\Sigma}_e = \tilde{\sigma}_0 + \tilde{R}), \quad \tilde{\lambda}^p = \frac{3}{2} \frac{d\tilde{\epsilon}_e^p}{\tilde{\Sigma}_e} = \frac{3}{2} \frac{d\tilde{\epsilon}_e^p}{\tilde{\sigma}_0 + \tilde{R}},$$

$$d\tilde{\phi}_{ij} = -\tilde{\lambda}^d \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{Y}_{ij}} = -\tilde{\lambda}^d \tilde{Y}_{ij},$$

$$d\tilde{\chi}_{ij} = -\tilde{\lambda}^p \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{\alpha}_{ij}} = \tilde{\lambda}^p (\tilde{s}_{ij} - \tilde{\alpha}_{ij}) - k_1 \tilde{\lambda}^p \tilde{\alpha}_{ij}$$

$$= d\tilde{\epsilon}_{ij}^p - \frac{3}{2} k_1 \frac{d\tilde{\epsilon}_e^p}{\tilde{\sigma}_y} \tilde{\alpha}_{ij},$$

$$d\tilde{p} = -\tilde{\lambda}^p \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{R}} = \tilde{\lambda}^p \frac{2}{3} (\tilde{\sigma}_0 + \tilde{R}) - \tilde{\lambda}^p k_2 \tilde{R}$$

$$= d\tilde{\epsilon}_e^p \left[ 1 - \frac{3}{2} k_2 \frac{\tilde{R}}{\tilde{\sigma}_y} \right], \quad \tilde{\sigma}_y = \tilde{\sigma}_0 + \tilde{R}.$$

따라서, 각 내부변수 전개식들은 다음으로 정리된다:

$$d\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \tilde{\lambda}^p \tilde{\Sigma}_{ij} \quad (\text{plastic flow}), \quad (1-16)$$

$$d\tilde{\phi}_{ij} = -\tilde{\lambda}^d \tilde{Y}_{ij} \quad (\text{damage factor evolution}),$$

$$d\tilde{\alpha}_{ij} = \tilde{\beta} d\tilde{\epsilon}_{ij}^p - \tilde{\gamma} \tilde{\alpha}_{ij} d\tilde{\epsilon}_e^p \quad (\text{back-stress evolution}),$$

$$d\tilde{R} = \tilde{\eta} d\tilde{\epsilon}_e^p \quad (\text{drag-stress evolution}).$$

특히 열역학을 기반으로 획득된 이동경화식(1-16:  $d\tilde{\alpha}$ )의 경우, 후방응력이 소성변형율( $d\tilde{\epsilon}^p$ )에 비례하는 기존의 Prager 법칙과 비교하여, 회복항(recovery term:  $\gamma ad\tilde{\epsilon}_e^p$ )이 추가된 것이 주목된다.

## 2.2 균질화 (Homogenization)

다음에 열거된 과정은 2개 이상 다수의 상으로 구성된 일반적인 복합체에 대해서, 일례로 균질화에

요구되는 변형을 집중인자(strain concentration factor)를 획득하는 과정을 보여준다[12, 33, 34].

$$d\epsilon_{ij}^{pr(r)} = S_{ijkl} d\epsilon_{ij}^* \quad (2-1)$$

$$d\epsilon_{ij}^{(r)} = d\epsilon_{ij}^{(0)} + d\epsilon_{ij}^{pr(r)} \quad (2-2)$$

$\epsilon^{pr(r)}$ : perturbed strain of phase  $r$ ,  $S$ : Eshelby tensor,

$\epsilon^*$ : Eigen strain,  $\epsilon^{(0)}$ : strain at far field

Eshelby의 등가 계재물 원리에 따르면[33]:

$$E_{ijkl}^{(r)} (d\epsilon_{kl}^{(0)} + d\epsilon_{kl}^{pr(r)}) = E_{ijkl}^{(0)} (d\epsilon_{kl}^{(0)} + d\epsilon_{kl}^{pr(r)} - d\epsilon_{kl}^*) \quad (2-3)$$

계면에서의 응력 불연속성으로부터 다음을 얻는다:

$$d\epsilon_{ij}^* = E_{ijmn}^{(0)-1} (E_{mnkl}^{(0)} - E_{mnkl}^{(r)}) d\epsilon_{kl}^{(r)}, \quad (2-4)$$

$$d\epsilon_{ij}^{pr(r)} = S_{ijmn} E_{mnpq}^{(0)-1} (E_{pqkl}^{(0)} - E_{pqkl}^{(r)}) d\epsilon_{kl}^{(r)},$$

$$\left[ I_{ijkl} + S_{ijmn} E_{mnpq}^{(0)-1} (E_{pqkl}^{(r)} - E_{pqkl}^{(0)}) \right] d\epsilon_{kl}^{(r)} = d\epsilon_{ij}^{(0)} \quad [35],$$

$$d\epsilon_{ij}^{(r)} = \left[ I_{ijkl} + S_{ijmn} E_{mnpq}^{(0)-1} (E_{pqkl}^{(r)} - E_{pqkl}^{(0)}) \right]^{-1} d\epsilon_{kl}^{(0)}. \quad (2-5)$$

한편 Mori-Tanaka 기법에 따라 균질 복합재 내 원격장(far field)의 영률이 기지로 대체된다면:

$$E_{mnpq}^{(0)-1} \rightarrow E_{mnpq}^{(M)-1} \quad [4, 36, 37],$$

$$d\epsilon_{ij}^{(r)} = \left[ I_{ijkl} + S_{ijmn} E_{mnpq}^{(M)-1} (E_{pqkl}^{(r)} - E_{pqkl}^{(M)}) \right]^{-1} d\epsilon_{kl}^{(M)} \quad (2-6)$$

$$d\epsilon_{ij}^{(r)} = a_{ijkl}^{(r)} d\epsilon_{kl}^{(M)},$$

$$a_{ijkl}^{(r)} = \left[ I_{ijkl} + S_{ijmn} E_{mnpq}^{(M)-1} (E_{pqkl}^{(r)} - E_{pqkl}^{(M)}) \right]^{-1},$$

$$d\epsilon_{ij}^{(r)} = A_{ijkl}^{(r)} d\tilde{\epsilon}_{kl} \quad [3, 38] \text{이다.} \quad (2-7)$$

위의  $r$  상의 변형을 집중인자  $A^{(r)}$ 의 상세한 구성은 뒤에서 다시 구체적으로 언급될 것이다.

전형적인  $J_2$  흐름이론(flow theory)에 따르면 각 상 및 균질화된 응력/변형 증분에 따른 관계식은 식 (2-8 및 9)에서 보는 바와 같다[12, 52, 53]:

$$d\bar{\sigma}_{ij}^{(r)} = \bar{L}_{ijkl}^{(r)} d\bar{\epsilon}_{kl}^{(r)} \quad (\text{각 상}), \quad (2-8)$$

$$d\bar{\sigma}_{ij} = \bar{L}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{kl} \quad (\text{균질화 복합재}). \quad (2-9)$$

여기서 물질 강성을 나타내는  $\bar{L}$ 는 균질화 복합재의 RVE에서의 순간적인(instantaneous) 탄소성 탄젠

셜 모듈러스이며  $\bar{A}$ 와  $\bar{B}$ 는 균질화 변수 및 무결함 상태의 유효변수(effective)를 각각 나타낸다. 변형을 및 응력 집중인자가 적용되면 식 (2-10)과 같이 각 상의 구역적(local) 변형율과 응력에 대한 복합재 전체적(overall)변수와의 관계가 도출된다[54]:

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(r)} = \bar{A}_{ijkl}^{(r)} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^{(r)} = \bar{B}_{ijkl}^{(r)} \tilde{\sigma}_{kl}. \quad (2-10)$$

선형 탄성변형의 경우, 최초 집중인자들이 지속적으로 적용될 수 있다. 반면 본 연구에서는 흡사한 형태의 집중인자들은 탄소성 영역까지 확대/적용되었다[17, 51, 55]. 더욱이 시컨트 관계를 확장하여 증분(crement)에 대해서 순간적인 집중인자를 적용하여 (2-11)의 탄젠셜 접선 관계식으로 전환되었다:

$$d\bar{\sigma}_{ij}^{(r)} = \bar{B}_{ijkl}^{(r)} (\bar{f}^{(s)}, \bar{L}_{mnpq}^{(s)}) d\tilde{\sigma}_{kl}, \quad (2-11)$$

$$d\bar{\epsilon}_{ij}^{(r)} = \bar{A}_{ijkl}^{(r)} (\bar{f}^{(s)}, \bar{L}_{mnpq}^{(s)}) d\tilde{\epsilon}_{kl}.$$

한편, RVE의 복합재 응력을 및 변형률은 체적분율( $f$ )을 이용한 혼합법칙에 따르며, 그럼 무결함 유효변수들의 복합재의 응력/변형 증분과 그 관계식은:

$$d\tilde{\sigma}_{ij} = f^{(I)} d\bar{\sigma}_{ij}^{(I)} + f^{(M)} d\bar{\sigma}_{ij}^{(M)}, \quad (2-12)$$

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = f^{(I)} d\bar{\epsilon}_{ij}^{(I)} + f^{(M)} d\bar{\epsilon}_{ij}^{(M)}, \quad (2-13)$$

$$d\tilde{\sigma}_{ij} = (f^{(I)} \bar{L}_{ijmn}^{(I)} \bar{A}_{mnkl}^{(I)} + f^{(M)} \bar{L}_{ijmn}^{(M)} \bar{A}_{mnkl}^{(M)}) d\tilde{\epsilon}_{kl} \\ = \bar{L}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{kl} \text{ 이다.} \quad (2-14)$$

그러므로,  $\bar{L}_{ijkl} = \sum_r f^{(r)} \bar{L}_{ijmn}^{(r)} \bar{A}_{mnkl}^{(r)}$ 이며, 한편

$$\sum_r f^{(r)} \bar{B}_{ijkl}^{(r)} = I_{ijkl}, \quad \sum_r f^{(r)} \bar{A}_{ijkl}^{(r)} = I_{ijkl}.$$

선형 탄성 균질화 복합재와 달리 집중인자들은 매 증분마다 업데이트가 요구되는 제한이 있다.

앞서 언급된 바와 같이 Mori-Tanaka 평균화 기법을 이용, 각 상의 구체적 탄소성 집중인자와 균질화 변형율과 응력율은 아래와 같이 표현된다[38]:

$$\bar{a}_{ijkl}^{(I)} = \left[ I_{ijkl} + S_{ijmn} (\bar{L}_{mnpq}^{(M)-1} \bar{L}_{pqkl}^{(I)} - I_{mnkl}) \right]^{-1}, \quad (2-15)$$

$$\bar{b}_{ijkl}^{(I)} = \left[ I_{ijkl} + T_{ijmn} (\bar{L}_{mnpq}^{(M)} \bar{L}_{pqkl}^{(I)-1} - I_{mnkl}) \right]^{-1},$$

$$d\bar{\epsilon}_{ij}^{(t)} = \bar{a}_{ijkl}^{(t)} d\bar{\epsilon}_{kl}^{(M)}, \quad d\bar{\sigma}_{ij}^{(t)} = \bar{b}_{ijkl}^{(t)} d\bar{\sigma}_{kl}^{(M)}, \quad (2-16)$$

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = f^{(t)} \bar{a}_{ijkl}^{(t)} d\bar{\epsilon}_{kl}^{(M)} + f^{(M)} I_{ijkl} d\bar{\epsilon}_{kl}^{(M)}, \quad (2-17)$$

$$d\tilde{\sigma}_{ij} = f^{(t)} \bar{b}_{ijkl}^{(t)} d\bar{\sigma}_{kl}^{(M)} + f^{(M)} I_{ijkl} d\bar{\sigma}_{kl}^{(M)},$$

여기서 ‘ $\mathbf{S}$ ’는 Eshelby 텐서이며, 계재물 입자의 형상에 의해 결정된다. 한편  $\mathbf{T} = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{L}}^{(M)} \mathbf{S} \bar{\mathbf{L}}^{(M)-1}$ 이다. 그럼, 각 상의 변형율과 응력율과 균질화 상태의 변수들과의 관계는 식 (2-18)~(2-21)과 같이 나타낸다[4]:

$$d\bar{\epsilon}_{ij}^{(t)} = \bar{A}_{ijkl}^{(t)} d\tilde{\epsilon}_{kl}, \quad d\bar{\epsilon}_{ij}^{(M)} = \bar{A}_{ijkl}^{(M)} d\tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (2-18)$$

$$d\bar{\sigma}_{ij}^{(t)} = \bar{B}_{ijkl}^{(t)} d\tilde{\sigma}_{kl}, \quad d\bar{\sigma}_{ij}^{(M)} = \bar{B}_{ijkl}^{(M)} d\tilde{\sigma}_{kl}, \quad (2-19)$$

$$\bar{A}_{ijkl}^{(t)} = \bar{a}_{ijmn}^{(t)} \left[ \bar{f}^{(t)} \bar{a}_{mnkl}^{(t)} + \bar{f}^{(M)} I_{mnkl} \right]^{-1}, \quad (2-20)$$

$$\bar{A}_{ijkl}^{(M)} = \left[ \bar{f}^{(t)} \bar{a}_{ijkl}^{(t)} + \bar{f}^{(M)} I_{ijkl} \right]^{-1},$$

$$\bar{B}_{ijkl}^{(t)} = \bar{b}_{ijmn}^{(t)} \left[ \bar{f}^{(t)} \bar{b}_{mnkl}^{(t)} + \bar{f}^{(M)} I_{mnkl} \right]^{-1}, \quad (2-21)$$

$$\bar{B}_{ijkl}^{(M)} = \left[ \bar{f}^{(t)} \bar{b}_{ijkl}^{(t)} + \bar{f}^{(M)} I_{ijkl} \right]^{-1}.$$

언급된 바와 같이 매 증분마다 계산을 해야 하는 단점에도 불구하고, 시컨트 기법의 과도한 강성을 교정할 추가적인 항들이[33] 요구되지 않으며, 또한 내부변수의 전개와 더불어 비선형 변형거동 이력의 지속적인 추적이 가능하다는 이점이 제공된다.

### 2.3 연속체 결함 (Continuum Damage)

입자강화 복합재에 대한 실제적인 소성 변형거동 분석을 위해 탄소성 구성방정식에 결함의 전개에 따른 영향이 포함되어야 한다. 일반적으로 무결함 상태의 유효 응력/변형율에 대한 명목형(nominal) 항들과의 관계는 식 (3-1)과 같다[39]:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \mathbf{M}_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad \bar{\epsilon}_{ij} = \mathbf{M}_{ijkl}^{-1} \epsilon_{kl}. \quad (3-1)$$

이 때의 유효/명목 탄성 모듈러스의 관계는[22, 40]:

$$E_{ijkl} = \mathbf{M}_{ijmn}^{-1} \bar{E}_{mnpq} \mathbf{M}_{pqkl}^{-1} \text{이다.} \quad (3-2)$$

연속체 결함인자는 점진적인 물성 저하를 유발하는 크랙(crack), 미세 기공(porosity) 및 전체 혹은 부분적 계면 박리 또는 탈착(separation/debonding) 등을 포괄적으로 나타내는 것이 가능하며, 가상의 유효 ( $\bar{A}$ ), 명목형 면적 ( $A$ )의 관계로 표현된다[43]:

$$\Phi = \frac{A - \bar{A}}{A}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1 - \Phi}. \quad (3-3)$$

본 연구에서는 각 결함의 발생현상의 고립화 및 결함 간의 상호작용이 없는 것으로 가정되었다. 따라서 상 내부에서의 결함은  $\Phi^{(r)}$ 로 접촉계면 결함은  $\Phi^{(d)}$ 로 각각 표현되었다. 다음은 각 상에 대한 결함 한계 식(damage criterion function)[41]이며:

$$G_r = g_r = \frac{1}{2} Y_{ij}^{(r)} Y_{ij}^{(r)} - B_r^2 (\phi^{(r)}) = 0. \quad (3-4)$$

여기서  $\mathbf{Y}^{(r)}$ 은 결함인자 ( $\phi^{(r)}$ )에 대한 열역학적 항이며  $B_r$ 은 결함 생성여부를 결정하는 한계 계수(threshold)이다. 각 상의 결함 전개는 통상적으로 변형률 의존함수[41, 42]로 표현되나, 하지만 본 연구에서는 변형이 응력의 함수로 표현되기 위해 결함이 응력변화에 의존하는 것으로 설정되었다:

$$\mathbf{Y}_{ij}^{(r)} = \mathbf{Y}_{ij}^{(r)} (\phi^{(r)}, \bar{\sigma}^{(r)}), \quad (3-5)$$

$$d\phi_{ij}^{(r)} = -\lambda^{d(r)} \frac{\partial g_r}{\partial Y_{ij}^{(r)}}, \quad \lambda^{d(r)} \equiv \Lambda_{mn}^{(r)} d\bar{\sigma}_{mn}^{(r)} \quad (3-6)$$

각 상의 결함인자 배수 ( $\lambda^{d(r)}$ : phase  $r$  damage factor multiplier)에 대해 대체 변수로서 매개 결함배수 ( $\Lambda^{(r)}$ )와 응력율( $d\bar{\sigma}$ )의 함수로 표현된다면, 결함인자의 전개는 (3-7)과 같이 나타내는 것이 가능하다:

$$d\phi_{ij}^{(r)} = -\lambda^{d(r)} \frac{\partial g_r}{\partial Y_{ij}^{(r)}} = -\Lambda_{mn}^{(r)} Y_{ij}^{(r)} d\bar{\sigma}_{mn}^{(r)}. \quad (3-7)$$

한편,  $dY_{ij}^{(r)} = \frac{\partial Y_{ij}^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}^{(r)}} d\bar{\sigma}_{mn}^{(r)} + \frac{\partial Y_{ij}^{(r)}}{\partial \phi_{mn}^{(r)}} d\phi_{mn}^{(r)}$ 이며, 결함인자의 전개식을 얻기 위해 결함한계함수( $g_r$ )에 대해 일관성조건(consistency)이 적용된다면:

$$\begin{aligned} dg_r &= \frac{\partial g_r}{\partial Y_{ij}^{(r)}} dY_{ij}^{(r)} + \frac{\partial g_r}{\partial \phi_{ij}^{(r)}} d\phi_{ij}^{(r)} \\ &= Y_{ij}^{(r)} dY_{ij}^{(r)} + \frac{\partial g_r}{\partial B_r} \frac{\partial B_r}{\partial \phi_{ij}^{(r)}} d\phi_{ij}^{(r)} \\ &= Y_{ij}^{(r)} dY_{ij}^{(r)} - 2B_r \frac{\partial B_r}{\partial \phi_{ij}^{(r)}} d\phi_{ij}^{(r)} \end{aligned} \quad (3-8)$$

$$\begin{aligned}
 &= Y_{ij}^{(r)} \left( \frac{\partial Y_{ij}^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}^{(r)}} d\bar{\sigma}_{mn}^{(r)} + \frac{\partial Y_{ij}^{(r)}}{\partial \phi_{mn}^{(r)}} d\phi_{mn}^{(r)} \right) - 2B_r \frac{\partial B_r}{\partial \phi_{ij}^{(r)}} d\phi_{ij}^{(r)} \\
 &= Y_{ij}^{(r)} \frac{\partial Y_{ij}^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}^{(r)}} d\bar{\sigma}_{mn}^{(r)} - \lambda_r^d Y_{ij}^{(r)} Y_{mn}^{(r)} \frac{\partial Y_{ij}^{(r)}}{\partial \phi_{mn}^{(r)}} + \lambda_r^d 2B_r Y_{ij}^{(r)} \frac{\partial B_r}{\partial \phi_{ij}^{(r)}} \\
 &= Y_{ij}^{(r)} \frac{\partial Y_{ij}^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{pq}^{(r)}} d\bar{\sigma}_{pq}^{(r)} - \Lambda_{pq}^{(r)} Y_{ij}^{(r)} Y_{mn}^{(r)} \frac{\partial Y_{ij}^{(r)}}{\partial \phi_{mn}^{(r)}} d\bar{\sigma}_{pq}^{(r)} + \\
 &\quad \Lambda_{pq}^{(r)} 2B_r Y_{ij}^{(r)} \frac{\partial B_r}{\partial \phi_{ij}^{(r)}} d\bar{\sigma}_{pq}^{(r)}.
 \end{aligned}$$

결과적으로 매개 결함인자 배수( $\Lambda^{(r)}$ ) 및 결함인자 전개식은 다음의 (3-9)와 (3-10)과 같이 표현된다:

$$\Lambda_{mn}^{(r)} = \frac{Y_{kl}^{(r)} \frac{\partial Y_{kl}^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}^{(r)}}}{Y_{pq}^{(r)} Y_{rs}^{(r)} \frac{\partial Y_{pq}^{(r)}}{\partial \phi_{rs}^{(r)}} - 2B_r Y_{pq}^{(r)} \frac{\partial B_r}{\partial \phi_{pq}^{(r)}}}, \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned}
 d\phi_{ij}^{(r)} &= \frac{Y_{ij}^{(r)} Y_{kl}^{(r)} \frac{\partial Y_{kl}^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}^{(r)}}}{2B_r Y_{pq}^{(r)} \frac{\partial B_r}{\partial \phi_{pq}^{(r)}} - Y_{pq}^{(r)} Y_{rs}^{(r)} \frac{\partial Y_{pq}^{(r)}}{\partial \phi_{rs}^{(r)}}} d\bar{\sigma}_{mn}^{(r)} \\
 &= H_{ijmn}^{(r)} d\bar{\sigma}_{mn}^{(r)},
 \end{aligned} \quad (3-10)$$

여기서  $H_{ijmn}^{(r)} \equiv \frac{Y_{ij}^{(r)} Y_{kl}^{(r)} \frac{\partial Y_{kl}^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}^{(r)}}}{2B_r Y_{pq}^{(r)} \frac{\partial B_r}{\partial \phi_{pq}^{(r)}} - Y_{pq}^{(r)} Y_{rs}^{(r)} \frac{\partial Y_{pq}^{(r)}}{\partial \phi_{rs}^{(r)}}}$ .

결함인자 전개식의 단순화를 위해 결함변수들과 결함인자 전개식이 스칼라 항으로 표현된다면[41]:

$$d\phi^{(r)} = \frac{Y^{(r)} \frac{\partial Y^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}^{(r)}}}{2B_r \frac{\partial B_r}{\partial \phi^{(r)}} - Y^{(r)} \frac{\partial Y^{(r)}}{\partial \phi^{(r)}}} d\bar{\sigma}_{mn}^{(r)}, \quad (3-11)$$

$$H_{mn}^{(r)} \equiv \frac{Y^{(r)} \frac{\partial Y^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}^{(r)}}}{2B_r \frac{\partial B_r}{\partial \phi^{(r)}} - Y^{(r)} \frac{\partial Y^{(r)}}{\partial \phi^{(r)}}} \text{이며,}$$

보편적으로 정의되는 결함변수와 한계함수 항들[23]과 각 미분항들이 정리되면 아래와 같다:

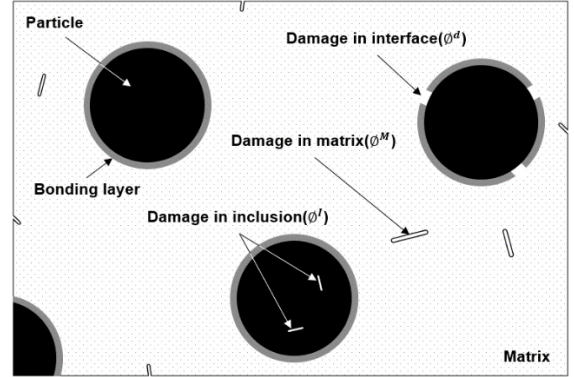


Fig. 1 Schematic representation of cross section of a particulate composite: damage in phases and interface

$$B_r(\phi^{(r)}) = \alpha^{(r)} + \frac{4E^{(r)}}{\lambda_r^2} (1 - \phi^{(r)}) \left[ \ln(1 - \phi^{(r)}) \right]^2, \quad (3-12)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial \phi^{(r)}} = -\frac{4E^{(r)}}{\lambda_r^2} \ln(1 - \phi^{(r)}) \left[ \ln(1 - \phi^{(r)}) + 2 \right],$$

$$Y^{(r)} = -\frac{\sigma_e^{(r)}}{2E^{(r)}} f\left(\frac{\sigma_H^{(r)}}{\sigma_e^{(r)}}\right) (1 - \phi^{(r)})^{-2}, \quad (3-13)$$

$$\frac{\partial Y^{(r)}}{\partial \phi^{(r)}} = -\frac{\sigma_e^{(r)}}{E^{(r)}} f\left(\frac{\sigma_H^{(r)}}{\sigma_e^{(r)}}\right) (1 - \phi^{(r)})^{-3}, \quad (3-14)$$

$$f\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e}\right) = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\sigma_H}{\sigma_e}\right)^2.$$

Fig. 1은 입자강화 복합재의 개념적인 형상을 나타내며, 각 상의 내부 및 계면결함들을 함께 보여준다. 일반적인 복합재의 경우, 결함이 비등방성으로 생성될 수 있으므로, 각 상에 대해 계면 불연속성을 고려치 않은 상태에서 다음과 같이 표현된다:

$$\bar{\sigma}_{ij}^{(I)} = M_{ijkl}^{(I)} \sigma_{kl}^{(I)}, \quad \bar{\sigma}_{ij}^{(M)} = M_{ijkl}^{(M)} \sigma_{kl}^{(M)}, \quad (3-15)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij}^{(I)} = M_{ijkl}^{(I)-1} \epsilon_{kl}^{(I)}, \quad \bar{\epsilon}_{ij}^{(M)} = M_{ijkl}^{(M)-1} \epsilon_{kl}^{(M)}, \quad (3-16)$$

$$M_{ijkl} = 2 \left[ (\delta_{ik} - \phi_{ik}) \delta_{jl} + \delta_{ik} (\delta_{jl} - \phi_{jl}) \right]^{-1} \quad (3-17)$$

$M^{(I)}$  과  $M^{(M)}$  은 계재물과 기지의 결함텐서이며 에너지 증가 원리를 이용, 명목 모듈러스는 (3-18)의 유효량과 결함인자의 함수로 표현된다[40, 56, 57]:

$$L_{ijkl}^{(r)} = M_{ijmn}^{(r)-1} \bar{L}_{mnpq}^{(r)} M_{pqkl}^{(r)-1}. \quad (3-18)$$

계재물과 기지 사이 계면 결함의 경우, Weibull 분포 함수에 근거한 계면에서의 박리(debonding) 확률 ( $P_d$ )이 결함 인자를 획득하는데 이용된다[12, 58]:

$$P_d = f_d = 1 - \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_{kk}|_M - \sigma_{cr}}{S_0} \right)^m \right], \quad (3-19)$$

$$\Phi_{\text{interface}} = \frac{A|_{\text{int}}}{\bar{A}|_{\text{int}}} = \frac{\bar{A}|_{\text{int}}(\text{total}) \times P_d}{\bar{A}|_{\text{int}}(\text{total})} = P_d, \quad (3-20)$$

여기서,  $\sigma_{kk}$  는 계면에서의 평균 수직(normal)응력이며,  $S_0$  와  $m$  은 실험적으로 얻는 고유 물질 상수이다[59-61]. 계면에서의 박리는 수직 응력이 임계 응력에 도달할 때 발생하며, 다음과 같이 물성과 입자 특성을 이용한 다양한 형태의 정의가 존재한다:

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{\gamma}{d_p} \left[ \bar{f}_l (1 - 2\nu_M) + (1 + \nu_M) / 2 \right] \frac{(1 - \bar{f}_l) E_M}{}} \quad [59], \quad (3-21)$$

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{\gamma}{d_p} \frac{4E_M}{1 + \nu_M}} \quad [61],$$

$$\sigma_{cr} = \sqrt{\frac{\gamma E_l}{d_p}} \quad [62].$$

$\gamma$ ,  $E_M$ ,  $E_l$ ,  $\nu_M$  및  $d_p$  는 계면 접촉 에너지, 기지, 계재물 영률, 기지 포아송비 및 계재물의 평균 입자의 크기를 나타낸다. 또한 임계 응력은 소재 물성과 입자 크기의 함수이므로, 입자 크기는 변형 거동 특히 계면결함과 밀접한 관계가 있다. Fig. 2는 복합재 내부에서의 계면결함을 개념적인 단면을 보여주고 있으며, 완벽한 계면접착, 부분적 박리 및 완전한 계면 박리의 3 종류의 계면 상태로 구분된다.

또한 박리된 상태의 빈 공간의 영역은 변위 점프 ( $[u_i]$ : displacement jump)로 나타낸다. 한편, 평균  $d_p$  크기의 계재물의 최초 체적분율은 다음과 같다:

$$\bar{f}^{(l)} = \frac{\bar{\Omega}_{\text{inc}}}{\bar{\Omega}_{\text{RVE}}} = \frac{Nd_p^3}{D^3}, \quad (3-22)$$

$N$ :  $\bar{\Omega}_{\text{RVE}}$  에서의 계재물 갯수,  $D$ : 복합재 RVE의 크기이다. 이때, 기지가 차지하는 도메인 (domain)은:

$$\bar{\Omega}_M = (1 - \bar{f}^{(l)}) \bar{\Omega}_{\text{RVE}}. \quad (3-23)$$

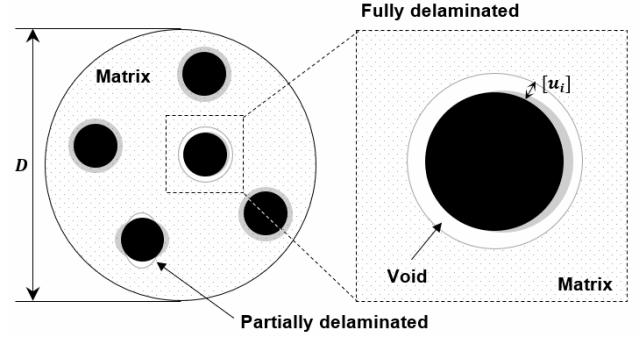


Fig. 2 Schematic cross-sectional representation of interfacial damage

부분적인 박리를 포함하여 계면결함에 노출된 계재물의 수는  $P_d$  에 비례하므로 상대적인 면적 비율이 적용되면 계면결함에 의한 기공의 도메인 ( $\Omega_d$ )은:

$$\Omega_d \cong N f_d \pi d_p^2 [u_i] = \bar{f}_l f_d \pi \frac{D^3}{d_p} [u_i] \quad \text{이며,} \quad (3-23)$$

계면에서의 변위 불연속은 ( $[u_i]$  또는 jump)는:  $[u_i] = \left[ \frac{(1 - \nu_M) \sigma_{kk}|_M - (1 + \nu_M) \sigma_{\text{lim}}}{2E_M} - \frac{\sigma_{\text{lim}}}{3K_l} \right] d_p$  이다. 따라서, 계면 박리에 따른 결함인자 ( $\Phi^d$ )는 (3-24)와 같다:

$$\Phi^d = \frac{\Omega_d}{\bar{\Omega}_{\text{RVE}}} = 6 \frac{\bar{f}^{(l)} f_d [u_i]}{d_p}, \quad (3-24)$$

$$= 6 \bar{f}^{(l)2} \times \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{(\sigma_{kk}|_M - \sigma_{cr})^m}{S_0^m} \right] \left[ \frac{(1 - \nu_M) \sigma_{kk}|_M - (1 + \nu_M) \sigma_{\text{lim}}}{2E_M} - \frac{\sigma_{\text{lim}}}{3K_l} \right] \right\}$$

여기서,  $K_l$ : 계재물의 bulk 모듈러스,  $\sigma_{\text{lim}}$ : 계면 강도,  $S_0^m$ : 과단 계면 강도 등을 나타낸다. 또한 복합재에서의 결함인자를 이용한 균질화 유효 응력/변형에 대한 명목형 항의 관계는:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{M}_{ijkl} \tilde{\sigma}_{kl} \quad [22, 43], \quad \tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{M}_{ijkl}^{-1} \tilde{\epsilon}_{kl}. \quad (3-25)$$

시간 혹은 증분에 대한 유효 변형율의 변화는:

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{M}_{ijkl}^{-1} d\tilde{\epsilon}_{kl} + d\tilde{M}_{ijkl}^{-1} \tilde{\epsilon}_{kl} \quad [44], \quad (3-26)$$

과 같으며, 또한, 변형률-응력을 점진적 (incremental) 증분 구성방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{L}_{ijkl}^{-1} d\tilde{\sigma}_{kl} \quad (3-27)$$

$$= \tilde{M}_{ijmn}^{-1} \tilde{L}_{mnpq} \tilde{M}_{pqkl} d\tilde{\sigma}_{kl} + \tilde{M}_{ijmn}^{-1} \tilde{L}_{mnpq} d\tilde{M}_{pqkl} \tilde{\sigma}_{kl} - \tilde{M}_{ijmn}^{-1} d\tilde{M}_{mnkl}^{-1} \tilde{\epsilon}_{kl} ,$$

$$\tilde{M}_{ijkl}^{-1} d\tilde{\epsilon}_{kl} + d\tilde{M}_{ijkl}^{-1} \tilde{\epsilon}_{kl} = \tilde{L}_{ijkl}^{-1} d\tilde{\sigma}_{kl} \text{ 이므로,} \quad (3-28)$$

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{M}_{ijmn}^{-1} \tilde{L}_{mnkl}^{-1} d\tilde{\sigma}_{kl} - d\tilde{M}_{ijmn}^{-1} \tilde{M}_{mnkl}^{-1} \tilde{\epsilon}_{kl} . \quad (3-29)$$

이때 계면결합이 함께 고려되면 (3-31)을 얻는다:

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = M_{ijkl}^{(d)} \hat{\epsilon}_{kl} = M_{ijkl}^{(d)} \left[ f \hat{\epsilon}_{kl}^{(I)} + (1-f) \hat{\epsilon}_{kl}^{(M)} \right] \quad (3-30)$$

$$= M_{ijmn}^{(d)} \left[ f M_{mnkl}^{(I)} \tilde{\epsilon}_{kl}^{(I)} + (1-f) M_{mnkl}^{(M)} \tilde{\epsilon}_{kl}^{(M)} \right]$$

$$= M_{ijmn}^{(d)} \left[ f M_{mnpq}^{(I)} \bar{A}_{pqkl}^{(I)} + (1-f) M_{mnpq}^{(M)} \bar{A}_{pqkl}^{(M)} \right] \tilde{\epsilon}_{kl}$$

$$\tilde{M}_{ijkl} \tilde{\epsilon}_{kl} = M_{ijmn}^{(d)} \left[ f M_{mnpq}^{(I)} \bar{A}_{pqkl}^{(I)} + (1-f) M_{mnpq}^{(M)} \bar{A}_{pqkl}^{(M)} \right] \tilde{\epsilon}_{kl}$$

$$\tilde{M}_{ijkl} = M_{ijmn}^{(d)} \left[ f M_{mnpq}^{(I)} \bar{A}_{pqkl}^{(I)} + (1-f) M_{mnpq}^{(M)} \bar{A}_{pqkl}^{(M)} \right] \quad (3-31)$$

여기서, 일차원 결합인자로 대체되면 다음과 같다:

$$\frac{1}{1-\phi} \delta_{ijkl} = \frac{1}{1-\phi^d} \left[ f \frac{1}{1-\phi^I} \bar{A}_{ijkl}^{(I)} + (1-f) \frac{1}{1-\phi^M} \bar{A}_{ijkl}^{(M)} \right]. \quad (3-32)$$

스칼라 결합인자를 적용하여 각 상에 대해서 (3-36)의 탄소성 compliance를 얻는다:

$$d\tilde{\epsilon}_{ij}^{(r)} = (1-\phi^r) d\epsilon_{ij} - d\phi^r \epsilon_{ij} , \quad (3-33)$$

$$d\phi^r = H_{kl}^{(r)} d\bar{\sigma}_{kl}^{(r)} , \quad H_{ij}^{(r)} \equiv \frac{Y^{(r)} \frac{\partial Y^{(r)}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}^{(r)}}}{2B^{(r)} \frac{\partial B^{(r)}}{\partial \phi^{(r)}} - Y^{(r)} \frac{\partial Y^{(r)}}{\partial \phi^{(r)}}} , \quad (3-34)$$

$$\bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} d\bar{\sigma}_{kl}^{(r)} = (1-\phi^r) d\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij} H_{kl}^{(r)} d\bar{\sigma}_{kl}^{(r)} ,$$

$$\left( \bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \epsilon_{ij} H_{kl}^{(r)} \right) d\bar{\sigma}_{kl}^{(r)} = (1-\phi^r) d\epsilon_{ij} ,$$

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{1-\phi^r} \left( \bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \epsilon_{ij} H_{kl}^{(r)} \right) d\bar{\sigma}_{kl}^{(r)} , \quad (3-35)$$

$$\therefore \hat{L}_{ijkl}^{(r)-1} = \frac{1}{1-\phi^r} \left( \bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \epsilon_{ij} H_{kl}^{(r)} \right) \text{ 이다.} \quad (3-36)$$

$\hat{L}_{ijkl}^{(r)}$ : tangential modulus of phase  $r$

## 2.4 무결함 복합재 탄소성 구성방정식

무결함 상태에서의 균질화된 복합재에 대해 전형적인 응력/변형 증분에 따른 탄소성 구성방정식은 대표적으로 식 (4-1)과 같이 표현될 수 있다:

$$d\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{E}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{L}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{kl} . \quad (4-1)$$

여기서,

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = f d\tilde{\epsilon}_{ij}^{(I)} + (1-f) d\tilde{\epsilon}_{ij}^{(M)} , \quad (4-2)$$

$$d\tilde{\sigma}_{ij} = f d\tilde{\sigma}_{ij}^{(I)} + (1-f) d\tilde{\sigma}_{ij}^{(M)} \quad [45],$$

$$\tilde{L}_{ijkl} = \sum_r f_r \bar{L}_{ijmn}^{(r)} \bar{A}_{mnkl}^{(r)} \quad [46]$$

$$d\tilde{\epsilon}_{ij}^{(r)} = \bar{A}_{ijkl}^{(r)} d\tilde{\epsilon}_{kl} , \quad d\tilde{\sigma}_{ij}^{(r)} = \bar{B}_{ijkl}^{(r)} d\tilde{\sigma}_{kl} \quad [7]. \quad (4-3)$$

### 2.4.1 복합재 I

복합재 I은 탄성 기지와 탄소성 계재물로 이루어졌다고 설정되었다. 앞서 언급되었듯이  $J_2$  흐름이론을 이용, 상태변수 및 내부변수들의 증분에 기반한 점진적 구성방정식이 유도되었다. 우선 무결함 상태에서의 균질화 구성방정식 유도 후 연속체 결합인자와의 조합으로의 변환되었다. 일반적으로 등방경화의 가정 만으로는 국부적 변형집중이 분석될 때, 전단밴드 생성 시의 변형율이 과대평가되는 단점이 있다. 따라서 항복함수의 곡률반경을 유지하는 이동경화식 또는 하중발생 지점에서 예리한 곡률을 갖는 corner 이론을 이용한 전단밴드 분석이 보다 유리한 것으로 알려졌다[63]. 더욱이 반복하중에서의 Ratchetting 또는 shake-down 분석에서도 이동경화식이 위의 제한을 극복하는데 유리하다[32]. 본 연구에서는 (4-4)의 Armstrong-Frederick (상첨자 AF) 변형률과 (4-5)의 Phillips 응력율 (상첨자 PH) 의존의 두 가지 후방응력 전개를 이용하여, 이중후방응력 (combined two back-stress) 전개식이 적용되었다:

$$d\alpha_{ij}^{AF} = \beta d\epsilon_{ij}^p - \gamma \alpha_{ij} d\epsilon_{ij}^e \quad [47-49], \quad (4-4)$$

$$d\alpha_{ij}^{PH} = \zeta d\sigma_{ij} \quad [50], \quad (4-5)$$

$$d\tilde{\alpha}_{ij} = \rho d\bar{\alpha}_{ij}^{(AF)} + (1-\rho) d\bar{\alpha}_{ij}^{(PH)} . \quad (4-6)$$

여기서  $\beta, \gamma, \zeta$  계수들은 각 후방응력 전개식에서의 경화계수들이며, 일관성조건 적용으로 다음의 상호



의존적인 경화계수들이 얻어진다:

$$K = \frac{\rho}{1-(1-\rho)\zeta} \left( \beta - \gamma \alpha_{ij} \frac{\Sigma_{ij}}{\sigma_0} \right), \quad (4-7)$$

$$K_t = \frac{\rho}{1-(1-\rho)\zeta} (\beta - \gamma \alpha_{ij}), \quad K_c = \frac{\rho}{1-(1-\rho)\zeta} (\beta + \gamma \alpha_{ij}),$$

$$\beta = \frac{1-(1-\rho)\zeta}{\rho} \frac{K_c + K_t}{2}, \quad \gamma = \frac{1-(1-\rho)\zeta}{\rho} \frac{K_c - K_t}{2\alpha_s},$$

위의 하첨자  $t, \beta$ : 인장, 압축 하중을 각각 나타낸다. 한편,  $\alpha_s$ 는 역하중 시 후방응력이며, 경우에 따라서 최종 후방응력( $\alpha_s = 1.5\beta/\gamma$ )으로 대체될 수 있다.

그럼 전체 변형율( $d\tilde{\epsilon}$ )은 탄성( $d\tilde{\epsilon}^e$ )과 소성변형( $d\tilde{\epsilon}^p$ )으로 분리에 이어, 나아가서 (4-8)에서 보는 바와 같이 각 상에 대한 변형율로 분해될 수 있다:

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = d\tilde{\epsilon}_{ij}^e + d\tilde{\epsilon}_{ij}^p \quad (4-8)$$

$$= \left[ f d\tilde{\epsilon}_{ij}^{e(t)} + (1-f) d\tilde{\epsilon}_{ij}^{e(M)} \right] + f d\tilde{\epsilon}_{ij}^{p(t)}$$

$$= \left[ f \bar{E}_{ijkl}^{(t)-1} d\bar{\sigma}_{kl}^{(t)} + (1-f) \bar{E}_{ijkl}^{(M)-1} d\bar{\sigma}_{kl}^{(M)} \right] + f \bar{\lambda}^{p(t)} \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)}$$

$$= \left[ f \bar{E}_{ijkl}^{(t)-1} \bar{B}_{klmn}^{(t)} + (1-f) \bar{E}_{ijkl}^{(M)-1} \bar{B}_{klmn}^{(M)} \right] d\tilde{\sigma}_{mn} + f \bar{\lambda}^{p(t)} \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)}$$

$$= \bar{E}_{ijmn}^{-1} d\tilde{\sigma}_{mn} + f \bar{\lambda}^{p(t)} \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)}, \quad f^{(t)} = f, \quad f^{(M)} = 1-f.$$

여기서,  $\bar{E}^{-1} = f \bar{E}^{(t)-1} \mathbf{B}^{(t)} + (1-f) \bar{E}^{(M)-1} \mathbf{B}^{(M)}$  이다[51]. 다음과 같이 계재물 (I)의 항복함수에 대한 일관성조건으로 변형율-응력을 관계식을 얻는다:

$$\bar{\theta}^{(t)} = \frac{1}{2} (\bar{s}_{ij}^{(t)} - \bar{\alpha}_{ij}^{(t)}) (\bar{s}_{ij}^{(t)} - \bar{\alpha}_{ij}^{(t)}) - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_y^{(t)2} \quad (4-9)$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_y^{(t)2},$$

$$\bar{s}_{ij}^{(t)} \equiv \bar{\sigma}_{ij}^{(t)} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{kk}^{(t)} \delta_{ij}, \quad \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} \equiv \bar{s}_{ij}^{(t)} - \bar{\alpha}_{ij}^{(t)}.$$

또한 계재물의 소성변형율이 내부변수 소성배수( $\bar{\lambda}^{p(t)}$ )와 유효응력( $\bar{\Sigma}^{(r)}$ ) 향으로 표현된다면:

$$d\tilde{\epsilon}_{ij}^{(t)} = d\tilde{\epsilon}_{ij}^{e(t)} + d\tilde{\epsilon}_{ij}^{p(t)}, \quad (4-10)$$

$$d\tilde{\epsilon}_{ij}^{p(t)} = \bar{\lambda}^{p(t)} \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)}, \quad d\tilde{\epsilon}_e^{p(t)} = 2/3 \bar{\lambda}^{p(t)} \bar{\Sigma}_e^{(t)},$$

여기서  $\epsilon_e^p \equiv (2/3 \epsilon_{ij}^p \epsilon_{ij}^p)^{1/2}$ ,  $\Sigma_e \equiv (3/2 \Sigma_{ij} \Sigma_{ij})^{1/2}$ .

계재물의 소성변형률을 얻기 위해 계재물의 항복함

수에 대해 (4-11)과 같이 일관성조건이 적용되면:

$$d\bar{\theta}^{(t)} = \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} d\bar{\sigma}_{ij}^{(t)} - \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} d\bar{\alpha}_{ij}^{(t)} \quad (4-11)$$

$$= \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} d\bar{\sigma}_{ij}^{(t)} - \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} \left[ \rho d\bar{\alpha}_{ij}^{(AF)} + (1-\rho) d\bar{\alpha}_{ij}^{(PH)} \right]$$

$$= \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} d\bar{\sigma}_{ij}^{(t)} - \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} \left[ \rho \bar{\beta} d\tilde{\epsilon}_{ij}^{p(t)} - \rho \bar{\gamma} \bar{\alpha}_{ij}^{(t)} d\tilde{\epsilon}_e^{p(t)} + (1-\rho) \bar{\zeta} d\bar{\sigma}_{ij}^{(t)} \right]$$

$$= \left[ 1 - (1-\rho) \bar{\zeta} \right] \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} d\bar{\sigma}_{ij}^{(t)} - \bar{\lambda}^{p(t)} \rho \bar{\beta} \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} + \bar{\lambda}^{p(t)} \frac{2}{3} \rho \bar{\gamma} \bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} \bar{\alpha}_{ij}^{(t)} \bar{\Sigma}_e^{(t)} = 0.$$

그럼, 계재물의 소성배수  $\bar{\lambda}^{p(t)}$ 는:

$$\bar{\lambda}^{p(t)} = \bar{B}_{klmn}^{(t)} \frac{\left[ 1 - (1-\rho) \bar{\zeta} \right] \bar{\Sigma}_{kl}^{(t)}}{\frac{2}{3} \rho \bar{\beta} \bar{\Sigma}_e^{2(t)} - \frac{2}{3} \rho \bar{\gamma} \bar{\Sigma}_{ab}^{(t)} \bar{\alpha}_{ab}^{(t)} \bar{\Sigma}_e^{(t)}} d\tilde{\sigma}_{mn}, \quad (4-12)$$

결과적으로 아래와 같이 균질화 상태의 변형율에 대한 응력을 관계식이 얻어진다:

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = \bar{E}_{ijmn}^{-1} d\tilde{\sigma}_{mn} + \frac{3}{2} f \bar{B}_{klmn}^{(t)} \frac{1-(1-\rho)\bar{\zeta}}{\rho} \frac{\bar{\Sigma}_{ij}^{(t)} \bar{\Sigma}_{kl}^{(t)}}{\bar{\beta} \bar{\Sigma}_e^{2(t)} - \bar{\gamma} \bar{\Sigma}_{pq}^{(t)} \bar{\alpha}_{pq}^{(t)} \bar{\Sigma}_e^{(t)}} d\tilde{\sigma}_{mn}$$

$$= \left( f \bar{E}_{ijkl}^{(t)-1} \bar{B}_{klmn}^{(t)} + (1-f) \bar{E}_{ijkl}^{(M)-1} \bar{B}_{klmn}^{(M)} + f \bar{B}_{klmn}^{(t)} \frac{3}{2} \frac{1-(1-\rho)\bar{\zeta}}{\rho} \frac{\bar{B}_{ijtu} \bar{B}_{klvw} \bar{\Sigma}_{tu} \bar{\Sigma}_{vw}}{\bar{\beta} \bar{\Sigma}_e^{2(t)} - \bar{\gamma} \bar{\Sigma}_{pq}^{(t)} \bar{\alpha}_{pq}^{(t)} \bar{\Sigma}_e^{(t)}} \right) d\tilde{\sigma}_{mn}. \quad (4-13)$$

그러므로 탄소성 구성방정식은 다음과 같다:

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = \bar{L}_{ijmn}^{-1} d\tilde{\sigma}_{mn} \quad (4-14)$$

$$\bar{L}_{ijkl}^{-1} = f \bar{E}_{ijkl}^{(t)-1} \bar{B}_{klmn}^{(t)} + (1-f) \bar{E}_{ijkl}^{(M)-1} \bar{B}_{klmn}^{(M)} + f \bar{B}_{klmn}^{(t)} \frac{3}{2} \frac{1-(1-\rho)\bar{\zeta}}{\rho} \frac{\bar{B}_{ijtu} \bar{B}_{klvw} \bar{\Sigma}_{tu} \bar{\Sigma}_{vw}}{\bar{\beta} \bar{\Sigma}_e^{2(t)} - \bar{\gamma} \bar{\Sigma}_{pq}^{(t)} \bar{\alpha}_{pq}^{(t)} \bar{\Sigma}_e^{(t)}}.$$

반면 위의 식이 응력-변형률 방정식으로 전환되면:

$$d\tilde{\sigma}_{ij} = \bar{E}_{ijkl} \left( d\tilde{\epsilon}_{kl} - \bar{f}^{(r)} \bar{\lambda}^{(r)} \bar{\Sigma}_{kl}^{(r)} \right) = \bar{L}_{ijkl} d\tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (4-15)$$

$$\bar{L}_{ijkl} = \bar{E}_{ijkl} - \bar{f}^{(r)} \frac{\left[ 1 - (1-\rho) \bar{\zeta} \right] \bar{B}_{vwxy}^{(r)} \bar{B}_{pqtu}^{(r)} \bar{A}_{rskl}^{(r)} \bar{E}_{ijvw} \bar{\Sigma}_{xy} \bar{E}_{pqrs} \bar{\Sigma}_{tu}}{D},$$

$$D \equiv [1 - (1 - \rho)\bar{\zeta}] \bar{B}_{abef}^{(r)} \bar{B}_{cdgh}^{(r)} \bar{\Sigma}_{ef} \bar{E}_{abcd}^{(r)} \bar{\Sigma}_{gh} + \rho \bar{\beta} \bar{B}_{abef}^{(r)} \bar{B}_{abgh}^{(r)} \bar{\Sigma}_{ef} \bar{\Sigma}_{gh} - \frac{2}{3} \rho \bar{\gamma} \bar{B}_{abef}^{(r)} \bar{\Sigma}_{ef} \bar{\alpha}_{ab}^{(r)} \bar{\Sigma}_e^{(r)}$$

이다.

### 2.4.2 복합재 II

복합재 II는 앞서 복합재 I와는 달리 기지와 계재물 모두 탄소성 변형에 노출되는 것으로 설정되었다. 그럼, 각 상의 항복함수는 동일한 형태로:

$$\bar{\theta}_I = \frac{1}{2} \bar{\Sigma}_{ij}^{(I)} \bar{\Sigma}_{ij}^{(I)} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_y^{(I)2}, \quad (4-16)$$

$$\bar{\theta}_M = \frac{1}{2} \bar{\Sigma}_{ij}^{(M)} \bar{\Sigma}_{ij}^{(M)} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_y^{(M)2} \text{ 이다.}$$

아울러 각 상의 소성변형은 각기 상이한 후방응력 전개식에 따르는 것으로 설정되었으며, 이에 대해 기지의 후방응력은 Phillips 법칙에 지배되며, 반면 계재물의 소성변형은 Armstrong-Frederick 법칙에 따르는 것으로 각각 가정되었다. 균질화 상태에서 복합재 II의 전체적인 변형율의 분해는:

$$d\bar{\epsilon}_{ij} = d\bar{\epsilon}_{ij}^e + d\bar{\epsilon}_{ij}^p = \bar{E}_{ijkl}^{-1} d\bar{\sigma}_{kl} + \bar{\lambda} \bar{\Sigma}_{ij}, \quad (4-17)$$

이며, 균질화 항복함수에 대한 일관성조건으로:

$$\begin{aligned} d\bar{\theta} &= f d\bar{\theta}^{(I)} + (1-f) d\bar{\theta}^{(M)} \quad (4-18) \\ &= f \left[ \frac{\partial \bar{\theta}^{(I)}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}^{(I)}} d\bar{\sigma}_{ij}^{(I)} + \frac{\partial \bar{\theta}^{(I)}}{\partial \bar{\alpha}_{ij}^{(I)}} d\bar{\alpha}_{ij}^{(I)} \right] + \\ &\quad (1-f) \left[ \frac{\partial \bar{\theta}^{(M)}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}^{(M)}} d\bar{\sigma}_{ij}^{(M)} + \frac{\partial \bar{\theta}^{(M)}}{\partial \bar{\alpha}_{ij}^{(M)}} d\bar{\alpha}_{ij}^{(M)} \right] \\ &= f \left[ \bar{\Sigma}_{ij}^{(I)} d\bar{\sigma}_{ij}^{(I)} - \bar{\Sigma}_{ij}^{(I)} d\bar{\alpha}_{ij}^{(I)} \right] + \\ &\quad (1-f) \left[ \bar{\Sigma}_{ij}^{(M)} d\bar{\sigma}_{ij}^{(M)} - \bar{\Sigma}_{ij}^{(M)} d\bar{\alpha}_{ij}^{(M)} \right] \\ &= f \bar{B}_{ijtu}^{(I)} \bar{B}_{jvuw}^{(I)} \left[ \bar{\Sigma}_{tu} d\bar{\sigma}_{vw} - \bar{\Sigma}_m d\bar{\alpha}_{vw}^{(AF)} \right] \\ &\quad + (1-f) \bar{B}_{ijtu}^{(M)} \bar{B}_{jvuw}^{(M)} \left[ \bar{\Sigma}_{tu} d\bar{\sigma}_{vw} - \bar{\Sigma}_m d\bar{\alpha}_{vw}^{(PH)} \right] \\ &= \left[ f \bar{B}_{uvvw}^{(I)} + (1-\bar{\zeta})(1-f) \bar{B}_{uvvw}^{(M)} \right] \bar{\Sigma}_m d\bar{\sigma}_{vw} \\ &\quad - \bar{\lambda}^p f \bar{B}_{uvvw}^{(I)} \bar{\beta} \bar{\Sigma}_{tu} \bar{\Sigma}_{vw} + \bar{\lambda}^p \frac{2}{3} f \bar{B}_{uvvw}^{(I)} \bar{\gamma} \bar{\Sigma}_{tu} \bar{\alpha}_{vw} \bar{\Sigma}_e = 0 \end{aligned}$$

$$\bar{B}_{uvvw}^{(r)} \equiv \bar{B}_{ijtu}^{(r)} \bar{B}_{jvuw}^{(r)}.$$

그럼 복합재 II에서의 균질화 소성배수  $\bar{\lambda}^p$  는:

$$\bar{\lambda}^p = \frac{\left[ f \bar{B}_{uvvw}^{(I)} + (1-\bar{\zeta})(1-f) \bar{B}_{uvvw}^{(M)} \right] \bar{\Sigma}_{tu}}{f \bar{B}_{pqrs}^{(I)} \left( \bar{\beta} \bar{\Sigma}_{pq} \bar{\Sigma}_{rs} - \frac{2}{3} \bar{\gamma} \bar{\Sigma}_{pq} \bar{\alpha}_{rs} \bar{\Sigma}_e \right)} d\bar{\sigma}_{vw} \text{ 이며,}$$

변형율-응력율 구성방정식은 (4-19)와 같다:

$$d\bar{\epsilon}_{ij} = \bar{L}_{ijkl}^{-1} d\bar{\sigma}_{kl}, \quad (4-19)$$

$$\bar{L}_{ijkl}^{-1} = \left[ \bar{E}_{ijkl}^{-1} - \frac{\left[ f \bar{B}_{mnlk}^{(I)} + (1-\bar{\zeta})(1-f) \bar{B}_{mnlk}^{(M)} \right] \bar{\Sigma}_{ij} \bar{\Sigma}_{mn}}{f \bar{B}_{pqrs}^{(I)} \left( \bar{\beta} \bar{\Sigma}_{pq} \bar{\Sigma}_{rs} - \frac{2}{3} \bar{\gamma} \bar{\Sigma}_{pq} \bar{\alpha}_{rs} \bar{\Sigma}_e \right)} \right].$$

마찬가지로 위의 구성방정식은 응력율-변형율 구성방정식으로 변환되면:

$$d\bar{\sigma}_{ij} = \bar{E}_{ijkl} \left( d\bar{\epsilon}_{kl} - d\bar{\epsilon}_{kl}^p \right) = \bar{L}_{ijkl} d\bar{\epsilon}_{kl}. \quad (4-20)$$

$$\bar{L}_{ijkl} = \bar{E}_{ijkl} - \frac{\left[ f \bar{B}_{pqrs}^{(I)} + (1-f)(1-\bar{\zeta}) \bar{B}_{pqrs}^{(M)} \right] \bar{E}_{ijtu} \bar{\Sigma}_{pq} \bar{E}_{rskl} \bar{\Sigma}_{tu}}{D}$$

$$D \equiv \left[ f \bar{B}_{abcd}^{(I)} + (1-f)(1-\bar{\zeta}) \bar{B}_{abcd}^{(M)} \right] \bar{\Sigma}_{ab} \bar{E}_{cdvw} \bar{\Sigma}_{vw} + \beta f \bar{B}_{abcd}^{(I)} \bar{\Sigma}_{ab} \bar{\Sigma}_{cd} - \frac{2}{3} \gamma f \bar{B}_{abcd}^{(I)} \bar{\Sigma}_{ab} \bar{\alpha}_{cd} \bar{\Sigma}_e$$

와 같이 표현될 수 있다.

### 2.5 결함상태 복합재의 구성방정식

앞 장에서는 무결함 상태의 복합재에 대한 균질화 탄소성 구성방정식에 대해서 언급되었으며, 여기서는 일차원 결함인자를 기반으로 탄소성 구성방정식이 변환되었다. 계면 박리에 따른 결함 인자는:

$$\phi^d = 6 \frac{f f_d [u_i]}{d_p}, \quad d\phi^d = 6 \frac{f f_d d[u_i]}{d_p}. \quad (4-21)$$

계면결함이 고려되면, 각 상의 관계식들이 적용된다:

$$\hat{L}_{ijkl}^{-1(r)} \equiv \frac{1}{1-\phi^r} \left( \bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(r)} H_{kl}^{(r)} \right), \quad (4-22)$$

$$\hat{\epsilon}_{ij} = (1-\phi^d) \bar{\epsilon}_{ij}, \quad (4-23)$$

$$d\hat{\epsilon}_{ij} = (1 - \phi^d) d\tilde{\epsilon}_{ij} - d\phi^d \tilde{\epsilon}_{ij}, \quad (4-24)$$

$$fd\hat{\epsilon}_{ij}^{(r)} + (1-f)d\hat{\epsilon}_{ij}^{(M)} = (1 - \phi^d) d\tilde{\epsilon}_{ij} - d\phi^d \tilde{\epsilon}_{ij}, \quad (4-25)$$

$$\begin{aligned} & f \frac{1}{1 - \phi^{(r)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(r)} H_{kl}^{(r)}) d\bar{\sigma}_{kl}^{(r)} + \\ & (1-f) \frac{1}{1 - \phi^{(M)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(M)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(M)} H_{kl}^{(M)}) d\bar{\sigma}_{kl}^{(M)} \\ & = (1 - \phi^d) d\tilde{\epsilon}_{ij} - d\phi^d \tilde{\epsilon}_{ij} \\ & \left[ f \frac{1}{1 - \phi^{(r)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(r)} H_{kl}^{(r)}) \bar{B}_{mnl}^{(r)} + \right. \\ & \left. (1-f) \frac{1}{1 - \phi^{(M)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(M)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(M)} H_{kl}^{(M)}) \bar{B}_{mnl}^{(M)} \right] d\tilde{\sigma}_{kl} \\ & = (1 - \phi^d) d\tilde{\epsilon}_{ij} - d\phi^d \tilde{\epsilon}_{ij}. \end{aligned}$$

따라서 일레로 복합재 II에 대해서 다음을 얻는다:

$$\begin{aligned} d\tilde{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{1 - \phi^d} \left[ f \frac{1}{1 - \phi^{(r)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(r)} H_{kl}^{(r)}) \bar{B}_{mnl}^{(r)} + \right. \\ & \left. (1-f) \frac{1}{1 - \phi^{(M)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(M)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(M)} H_{kl}^{(M)}) \bar{B}_{mnl}^{(M)} \right] d\tilde{\sigma}_{kl} + \frac{d\phi^d}{1 - \phi^d} \tilde{\epsilon}_{ij}, \\ \therefore d\tilde{\epsilon}_{ij} &= d\tilde{\epsilon}_{ij}(\phi^r, \hat{L}^r, d\tilde{\sigma}). \end{aligned} \quad (4-26)$$

### 3. 국부적 변형 집중

전단밴드로 알려진 좁은 구역 내 소성변형 집중은 결함 및 영구적 손상을 발생시키며, 궁극적인 파단 발생으로 부품의 구조적 건전성을 잃게 된다. 하지만, 구성방정식이 복잡해짐에 따라 강성의 결정자 ( $\det(n_i L_{ijk} n_j)$ )에 대한 non-trivial 해를 근거로 전단밴드 발생조건(onset)을 얻는 기존의 박리분석(bifurcation analyses)[64]의 직접적인 접근이 용이치 않다. 대신 섭동 ( $\Delta u_i|_{t=0} \neq 0$ ,  $\Delta \dot{u}_i \neq 0$ ) 분석을[65, 66] 이용, 정성적 비교로 제어 요소들에 의한 영향이 간접적 분석이 본 연구에서 수행되었다.

결함인자와의 결합으로 (5-1)의 관계식을 얻는다. 결함인자 영향에 앞서, 별도로 후방응력의 전개의 영향에 대한 분석을 위해 등방경화, 각 상의 내부결합 및 계면에서의 박리는 무시되었다:

$$\Delta \tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{L}_{ijkl}^{-1} \Delta \tilde{\sigma}_{kl} + \Delta \tilde{L}_{ijkl}^{-1} \tilde{\sigma}_{kl}. \quad (5-1)$$

$$\Delta \tilde{\epsilon}_{ij} \cong \tilde{L}_{ijkl}^{-1} \Delta \tilde{\sigma}_{kl}. \quad (5-2)$$

$$d\sigma_y = 0, \quad (\text{등방경화 무시})$$

$$\phi^d = d\phi^d = 0, \quad \phi^{(r)} = d\phi^{(r)} = 0 \quad (\text{결함 무시}).$$

계재물만이 소성변형을 겪는 복합재 I의 경우, 소성변형 거동은 이중 후방응력 경화모델에서의 지배분율(fractional factor:  $\rho$ )로 결정되는 지배적인 이동경화 전개식과 Phillips 경화계수( $\zeta$ )에 의해 결정된다. 한편, 앞에서 유도된 변형률 성동 분석 식은:

$$\Delta \tilde{\epsilon}_{ij} = \left[ f^{(r)} (\bar{E}_{ijmn}^{(r)-1} + \bar{R}_{ijmn}^{(r)-1}) \bar{B}_{mnl}^{(r)} + f^{(M)} \bar{E}_{ijmn}^{(M)-1} \bar{B}_{mnl}^{(M)} \right] \Delta \tilde{\sigma}_{kl} \quad (5-3)$$

과 같이 표현될 수 있으며, 단순화를 위해 다음의 가정도 도입되었다:  $\bar{B}_{ijkl}^{(r)} \cong \text{const.}$ ,  $\Delta \tilde{\sigma}_{kl} \geq 0$ .

예로 복합재 I에 대해 지배분율과 Phillips 경화계수에 대한 편미분으로 다음의 결과를 얻는다:

$$d\tilde{\epsilon}_{ij}^p = f^{(r)} d\tilde{\epsilon}_{ij}^{p(r)} = f^{(r)} \bar{\lambda}^{p(r)} \bar{\Sigma}_{ij}^{(r)}, \quad (5-4)$$

$$\bar{\lambda}^{p(r)} = \frac{[1 - (1 - \rho)\zeta]}{\rho} \frac{\bar{\Sigma}_{kl}^{(r)}}{\frac{2}{3} \bar{\beta} \bar{\Sigma}_e^{(r)2} - \frac{2}{3} \bar{\gamma} \bar{\alpha}_{pq}^{(r)} \bar{\alpha}_{pq}^{(r)} \bar{\Sigma}_e^{(r)}} d\tilde{\sigma}_{kl}^{(r)},$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \Delta \tilde{\epsilon}_{ij}^p \right) = f^{(r)} \bar{B}_{ijmn}^{(r)} \left( \frac{-1 + \zeta}{\rho^2} \right) \frac{\bar{\Sigma}_{mn}^{(r)} \bar{\Sigma}_{kl}^{(r)}}{\frac{2}{3} \bar{\beta} \bar{\Sigma}_e^{(r)2} - \frac{2}{3} \bar{\gamma} \bar{\alpha}_{pq}^{(r)} \bar{\alpha}_{pq}^{(r)} \bar{\Sigma}_e^{(r)}} \Delta \tilde{\sigma}_{kl}^{(r)} \leq 0, \quad (5-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \Delta \tilde{\epsilon}_{ij}^p \right) = f^{(r)} \bar{B}_{ijmn}^{(r)} \left( \frac{-1 + \rho}{\rho} \right) \frac{\bar{\Sigma}_{mn}^{(r)} \bar{\Sigma}_{kl}^{(r)}}{\frac{2}{3} \bar{\beta} \bar{\Sigma}_e^{(r)2} - \frac{2}{3} \bar{\gamma} \bar{\alpha}_{pq}^{(r)} \bar{\alpha}_{pq}^{(r)} \bar{\Sigma}_e^{(r)}} \Delta \tilde{\sigma}_{kl}^{(r)} \leq 0. \quad (5-6)$$

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \bar{\zeta} \leq 1, \quad f^{(r)} = f, \quad f^{(M)} = 1 - f.$$

따라서, Armstrong-Frederick 이동경화가 지배적일수록 소성변형의 증가가 감소하며(negative growth in perturbation), 아울러 높은 Phillips 경화계수도 섭동의 증가를 억제하는 역할을 하는 것으로 나타났다. 이는 위의 두 개의 제어 변수의 변화에 따른 경화 효과의 증대가 원인으로 파악된다. 한편, 계재물의 체적분율에 따른 영향의 분석을 위해서, 유사하나 보다 더 단순화된 일차원적 섭동 분석이 수행되었으며, 그 결과는 다음에서 보는 바와 같다:

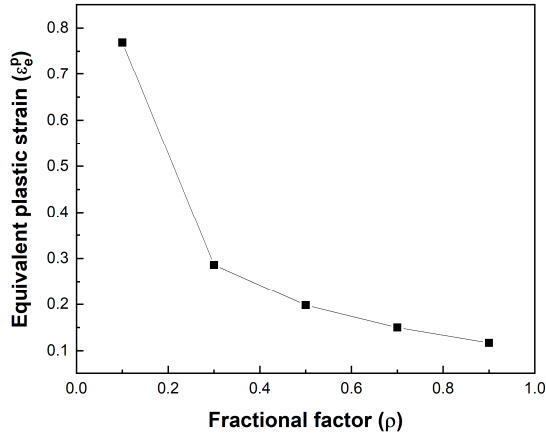


Fig. 3 Variation of plastic strain at the center of work-piece showing the effect of fractional factor ( $\rho$ ):  $\bar{\zeta} = 0.4$

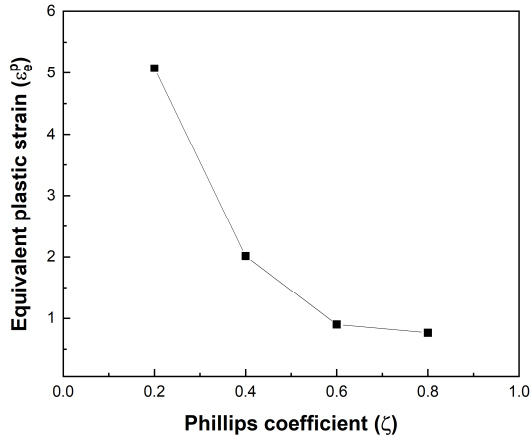


Fig. 4 Variation of plastic strain with respect to Phillips coefficient ( $\zeta$ ) at the center of work-piece:  $\rho = 0.5$

$$\frac{\partial}{\partial f} \left( \Delta \tilde{\epsilon}^p \right) = \frac{\bar{E}^{(l)}}{\bar{\beta} \bar{E}} (\bar{E}^{(M)} - \bar{\beta}) \Delta \tilde{\sigma} \geq 0, \quad \bar{E}|_{M \geq \bar{\beta}} \text{ 일 때} \quad (5-7)$$

섭동 분석 결과, 계재물의 체적분율 ( $f$ )이 증가에 따라 분석 값은 증가한다. 이는 일반적으로 경도가 높은 계재물 체적분율 증가로 복합재의 강도는 증가하나, 취성 (brittleness)의 증대에 따라 복합재가 변형에 취약해지는 현상을 반영해 주고 있다. Fig. 3 과 4는 위에서 후방응력 지배분율 (5-5) 및 Phillips 경화계수 (5-6)의 영향에 대한 유한변분 (Finite difference model) 수치해석으로, 섭동 분석 결과들과

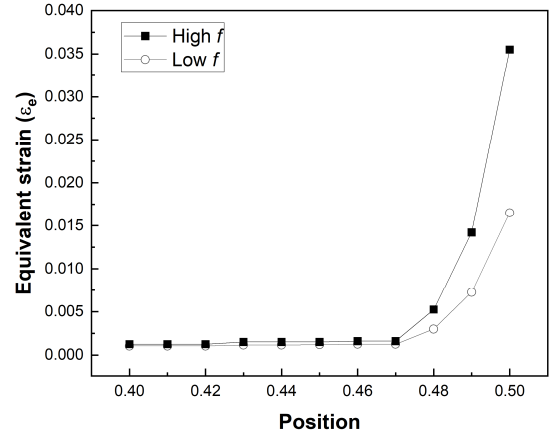


Fig. 5 Distribution of equivalent strain of half of work-piece: effect of volumetric fraction ( $f$ ) of inclusion:  $\bar{\zeta} = 0.4$ ,  $\rho = 0.5$

정성적으로 비교될 수 있다.

계재물 및 기지가 동시에 소성변형을 겪는 복합재 II 경우에는 균질화된 상태 및 내부변수를 이용, 균질화 항복함수를 적용하여 소성 흐름이 얻으며, 마찬가지로 이번에도 각종 결함은 무시되었다. 후방응력의 전개가 단순한 Prager 법칙에 따른다면:

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{2} (\tilde{s}_{ij} - \tilde{\alpha}_{ij}) (\tilde{s}_{ij} - \tilde{\alpha}_{ij}) - \frac{1}{3} \tilde{\sigma}_y^2 = \frac{1}{2} \tilde{\Sigma}_{ij} \tilde{\Sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \tilde{\sigma}_y^2. \quad (5-8)$$

$$d\tilde{\theta} = \tilde{\Sigma}_{ij} d\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\lambda} \tilde{\beta} \tilde{\Sigma}_{ij} \tilde{\Sigma}_{ij} = 0,$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\tilde{\Sigma}_{kl}}{2/3 \tilde{\beta} \tilde{\Sigma}_e} d\tilde{\sigma}_{kl}, \quad (5-10)$$

$$d\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\tilde{\Sigma}_{ij} \tilde{\Sigma}_{kl}}{2/3 \tilde{\beta} \tilde{\Sigma}_e} d\tilde{\sigma}_{kl}, \quad d\tilde{\epsilon}_{ij} = \left[ \tilde{E}_{ijkl}^{-1} + \frac{\tilde{\Sigma}_{ij} \tilde{\Sigma}_{kl}}{2/3 \tilde{\beta} \tilde{\Sigma}_e} \right] d\tilde{\sigma}_{kl}$$

그럼, 계재물 체적분율에 대한 미분으로:

$$\frac{\partial}{\partial f} \left[ \Delta \left( \frac{\tilde{\epsilon}}{\tilde{\epsilon}} \right) \right] \cong \frac{\bar{\beta}_M - \bar{\beta}_l}{(1-f)^2 \bar{\beta}_M^2} \Delta \tilde{\sigma} \geq 0, \quad \bar{\beta}_M \geq \bar{\beta}_l. \quad (5-11)$$

수치해석 결과는 Fig. 5와 같으며, (5-11)의 정성적 섭동 분석 결과와 마찬가지로 계재물의 체적분율의 증가로 국부적 소성변형 집중현상이 증가한다.

앞장에서 유도된 구성방정식은 다시 (5-12)와 같이 결함이 고려된 섭동성장으로 표현된다:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\epsilon}_{ij} \cong & \frac{1}{1-\phi^d} \left[ f \frac{1}{1-\phi^{(r)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(r)} H_{kl}^{(r)}) \bar{B}_{mnkl}^{(r)} + \right. \\ & \left. (1-f) \frac{1}{1-\phi^{(M)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(M)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(M)} H_{kl}^{(M)}) \bar{B}_{mnkl}^{(M)} \right] \Delta \tilde{\sigma}_{kl} + \\ \Delta \left\{ \frac{1}{1-\phi^d} \left[ f \frac{1}{1-\phi^{(r)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(r)} H_{kl}^{(r)}) \bar{B}_{mnkl}^{(r)} + \right. \right. \\ & \left. \left. (1-f) \frac{1}{1-\phi^{(M)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(M)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(M)} H_{kl}^{(M)}) \bar{B}_{mnkl}^{(M)} \right] \tilde{\sigma}_{kl} \right\}. \quad (5-12) \end{aligned}$$

위의 성장식에서 2번째 항의 영향은 상대적으로 적으므로, (5-13)과 같이 단순화가 가능하다:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\epsilon}_{ij} \cong & \frac{1}{1-\phi^d} \left[ f \frac{1}{1-\phi^{(r)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(r)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(r)} H_{kl}^{(r)}) \bar{B}_{mnkl}^{(r)} + \right. \\ & \left. (1-f) \frac{1}{1-\phi^{(M)}} (\bar{L}_{ijkl}^{(M)-1} + \hat{\epsilon}_{ij}^{(M)} H_{kl}^{(M)}) \bar{B}_{mnkl}^{(M)} \right] \Delta \tilde{\sigma}_{kl} \quad (5-13) \end{aligned}$$

더욱이 각 상의 내부결합이 무시되면, 균질화 결합 인자는 다음과 같이 계면결합만으로 간략화 할 수 있다.

$$\tilde{M}_{ijkl} = M^{(d)} = \frac{1}{1-\Phi^d}. \quad (5-14)$$

앞서 언급되었듯이 계면결합은 소재 물성, 계재물 체적분율 뿐만 아니라 물질 계수( $S_0$ )를 결정하는 계재물 입자크기와 밀접한 관련이 있다:

$$\Phi_d = 6\bar{f}_i \times \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{(\sigma_{kk}^{(M)} - \sigma_{cr})^m}{S_0^m} \right] \left[ \frac{(1-\nu_M)\sigma_{kk}^{(M)} - (1+\nu_M)\sigma_{lim}}{2E_M} - \frac{\sigma_{lim}}{3K_I} \right] \right\} \quad (5-15)$$

일반적으로 계재물 크기의 증가에 따라 영률에 대한 영향은 비교적 적은 편이나, 전체적인 항복강도 및 파손에 대한 민감도는 증대된다[67, 68]. 입자 크기의 영향은 성장분석을 통해 다음과 같다:

$$\Delta \tilde{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{1-\Phi_d} \tilde{L}_{ijkl}^{-1} \Delta \tilde{\sigma}_{kl}, \quad (5-16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \tilde{\epsilon}_{ij}}{\partial d_p} = & \bar{f}^{(r)} \frac{mK_c}{d_p^{3/2}} \frac{1}{(1-\Phi_d)^2} \frac{(\sigma_{kk}^{(M)} - \sigma_{cr})^{m-1}}{S_0^m} \quad (5-17) \\ & \times \exp \left[ - \left( \frac{\sigma_{kk}^{(M)} - \sigma_{cr}}{S_0} \right)^m \right] \tilde{L}_{ijkl}^{-1} \Delta \tilde{\sigma}_{kl} \geq 0. \end{aligned}$$

여기서  $K_c$ 는  $\sigma_{cr}$  계면 강도를 결정하는 고유 물성이다. 따라서 주어진 계재물 체적분율에 대해서 입자 크기의 증가로 성장이 증가 또는 국부적 변형 집중현상의 가능성이 높아짐을 알 수 있다.

다음으로는 일축 인장( $\sigma_{11} > 0$ )에서의 응력 변화에 따른 성장 분석이 수행되었으며, 모든 변수들은 균질화 상태에서 일차원으로 변환되었다:

$$\sigma_H = \sigma_{kk} = \sigma_{11}, \quad (\sigma_{ij} = 0, \sigma_{11} \neq 0) \quad (5-18)$$

그럼  $\sigma_e = \sigma_H = |\sigma_{11}|$ . 또한 편의를 위해:

$$A \equiv f(\sigma_H / \sigma_e).$$

결합에 대한 매개변수  $\tilde{Y}$ 와  $\tilde{B}$ 에 대한 각 상태 및 내부변수에 의한 편미분은 다음과 같이 열거된다:

$$\tilde{Y} = - \frac{A}{(1-\tilde{\phi})^2} \frac{|\tilde{\sigma}_{11}|}{2\tilde{E}}, \quad (5-19)$$

$$\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{\sigma}_{11}} = - \frac{A}{(1-\tilde{\phi})^2} \frac{1}{2\tilde{E}}, \quad \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{\phi}} = - \frac{A}{(1-\tilde{\phi})^3} \frac{|\tilde{\sigma}_{11}|}{\tilde{E}}, \quad (5-20)$$

$$\tilde{B} = \frac{4\tilde{E}}{\tilde{\sigma}^2} (1-\tilde{\phi}) [\ln(1-\tilde{\phi})]^2, \quad (5-21)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{\phi}} = - \frac{4\tilde{E}}{\tilde{\sigma}^2} \ln(1-\tilde{\phi}) [\ln(1-\tilde{\phi}) + 2], \quad (5-22)$$

가령 결합 발생에 따른 경화효과가 무시된다면, 즉  $d\tilde{B} = 0$ 으로 가정되면, 성장에 대한 일축 방향 응력의 영향은 (5-23)과 같이 나타난다:

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\epsilon}}{\partial |\tilde{\sigma}_{11}|} = \frac{1}{(1-\tilde{\phi})^2} \left( \tilde{\epsilon} \frac{1}{|\tilde{\sigma}_{11}|^2} \right) \Delta \tilde{\sigma} \geq 0, \quad (\tilde{\epsilon} > 0, \tilde{\sigma} > 0). \quad (5-23)$$

따라서 당연한 물리적 현상이지만, (5-23)에서 밝혀

진 바와 같이 인장응력에 대해서 성장은 증가함과 동시에 국부적 소성변형 집중과 증가한다.

한편 앞서 수치해석과 간단한 분석을 통해 계재물 체적분율에 따른 국부적 변형집중에 대해 파악된 바 있으나, 복합재 I의 경우, 기지의 탄성 영률이 계재물의 경화도 보다 높다는 전제( $\bar{E}_{lm} \geq \bar{\beta}$ ) (식 5-7), 또 복합재 II의 경우 상대적인 경화도 차이가 있다는 전제( $\bar{\beta}^{(M)} \geq \bar{\beta}^{(l)}$ ) (5-11)가 각기 적용되었다. 여기서는 강소성(rigid plasticity) 구성방정식을 적용, 성장에서의 계재물 체적분율의 영향에 대한 분석이 재차 수행되었다. 열역학적으로 탄성 에너지가 결함 인자의 함수로 표현된 근거가 적용되었다. 강소성에서 탄성변형은 무시되며 다음과 같다:

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} \cong d\tilde{\epsilon}_{ij}^p = \tilde{\lambda}^p \tilde{\Sigma}_{ij}, \quad (5-23)$$

열역학적으로 구해진 Armstrong-Frederick 이동경화에 따른 균질화된 항복함수에 대한 일관성조건의 적용으로 다음과 같은 변형율/응력을 관계식을 얻는다:

$$\begin{aligned} d\tilde{\theta} &= \tilde{\Sigma}_{ij} d\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\Sigma}_{ij} d\tilde{\alpha}_{ij}, \quad (5-24) \\ &= \tilde{\Sigma}_{ij} d\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\Sigma}_{ij} (\tilde{\beta} d\tilde{\epsilon}_{ij} - \tilde{\gamma} \tilde{\alpha}_{ij} d\tilde{\epsilon}_e) \\ &= \tilde{\Sigma}_{ij} d\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\lambda}^p \tilde{\beta} \tilde{\Sigma}_{ij} \tilde{\Sigma}_{ij} + \tilde{\lambda}^p \frac{2}{3} \tilde{\gamma} \tilde{\Sigma}_{ij} \tilde{\alpha}_{ij} \tilde{\Sigma}_e, \end{aligned}$$

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} \cong \frac{\tilde{\Sigma}_{ij} \tilde{\Sigma}_{kl}}{\tilde{\beta} \tilde{\Sigma}_{pq} \tilde{\Sigma}_{pq} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma} \tilde{\Sigma}_{pq} \tilde{\alpha}_{pq} \tilde{\Sigma}_e} d\tilde{\sigma}_{kl} = \tilde{R}_{ijkl}^{-1} d\tilde{\sigma}_{kl}, \quad (5-25)$$

$$\tilde{R}_{ijkl}^{-1} \cong \frac{\tilde{\Sigma}_{ij} \tilde{\Sigma}_{kl}}{\tilde{\beta} \tilde{\Sigma}_{pq} \tilde{\Sigma}_{pq} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma} \tilde{\Sigma}_{pq} \tilde{\alpha}_{pq} \tilde{\Sigma}_e}, \quad \tilde{R}_{ijkl}^{-1} \neq \tilde{R}_{ijkl}^{-1}(\bar{E}^{(r)})$$

$$\tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{M}_{ijkl}^{-1} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (5-26)$$

$$d\tilde{\epsilon}_{ij} = \tilde{M}_{ijkl}^{-1} d\tilde{\epsilon}_{kl} + d\tilde{M}_{ijkl}^{-1} \tilde{\epsilon}_{kl}, \quad (5-27)$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\epsilon}_{ij} &= \tilde{M}_{ijmn} \tilde{R}_{mnlk}^{-1} d\tilde{\sigma}_{kl} + \tilde{M}_{ijmn} d\tilde{M}_{mnlk}^{-1} \tilde{\epsilon}_{kl} \\ &= \frac{1}{1-\tilde{\phi}} \tilde{R}_{mnlk}^{-1} d\tilde{\sigma}_{kl} + \frac{1}{1-\tilde{\phi}} \tilde{\epsilon}_{kl}^p d\tilde{\phi}, \end{aligned}$$

$$\therefore \Delta \tilde{\epsilon} \cong \frac{1}{1-\tilde{\phi}} \left( \tilde{R}^{-1} + \tilde{\epsilon} \frac{\tilde{Y} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{\sigma}}}{2\tilde{B} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{\phi}} - \tilde{Y} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{\phi}}} \right) \Delta \tilde{\sigma}. \quad (5-28)$$

성장 분석을 위해 보편적으로 일상에서 관찰되는

다음의 물리적 조건들이 적용되었다:

$$\begin{aligned} |\bar{\sigma}_{11}| &= \text{const.}, \quad \bar{E}^{(l)} \gg \bar{E}^{(M)}, \quad \tilde{R} \ll \tilde{E}, \quad (5-29) \\ \bar{R}^{(r-1)} &\neq 0, \quad \bar{R}^{(r-1)} \geq \bar{R}^{(M-1)}. \end{aligned}$$

탄성 에너지로부터 얻은 결함과 관련된 항들은 (5-30)과 같이 간략화 되었다:

$$\tilde{Y} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{\sigma}} = \frac{1}{\tilde{E}} P, \quad P \equiv \frac{1}{4} \frac{A^2}{(1-\tilde{\phi})^4} |\bar{\sigma}_{11}| \geq 0, \quad (5-30)$$

$$\tilde{Y} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{\phi}} = \frac{1}{\tilde{E}^2} Q, \quad Q \equiv \frac{1}{2} \frac{A^2}{(1-\tilde{\phi})^5} |\bar{\sigma}_{11}|^2 \geq 0,$$

$$\tilde{B} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \tilde{\phi}} = 0, \quad (\text{결함에 의한 경화효과 무시})$$

따라서,

$$\Delta \tilde{\epsilon} = \frac{1}{1-\tilde{\phi}} \left[ \tilde{R}^{-1} - \tilde{\epsilon} P Q^{-1} \right] \Delta \tilde{\sigma}, \quad (5-31)$$

$$d\tilde{\phi} = - \frac{\tilde{Y} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{\sigma}}}{\tilde{Y} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{\phi}}} d\tilde{\sigma}.$$

$$\tilde{R}^{-1} \cong \frac{1}{[f\bar{\beta}^{(l)} + (1-f)\bar{\beta}^{(M)}] - [f\bar{\gamma}^{(l)} + (1-f)\bar{\gamma}^{(M)}] \tilde{\alpha}_e},$$

$$\tilde{E} \cong f\bar{E}^{(l)} + (1-f)\bar{E}^{(M)} \quad \text{이므로,}$$

$$\frac{\partial \Delta \tilde{\epsilon}}{\partial f} = \frac{\partial \Delta \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{R}^{-1}} \frac{\partial \tilde{R}^{-1}}{\partial f} + \frac{\partial \Delta \tilde{\epsilon}}{\partial \tilde{E}} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial f} \quad (5-32)$$

$$= \frac{1}{1-\tilde{\phi}} \left[ \frac{(\bar{\beta}^{(M)} - \bar{\beta}^{(l)}) - (\bar{\gamma}^{(M)} - \bar{\gamma}^{(l)}) \tilde{\alpha}_e}{\{[f\bar{\beta}^{(l)} + (1-f)\bar{\beta}^{(M)}] - [f\bar{\gamma}^{(l)} + (1-f)\bar{\gamma}^{(M)}] \tilde{\alpha}_e\}^2} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} (1-\tilde{\phi}) \frac{\bar{E}^{(l)} - \bar{E}^{(M)}}{\bar{E}^2} \right] \Delta \tilde{\sigma} \geq 0.$$

계재물의 체적분율의 국부적 소성변형 집중에 대한 효과를 보여주기 위해서는 앞서 언급된 분석과 달리  $(\bar{\beta}^{(M)} - \bar{\beta}^{(l)}) - (\bar{\gamma}^{(M)} - \bar{\gamma}^{(l)}) \tilde{\alpha}_e \geq 0$  이라는 조건이 별도로 요구되며, 일반적으로 강도가 높은 계재물의 변형에 의한 경화정도는 기지에 비해 낮다 ( $\bar{\beta}^{(M)} > \bar{\beta}^{(l)}$ ). 상대적으로 탄성계수 영률이 높은 계재물의 체적분율이 증가할수록 성장 또한 증대되는 것으로 간주해도 무방할 것으로 보인다.

## 4. 결론

본 연구에서 열역학을 기반으로 결함인자를 포함한 내부변수 전개식이 획득되었으며, 입자강화 복합재를 대상으로 등은 변형률 독립 탄소성 구성방정식이 유도되었다. Mori-Tanaka 기법을 이용, 응력-변형을 관계식 균질화에 적용되었으며, 연속체 결함역학을 적용하여 상 내부와 계면 결함인자들이 설정되었다. 더욱이 국부적 소성변형 집중 분석에 보다 유용한 이동경화식이 이용되었으며, 후방응력의 전개로는 유통성이 탁월한 이중 이동경화식의 조합으로 구성되었다. 우선 무결함 상태의 탄소성 구성방정식 유도 후, 연속체 결함인자와의 조합으로 명목적 구성방정식으로서의 변환이 이루어졌다. 더욱이 전통적인 박리분석을 대신해 정성적인 비교/분석을 위해 성장분석이 수행되었다. 본 연구를 통해:

(1) 내부변수의 전개를 통해 광범위한 소성 변형 및 국부적 변형집중이 묘사될 수 있다.

(2) 또한 복합재에서의 계재물의 체적분율과 입자의 크기가 국부적 소성변형 집중에 심대한 영향을 줌이 밝혀졌다.

본 연구에서는 열역학을 기반으로 결함인자는 탄성에너지에 결정하는 내부변수의 함수로 표현되었다. 한편 결함 인자는 일반적으로 변형율의 함수로 표현되나, 응력율의 함수로 표현되었다. 따라서 후속 연구에서는 연속체 결함이 소성변형의 함수로 표현되는 구성방정식과 그에 따른 국부적 소성변형 집중에 대한 후속 연구가 필요하다.

## 후 기

이 논문은 2023년 정부의 재원으로 수행된 연구 결과임.

## REFERENCES

- [1] L. F. Kawashita, S. R. Hallett, 2012, A Crack Tip Tracking Algorithm for Cohesive Interface Element Analysis of Fatigue Delamination Propagation in Composite Materials. *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 49, pp. 2898~2913, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2012.03.034>
- [2] X. Liu, G. Hu, 2005, A Continuum Micromechanical Theory of Overall Plasticity for Particulate Composites including Particle Size Effect, *Int. J. Plast. Vol. 21*, pp. 777~799, doi:10.1016/j.ijplas.2004.04.014
- [3] J. L. Chaboche, S. Kruch, J. F. Maire, T. Pottier, 2001, Towards a Micromechanics based Inelastic and Damage Modeling of Composites, *Int. J. Plast. Vol. 17*, pp. 411~439, PII: S0749-6419(00)00056-5
- [4] I. Doghri, L. Tinel, 2005, Micromechanical Modeling and Computation of Elasto-Plastic Materials Reinforced with Distributed-Orientation Fibers, *Int. J. Plast. Vol. 21*, pp. 1919~1940, doi:10.1016/j.ijplas.2004.09.003
- [5] S. Mercier, A. Molinari, 2009, Homogenization of Elastic-Viscoplastic Heterogeneous Materials: self-consistent and Mori-Tanaka schemes, *Int. J. Plast.*, Vol. 25, pp. 1024~1048, doi:10.1016/j.ijplas.2008.08.006
- [6] V. Muller, M. Kabel, H. Andra, T. Bohlke, 2015, Homogenization of Linear Elastic Properties of Short-Fiber Reinforced Composites - A comparison of Mean Field and Voxel-based methods, *Int. J. Solid Struct. Vol. 67-68*, pp. 56~70, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.02.030>
- [7] J. L. Chaboche, P. Kanoute, A. Roos, 2005, On the Capabilities of Mean-field Approaches for the Description of Plasticity in Metal Matrix Composites, *Int. J. Plast. Vol. 21*, pp. 1409~1434, doi:10.1016/j.ijplas.2004.07.001
- [8] O. Pierard, J. LLorca, J. Segurado, I. Doghri, 2007, Micromechanics of Particle-Reinforced Elasto-Viscoplastic Composites: Finite Element Simulations versus Affine Homogenization, *Int. J. Plast. Vol. 23*, pp. 1041~1060, doi:10.1016/j.ijplas.2006.09.003
- [9] B. Miled, I. Doghri, L. Brassart, L. Delannay, 2013, Micromechanical Modeling of Coupled Viscoelastic-Viscoplastic Composites based on an Incrementally Affine Formulation, *Int. J. Solid Struct. Vol. 50*, pp. 1755~1769, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.02.004>
- [10] S. Guo, G. Kang, J. Zhang, 2013, A Cyclic Visco-Plastic Constitutive Model for Time-dependent

- Ratchetting of Particle-Reinforced Metal Matrix Composites, *Int. J. Plast.* Vol. 40, pp. 101 ~ 125, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.07.006>
- [11] F. Dinartz, H. Sabar, 2017, New Micromechanical Modeling of the Elastic Behavior of Composite Materials with Ellipsoidal Reinforcements and Imperfect Interfaces, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 108, pp. 254 ~ 262, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.12.024>
- [12] G. Formica, W. Lacarbonara, 2017, Three-Dimensional Modeling of Interfacial Stick-Slip in Carbon Nanotube Nanocomposites, *Int. J. Plast.*, Vol. 88, pp. 204 ~ 217, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2016.10.012>
- [13] H. Tan, Y. Huang, C. Liu, P.H. Geubelle, 2005, The Mori-Tanaka Method for Composite Materials with Nonlinear Interface Debonding, *Int. J. Plast.* Vol. 21, pp. 1890 ~ 1918, doi:10.1016/j.ijplas.2004.10.001
- [14] H. Tan, Y. Huang, C. Liu, G. Ravichandran, H.M. Inglis, P.H. Geubelle, 2007, The Uniaxial Tension of Particulate Composite Materials with Nonlinear Interface Debonding, *Int. J. Solid Struct.* Vol. 44, pp. 1809 ~ 1822, doi:10.1016/j.ijsolstr.2006.09.004
- [15] K. Matous, 2003, Damage Evolution in Particulate Composite Materials, *Int. J. Solid Struct.* Vol. 40, pp. 1489 ~ 1503, doi:10.1016/S0020-7683(02)00669-8
- [16] K. Tohgo, T. Itoh, 2005, Elastic and Elastic-Plastic Singular Fields around a Crack-tip in Particulate-Reinforced Composites with Progressive Debonding Damage, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 42, pp. 6566 ~ 6585, doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.04.013
- [17] G. Z. Voyiadjis, T. Park, 1995, Local and Interfacial Damage Analysis of Metal Matrix Composites, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 33, pp. 1595 ~ 1621
- [18] C. Polizzotto, 2008, Thermodynamics-based Gradient Plasticity Theories with an Application to Interface Models, *Int. J. Solid Struct.* Vol. 45, pp. 4820 ~ 4834, doi:10.1016/j.ijsolstr.2008.04.013
- [19] J. L. Chaboche, A. Gaubert, P. Kanouté, A. Longuet, F. Azzouz, M. Mazière, 2013, Viscoplastic Constitutive Equations of Combustion Chamber Materials including Cyclic Hardening and Dynamic Strain Aging, *Int. J. Plast.*, Vol. 46, pp. 1 ~ 22, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.09.011>
- [20] L. Zhang, W. Yu, 2017, Constitutive Modeling of Damageable Brittle and Quasi-brittle Materials, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 117, pp. 80 ~ 90, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.04.002>
- [21] J. L. Chaboche, 1988, Continuum Damage Mechanics: Part I - General Concept, *ASME, J. Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 59 ~ 64.
- [22] R. K. Abu Al-Rub, G. Z. Voyiadjis, 2003, On the Coupling of Anisotropic Damage and Plasticity Models for Ductile Materials, *Int. J. Solid Struct.* Vol. 40, pp. 2611 ~ 2643, doi:10.1016/S0020-7683(03)00109-4
- [23] N. Bonora, 1997, A Nonlinear CDM Model for Ductile Failure, *Eng. Fract. Mech.* Vol. 58, No. 1/2, pp. 11 ~ 28.
- [24] J. Lemaitre, 1986, Local Approach of Fracture, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 25, iss. 5/6, pp. 523 ~ 537
- [25] L. Zhang, W. Yu, 2014, A Micromechanics Approach to Homogenizing Elasto-Viscoplastic Heterogeneous Materials, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 51, pp. 3878 ~ 3888, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.07.003>
- [26] G. Z. Voyiadjis, R. J. Dorgan, 2007, Framework using Functional Forms of Hardening Internal State Variables in Modeling Elasto-Plastic-Damage Behavior, *Int. J. Plast.*, Vol. 23, pp. 1826 ~ 1859, doi:10.1016/j.ijplas.2007.03.012
- [27] G. Borino, B. Failla, F. Parrinello, 2003, A Symmetric Nonlocal Damage Theory, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 40, pp. 3621 ~ 3645, doi:10.1016/S0020-7683(03)00144-6
- [28] A. K. Gupta, B. P. Patel, Y. Nath, 2013, Continuum Damage Modeling of Composite Laminated Plates using Higher Order Theory, *Comp. Struct.*, Vol. 99, pp. 141 ~ 151, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.038>
- [29] U. Edlund, P. Volgers, 2004, A Composite Ply Failure Model based on Continuum Damage Mechanics, *Comp. Struct.*, Vol. 65, pp. 347 ~ 355, doi:10.1016/j.compstruct.2003.11.010
- [30] G. Z. Voyiadjis, A. Shojaei, G. Li, 2012, A Generalized Coupled Viscoplastic-Viscodamage-Viscohealing Theory for Glassy Polymers, *Int. J. Plast.*, Vol. 28, pp. 21 ~ 45,



- doi:10.1016/j.ijplas.2011.05.012
- [31] R. J. Dorgan and G. Z. Voyiadjis, 2003, Nonlocal Dislocation based Plasticity Incorporating Gradients of Hardening, *Mech. Mat.*, Vol. 35, pp 721~732, doi:10.1016/S0167-6636(02)00202-8
- [32] G. Z. Voyiadjis and G. Thiagarajan, 1997, Micro and Macro Anisotropic Cyclic Damage-Plasticity Models for MMCS, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 35, No. 5, pp. 467~484.
- [33] L. Shen, S. Yi, 2001, An Effective Inclusion Model for Effective Moduli of Heterogeneous Materials with Ellipsoidal Inhomogeneities, *Int. J. Solid Struct.* Vol. 38, pp. 5789~5805.
- [34] B. Raju, S.R. Hiremath, D.R. Mahapatra, 2018, A Review of Micromechanics based Models for Effective Elastic Properties of Reinforced Polymer Matrix Composites, *Comp. Struct.* Vol. 204, pp. 607~619, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.07.125>
- [35] P. Barai, G. J. Weng, 2011, A Theory of Plasticity for Carbon Nanotube Reinforced Composites, *Int. J. Plast.*, Vol. 27, pp. 539~559, doi:10.1016/j.ijplas.2010.08.006
- [36] G. J. Dvorak, M. V. Srinivas, 1999, New Estimates of Overall Properties of Heterogeneous Solids, *J. Mech. Phys. Solid*, Vol. 47, pp. 899~920, PII: S0022-5096(98)00067-2
- [37] H. G. Nguyen, S. Ortola and E. Ghorbel, 2013, Micromechanical Modelling of the Elastic Behaviour of Polymer Mortars, *Euro. J. Envir. Civil Eng.*, Vol. 17, No. 2, pp. 65~83, <http://dx.doi.org/10.1080/19648189.2012.739787>
- [38] S. Guo, G. Kang, J. Zhang, 2011, Meso-Mechanical Constitutive Model for Ratchetting of Particle-Reinforced Metal Matrix Composites, *Int. J. Plast.*, Vol. 27, pp. 1896~1915, doi:10.1016/j.ijplas.2011.01.001
- [39] J. C. Simo and J. W. Ju, 1987, Strain and Stress-based Continuum Damage Models-I, Formulation, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 23, Iss. 7, pp. 821~840
- [40] D. Luo, S. Takezono, K. Tao, H. Minamoto, 2005, The Application of a Homogenized Overall and Local Anisotropic Damage Constitutive Model to Unidirectional and Cross-ply CFCC with Oblique Loading Directions, *Comp. Struct.*, Vol. 68, pp. 309~317, doi:10.1016/j.compstruct.2004.03.024
- [41] R. C. Pavan, B. F. Oliveira, S. Maghous, G.J. Creus, 2010, A Model for Anisotropic Viscoelastic Damage in Composites, *Comp. Struct.* Vol. 92, pp. 1223~1228, doi:10.1016/j.compstruct.2009.10.020
- [42] R. C. Pavan, G. J. Creus, S. Maghous, 2009, A Simplified Approach to Continuous Damage of Composite Materials and Micromechanical Analysis, *Comp. Struct.* Vol. 91, pp. 84~94, doi:10.1016/j.compstruct.2009.04.044
- [43] G. Z. Voyiadjis, R. K. Abu Al-Rub, A. N. Palazotto, 2014, Thermodynamic Framework for Coupling of Non-local Viscoplasticity and Non-local Anisotropic Viscodamage for Dynamic Localization Problems using Gradient Theory, *Int. J. Plast.*, Vol. 20, pp. 981~1038, doi:10.1016/j.ijplas.2003.10.002
- [44] B. Haddag, F. Abed-Meraim, T. Balan, 2009, Strain Localization Analysis using a Large Deformation Anisotropic Elastic-Plastic Model Coupled with Damage, *Int. J. Plast.*, Vol. 25, pp. 1970~1996, doi:10.1016/j.ijplas.2008.12.013
- [45] G. Hu, 1996, A Method of Plasticity for General Aligned Spherical Void or Fiber-Reinforced Composites", *Int. J. Plast.*, Vol. 12, No. 4, pp. 439~449.
- [46] L. Bardella, 2003, An Extension of the Secant Method for the Homogenization of the Nonlinear Behavior of Composite Materials, *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 41, pp. 741~768, PII: S0020-7225(02)00276-8
- [47] Y. Jiang and P. Kurath, 1995, Characteristics of the Armstrong-Frederick Type Plasticity Models", *Int. J. plast.*, Vol. 12, No. 3, pp. 387~415.
- [48] I. N. Basuroychowdhury and G. Z. Voyiadjis, 1998, "A Multiaxial Cyclic Plasticity Model for Non-Proportional Loading Cases", *Int. J. Plast.*, Vol. 14, No. 9, pp. 855~870.
- [49] Y. F. Dafalias, K. I. Kourousis, G. J. Saridis, 2008, Multiplicative AF Kinematic Hardening in Plasticity, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 45, pp. 2861~2880, doi:10.1016/j.ijsolstr.2008.01.001
- [50] G. Z. Voyiadjis and G. Thiagarajan, 1996, A Cyclic

- Anisotropic-Plasticity Model for Metal Matrix Composites, *Int. J. Plast.*, Vol. 12, No. 1, pp. 69~91.
- [51] O. Pierard, C. Gonzalez, J. Segurado, J. LLorca, I. Doghri, 2007, Micromechanics of Elasto-Plastic Materials Reinforced with Ellipsoidal Inclusions, *Int. J. Solid. Struct.*, Vol. 44, pp. 6945~6962, doi:10.1016/j.ijsolstr.2007.03.019
- [52] W. L. Azoti, A. Tchalla, Y. Koutsawa, G. Rauchs, S. Belouettar, 2013, Mean-Field Constitutive Modeling of Elasto-Plastic Composites using Two (2) Incremental Formulations, *Comp. Struct.*, Vol. 105, pp. 256~262, <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.05.044>
- [53] J. Y. Wu, M. Cervera, 2016, A Thermodynamically Consistent Plastic-Damage Framework for Localized Failure in Quasi-Brittle Solids: Material model and strain localization analysis, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 88-89, pp. 227~247, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.03.005>
- [54] E. Ghossein, M. Levesque, 2015, Homogenization Models for Predicting Local Field Statistics in Ellipsoidal Particles Reinforced Composites Comparisons and Validations, *Int. J. Solid Struct.* Vol. 58, pp. 91~105, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.12.021>
- [55] A.A.-C. Guery, F. Cormery, J. F. Shao, D. Kondo, 2008, A Micromechanical Model of Elastoplastic and Damage Behavior of a Cohesive Geomaterial, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 45, pp. 1406~1429, doi:10.1016/j.ijsolstr.2007.09.025
- [56] G. Z. Voyiadjis and P. I. Kattan, 1998, Equivalence of the Overall and Local Approaches to Damage in Metal Matrix Composites, *Int. J. Plast.*, Vol. 14, Nos. 1-3, pp. 273~288.
- [57] G. Z. Voyiadjis, P. I. Kattan, 2010, Mechanics of Small Damage in Fiber-Reinforced Composite Materials, *Comp. Struct.*, Vol. 92, pp. 2187~2193, doi:10.1016/j.compstruct.2009.09.005
- [58] H. K. Lee, S. H. Pyo, 2008, Multi-level Modeling of Effective Elastic Behavior and Progressive Weakened Interface in Particulate Composites, *Comp. Sci. Tech.*, Vol. 68, pp. 387~397, doi:10.1016/j.compscitech.2007.06.026
- [59] J. K. Chen, Z. P. Huang, Y. W. Mai, 2003, Constitutive Relation of Particulate-Reinforced Viscoelastic Composite Materials with Debonded Microvoids, *Acta Mater.* Vol. 51, pp. 3375~3384, doi:10.1016/S1359-6454(03)00120-4
- [60] L. H. Dai, G. J. Huang, 2001, An Incremental Micromechanical Scheme for Nonlinear Particulate Composites, *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 43, pp. 1179~1193, PII: S0020-7403(00)00063-1
- [61] J. K. Chen, Z. P. Huang, J. Zhu, 2007, Size Effect of Particles on the Damage Dissipation in Nanocomposites, *Comp. Sci. Tech.*, Vol. 67, pp. 2990~2996, doi:10.1016/j.compscitech.2007.05.020
- [62] H. Yang, P. Chen, Y. Jiang, K. Tohgo, 2011, Incremental Damage Theory of Particulate-Reinforced Composites with a Ductile Interphase, *Comp. Struct.*, Vol. 93, pp. 2655~2662, doi:10.1016/j.compstruct.2011.04.033
- [63] Y. F. Dafalias, 1983, Corotational Rates for Kinematic Hardening at Large Plastic Deformation, *J. Appl. Mech.*, Vol. 50, pp. 561~565.
- [64] B. Haddag, F. Abed-Meraim, T. Balan, 2009, Strain Localization Analysis using a Large Deformation Anisotropic Elastic-Plastic Model Coupled with Damage, *Int. J. Plast.* Vol. 25, pp. 1970~1996, doi:10.1016/j.ijplas.2008.12.013
- [65] J. L. Dequiedt, 2011, Localization in Elasto-plastic Materials: Influence of an Evolving Yield Surface in Biaxial Loading Conditions, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 48, pp. 2324~2332, doi:10.1016/j.ijsolstr.2011.04.004
- [66] J. L. Dequiedt, 2010, Localization in Elasto-plastic Materials: Influence of the Plasticity Yield Surface in Biaxial Loading Conditions, *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 47, pp. 2937~2951, doi:10.1016/j.ijsolstr.2010.06.020
- [67] J. Cho, M. S. Joshi, C. T. Sun, 2006, Effect of Inclusion Size on Mechanical Properties of Polymeric Composites with Micro and Nano Particles, *Comp. Sci. Tech.*, Vol. 66, No. 13, pp. 1941~1952, doi:10.1016/j.compscitech.2005.12.028
- [68] R. Aghababaei, S. P. Joshi, 2011, Grain Size Inclusion Size Interaction in Metal Matrix Composites using Mechanism-based Gradient Crystal Plasticity. *Int. J. Solid Struct.*, Vol. 48, pp. 2585~2594, doi:10.1016/j.ijsolstr.2011.05