

# Mean-shortfall portfolio optimization via sorted $L$ -one penalized estimation

Haerin Cho<sup>a</sup>, Seyoung Park<sup>1,b</sup>

<sup>a</sup>Department of Fintech, Sungkyunkwan University; <sup>b</sup>Department of Applied Statistics, Yonsei University

## Abstract

Research in the area of financial portfolio optimization, with the dual goals of increasing expected returns and reducing financial risk, has actively explored various risk measurement indicators. At the same time, the incorporation of various penalty terms to construct efficient portfolios with limited assets has been investigated. In this study, we present a novel portfolio optimization formula that combines the mean-shortfall portfolio and the SLOPE penalty term. Specifically, we formulate this optimization expression, which differs from linear programming, by introducing new variables and using the alternating direction method of multipliers (ADMM) algorithms. Through simulations, we validate the automatic grouping property of the SLOPE penalty term within the proposed mean-shortfall portfolio. Furthermore, using the model introduced in this paper, we propose and evaluate four different types of portfolio compositions relevant to real-world investment scenarios through empirical data analysis.

Keywords: portfolio selection, shortfall, SLOPE, ADMM

## 1. 서론

금융 포트폴리오 최적화(financial portfolio optimization)는 고려할 수 있는 포트폴리오 중에서 목표에 부합하는 최적의 포트폴리오 조합을 선택하는 과정이다. 이때 많은 경우 기대 수익률은 높이고, 재무적 위험은 낮추는 것을 목표로 하며, 추가적으로 거래 비용, 포트폴리오에 포함되는 자산의 수 등을 고려하기도 한다. 수학적 접근을 통해 자산별 최적의 투자 비중을 결정하는 포트폴리오 최적화 이론은 Markowitz (1952)에 의해 평균-분산 포트폴리오 최적화 이론 형태로 처음 도입되었다. 평균-분산 포트폴리오에서는 위험의 지표로 분산(variance)을 사용하기 때문에 포트폴리오를 구성하는 자산들의 기대 수익률 벡터와 공분산 행렬이 주어지면 QP (quadratic programming) 즉, 2차 계획법을 푸는 방식으로 쉽게 자산별 최적 가중치를 도출할 수 있다. 하지만 이러한 방식은 기본적인 가정이 현실과 동떨어져 있어 실질적으로 활용되기 어렵다는 한계를 갖는다. 먼저, 평균-분산 포트폴리오 이론에서는 투자자의 효용함수가 이차 효용함수(quadratic utility function)라는 가정이 필요하다. 이 경우 특정 지점 이상으로 부가 증가하는 경우 한계 효용이 감소해 절대 위험 회피가 증가하며 (Huang과 Litzenberger, 1988), 투자자의 성향이 위험 중립형이거나 위험 선호형일 경우 적용할 수 없으므로 현실에 범용적으로 적용할 수 없다. 다음으로 평균-분산 포트폴리오 최적화 문제에서는 자산의 수익률이 평균을 중심으로 대칭인 타원형 분포를 띠는 가정을 전제하나, 현실에서는 수익률이 이러한 분포를 보이는 경우는 매우 드물다. 평균-분산 포트폴리오에서 위험 측정 지표로 사용되는 분산의 경우 부정적

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Applied Statistics, Yonsei University, 50 Yonsei-ro, Seodaemun-gu, Seoul 03722, Korea. E-mail: ishpsy@yonsei.ac.kr

현상인 수익 하락과 긍정적 현상인 수익 상승을 같은 위험으로 취급한다는 점과 이상치에 민감해 추정오차 (estimation error)가 큰 결과가 도출될 수 있다는 점에서도 바람직하지 않은 지표이다.

이러한 평균-분산 포트폴리오의 한계점을 극복하기 위해 수익이 하락하는 상황에 해당하는 하방 위험만을 측정하는 위험 측정 지표에 관한 연구가 지속해서 이뤄져 왔다. 제안된 지표로는 Markowitz (1959)에 도입된 반분산(semi-variance), 반분산의 확장된 개념인 LPM (low partial moment) (Fishburn, 1977), VaR (value at risk) (Bawa, 1975) 그리고 Rockafella와 Uryasev (2000)에 의해 제안된 CVaR와 이 개념을 발전시킨 Bertsimas 등 (2004)의 숏폴(shortfall) 등이 있다. 이 중 LPM은 복잡한 계산 과정을 수반한다는 한계로 널리 이용되지 못했다. VaR의 경우 정규성을 가정하지 않아도 사용할 수 있다는 장점을 가진 지표이나, 불록성을 만족하지 않아 최적해 도출이 어렵다는 한계가 있다. 이에 본 논문에서는 불록성을 만족해 상대적으로 최적해 도출이 용이한 숏폴(shortfall)을 위험 지표로 사용한 포트폴리오 최적화 모형을 제안한다.

금융 포트폴리오 최적화 분야에서 중요하게 여겨지는 것 중 하나는 희소한(sparse) 포트폴리오의 구성이다. 운용해야 하는 자산의 수가 늘어난다는 것은 곧 운용 비용의 증가를 의미하기 때문이다. 적은 자산으로 효율적인 포트폴리오를 구성하기 위해 금융 포트폴리오 최적화 분야에서는  $l_1$ -norm,  $l_2$ -norm, 둘의 조합인 Elastic Net과 같은 다양한 제약을 활용한 연구가 진행되어왔다. 그 중 Bogdan 등 (2015)이 개발한 SLOPE (sorted L-one penalized estimation)는 고려하는 변수 개수만큼의 파라미터를 적용하는 페널티 항으로, Kremer 등 (2020)에 의해 처음 금융 포트폴리오 최적화 분야에 적용되었으며  $l_1$ -norm과  $l_\infty$ -norm의 장점을 결합한 형태로 특정 자산들에 대해 동일한 가중치가 도출되는 그룹화 효과를 활용할 수 있는 특징이 있다. 본 논문에서는 하방 위험을 측정하는 숏폴 지표를 활용한 포트폴리오에 SLOPE 페널티를 결합한 모형을 제안한다.

본 논문의 구성은 다음과 같이 이뤄져 있다. 2장에서는 금융 포트폴리오 최적화에서 사용되는 위험 지표들과 본 논문에서 고려하는 숏폴에 대해 자세히 살펴보고, 평균-숏폴 포트폴리오에 대해 알아본다. 3장에서는 SLOPE 페널티 항에 대해 살펴보고, 평균-숏폴 포트폴리오와 SLOPE를 결합한 최적화 식을 제안한다. 이 과정에서 전통적으로 LP (linear programming)로 해결하던 알고리즘을 ADMM 알고리즘을 사용해 푸는 새로운 알고리즘과 이 과정에서 추가된 변수인  $z$ 에 대한 최적화 방식을 설명한다. 4장에서는 시뮬레이션 데이터를 바탕으로 SLOPE 페널티 항의 특징을 살펴보고, 본 논문에서 제안하는 평균-숏폴 포트폴리오에서도 해당 특징이 유효함을 확인한다. 5장에서는 5개의 실증 데이터 분석을 통해 3장에서 제안한 모형의 타당성을 입증하고, 평가한다. 6장에서는 5장에서 제시한 실증 데이터 적용 결과를 바탕으로 결론을 내린다.

## 2. 평균-숏폴 포트폴리오

### 2.1. 위험 지표로서의 숏폴

금융 포트폴리오 최적화 분야에서는 자산의 변동성 즉, 주식 가격의 변동 정도를 위험 지표로 삼는데, 이를 수치화하는 데에는 여러 가지 기법이 존재한다. 이 분야의 근간이 되는 Markowitz (1952)에 의해 제안된 평균-분산 포트폴리오는 공분산 행렬을 위험 지표로 활용한다. 하지만 이러한 포트폴리오 최적화 식은 여러 한계점으로 인해 현실에 적용되기 어려운데 먼저, 투자자의 효용함수를 이차 효용함수로 가정한다는 점이 있다. 이러한 가정은 일정 수준을 넘어선 부의 증가에 따라 한계 효용이 감소하며, 위험 자산에 대한 수요가 감소한다고 가정 (Huang과 Litzenberger, 1988)하기 때문에 위험 중립형 또는 위험 선호형 투자자의 성향을 반영할 수 없다. 뿐만 아니라 위험 지표로서의 분산은 주식 가격의 상승과 하락을 동일한 위험으로 취급해 줄이고자 한다는 점에서 한계를 갖는다. 이러한 한계점을 극복하기 위해 고안된 것이 하방 위험의 개념이다. 하방 위험(downside risk)은 수익 상승으로 이어지는 긍정적 변동이 아닌 수익 하락에 해당하는 부정적 변동을 의미하는 것으로 Roy (1952)에 의해 논의되기 시작했다. 이후 Markowitz (1959)가 왜도가 높거나 비대칭성을 보일 때 사용할 수 있는 반분산(semi-variance)의 개념을 제안했다. 이러한 반분산의 개념이 일반화된 지표가

LPM (low partial moment)이며,  $n$ 차 LPM은 다음과 같이 표현된다.

$$\text{LPM}_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - r)^n dF(r), \quad n > 0. \quad (2.1)$$

Fishburn (1977)에 의해 고안된 해당 지표는 수익률( $r$ )이 목표로 설정한  $\tau$  이하로 떨어지는 확률을 의미하며, 반분산은 LPM의 특별한 경우로  $n = 2$ 인 경우 성립한다. 이때  $n$ 은 투자자의 위험 회피 성향에 따라 다르게 설정되는데,  $n = 1$ 인 경우 위험 중립 성향,  $n > 1$ 의 경우 위험 회피 성향,  $n < 1$ 의 경우 위험 선호 성향으로  $n$  값이 크게 설정될수록 위험 회피 성향이 높은 투자자의 특성을 반영한다. 이처럼 LPM은 투자자의 모든 성향을 반영할 수 있다는 장점이 있으나, 값의 도출이 용이하지 않다는 단점 때문에 널리 활용되지 못했다 (Harlow와 Rao, 1999).

이후 금융 분야에서 널리 사용된 위험 측정 지표가 VaR (value at risk)이다. 분위수 개념을 도입해 하방 위험을 측정하는 VaR은 특정 분위 수 하에서의 발생할 수 있는 최대 손실을 산출하며,  $(1 - \alpha)$  신뢰수준을 고려할 때의 VaR은 식 (2.2)와 같이 표현된다.

$$\text{VaR}_\alpha(w) = \mu^T w - q_\alpha(R^T w), \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (2.2)$$

식 (2.2)에서  $R$ 은 포트폴리오에 포함된 자산들의 수익률 벡터이며,  $w$ 는 각 자산에 배분된 가중치로  $R^T w$ 는 포트폴리오의 수익률을,  $q_\alpha(R^T w)$ 은 이 수익률 분포의  $\alpha$  분위수를,  $\mu^T w$ 는 포트폴리오의 기대수익률을 의미한다. VaR은 Artzner 등 (1999)이 제시한 일관된 위험 측정(Coherent risk measure) 조건 중 준가법성과 불복성을 만족하지 않아 최적해 도출이 어려워 여전히 한계가 있다.

Rockafella 와 Uryasev (2000)은 다른 지표들의 한계점을 보완해 CVaR (conditional value-at-risk) 개념을 도입했으며, 최적해 도출이 매우 용이한 LP 방식으로 접근함으로써 포트폴리오 최적화 분야에 적용 가능성을 보였다. 해당 개념은 Rockafella 와 Uryasev (2000)에 의해 하면서 본 논문에서 다루는 샷폴의 형태로 발전했으며,  $(1 - \alpha)$  신뢰수준 하에서 식 (2.3)과 같이 표현된다. 기존의 VaR과 달리 두 번째 항에 조건부 기댓값을 활용하는 위험 지표인  $\text{TCE}_\alpha(x) = -E[R^T w \mid R^T w \leq q_\alpha(R^T w)]$  (Artzner 등, 1999)를 결합해 일관된 위험 측정 조건을 만족하도록 했다는 점이 특징이다. 또한 이렇게 정의된 식은 불복성 또한 만족하기 때문에 최적해 도출이 상대적으로 용이하다는 장점도 가진다.

$$s_\alpha(w) = \mu^T w - E[R^T w \mid R^T w \leq q_\alpha(R^T w)], \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (2.3)$$

## 2.2. 표본 평균-샷폴 포트폴리오 모형

Bertsimas 등 (2004)은 샷폴 위험 지표의 제안과 함께 샷폴의 비모수 추정량을 활용한 표본 평균-샷폴 포트폴리오 모형을 함께 제안했다. 비모수 추정량을 활용하는 경우, 과거 수익률 데이터로부터 그 값을 바로 산출하기 때문에 수익률 분포에 대한 가정이 필요 없어진다. 고려하는  $p$ 개 자산에 대한  $1, \dots, T$  시점의 수익률 벡터를 모은 전체 수익률 행렬을  $R = (r_1^T, \dots, r_T^T)^T$ 라고 할때,  $T$ 개 시점 전체의 평균 수익률 벡터를  $T + 1$ 시점의 수익률 추정량으로 가정하며,  $\bar{r} = \sum_{i=1}^T r_i^T / T$ 로 표현한다. 샷폴의 비모수 추정량은  $\hat{s}_\alpha(w) = w^T \bar{r} - \sum_{i=1}^K z_{(i)} / K$ 로 표현된다.  $z_{(i)}$ 는 고려하는  $R^T w$ 에 대한  $i$  번째 순서 통계량을,  $K$ 는  $\lfloor \alpha T \rfloor$ 로  $\alpha T$ 보다 크지 않은 가장 큰 정숫값을 의미한다. 이렇게 정의된 샷폴의 비모수 추정량을 적용한 표본 평균-샷폴 포트폴리오 최적화 모형은 목표 포트폴리오 수익률  $r_{pt}$ 에 대해 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
& \min_w \quad w^\top \bar{r} - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K z_{(i)}, & (2.4) \\
& \text{subject to} \quad w^\top \bar{r} = r_{pt}, \\
& \quad \quad \quad w^\top \mathbf{1} = 1, \\
& \quad \quad \quad z = R^\top w.
\end{aligned}$$

위의 식에는 순서 통계량이 포함되는데, 주로 제약식을 추가해 선형계획법으로 변환하는 방식으로 최적해를 산출하며, 변환 과정은 Bertsimas 등 (2004)에 자세히 설명되어 있다. 하지만 3장에서 살펴볼 SLOPE 페널티의 경우 순서 통계량과 절댓값이 동시에 포함된 식을 추가하므로 이러한 방식으로 해를 구할 수 없으며, 따라서 ADMM 알고리즘을 이용한 최적화식을 제안한다.

### 3. SLOPE를 활용한 평균-숏폴 포트폴리오 모형

#### 3.1. SLOPE (sorted L-one penalized estimation)

포트폴리오 투자에서는 전 시점과 비교해 달라진 자산의 투자 비중을 측정하는 회전을(turnover)이 중요한 평가 지표 중 하나로 활용되는데, 이는 포트폴리오 업데이트마다 보유하는 자산이 달라지는 경우, 그 과정에서 추가 비용이 발생하기 때문이다. 이에 다양한 페널티를 활용해 포트폴리오에 포함되는 자산의 수를 줄여 회소하고, 변동이 적은 포트폴리오를 개발하기 위한 연구가 활발히 진행되어 왔다. 이러한 포트폴리오를 구성하기 위해서는 2장에서 설명한 바와 같은 최적화 식에 포함되는 자산 가중치에 페널티를 부여해 그 값을 줄이는 방식이 사용된다. 널리알려진 페널티항으로는 가중치의 제곱합에 페널티를 부여하는 릿지(Ridge,  $\lambda \sum_{i=1}^K w_i^2$ )와 가중치 절대값합에 페널티를 부여하는 라쏘(Lasso,  $\lambda \sum_{i=1}^K |w_i|$ )가 있다. 이때 라쏘는 페널티의 강도를 의미하는 람다값이 커짐에 따라 유의미한 변수에 대한 가중치만 0 이상으로 유지되는, 변수 선택 기능이 있다는 특징이 있다.

본 논문에서 다루고자하는 페널티항은 비교적 최근 금융 포트폴리오 최적화 분야에 적용되기 시작한 SLOPE이다. Bogdan 등 (2015)에 의해 개발된 SLOPE는 sorted L-one penalized estimation의 약자로 최적화 식에서 고려하는 특성(변수, 주식 포트폴리오에서는 자산)의 수만큼의 하이퍼파라미터( $\lambda_i$ )를 사용하며, 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
& \rho_\lambda(w) = \sum_{i=1}^K \lambda_i |w_{(i)}|, & (3.1) \\
& \text{subject to} \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_K \geq 0, \\
& \quad \quad \quad |w_{(1)}| \geq |w_{(2)}| \geq \dots \geq |w_{(K)}|,
\end{aligned}$$

여기서 각각의  $|w_{(i)}|$ 는 고려하는  $w$ 의 절대값에 대한 순서 통계량을 의미하며, 각각에 대응하는 페널티 강도를 나타내는  $\lambda_i$  값은 고려하는 자산의 가중치에 비례한 크기를 갖도록 설계된다. 만약 모든 람다에 대해 하나의 값을 공통으로 사용하는 경우 라쏘 페널티를 사용한 것과 동일한 식이 됨을 알 수 있다. 이러한 SLOPE는 DWSL1 (decreasing weighted sorted L1-norm)이라는 이름으로 Zeng과 Figueiredo (2014)에 의해 비슷한 시기에 발표된 바 있으며, 유전자 데이터나 신호처리 분야에 적용되어 왔다. 금융 포트폴리오 최적화 분야에는 Kremer 등 (2020)에서 평균-포트폴리오 최적화 식에 적용하면서 사용되기 시작했다.

SLOPE의 가장 큰 특징은 다른 페널티들의 변수 선택 기능뿐만 아니라 같은 위험 요인의 영향을 받는 자산 간에 그룹화 효과가 있다는 점 (Kremer 등, 2020)이다. 여기서 그룹화 효과는 도출되는 최적 결과에서 같은 위

험 요인의 영향을 받는 자산들의 가중치가 동일한 값으로 산출되는 방식으로 확인할 수 있다. 이러한 효과는 위험측정 지표로 분산이 아니라 샷폴을 사용할 때도 유효한데, 이는 본 논문에서 고려하는 최적화 식에 대해 구체적으로 알아본 후 4장의 시뮬레이션을 통해 밝힌다.

### 3.2. 평균-샷폴과 SLOPE의 결합

본 절에서는 2장에서 살펴본 하방 위험만을 고려하는 평균-샷폴 포트폴리오와 SLOPE를 결합한 포트폴리오 최적화 식을 제안한다. 포트폴리오 업데이트를 위해 고려하는 과거 시점의 길이가  $T$ 이고 각 시점의  $p$ 개 자산의 수익률을  $\vec{r}_i = (r_{i1}, \dots, r_{ip})^\top, i = 1, \dots, T$ 라고 하고 총  $T$ 개 시점의 수익률 벡터를 모은 전체 수익률 행렬을  $R = (\vec{r}_1^\top, \dots, \vec{r}_T^\top)^\top, R \in \mathbb{R}^{p \times T}$ 라고 할 때  $t = 1, \dots, T$  시점 동안의  $p$ 개 자산 전체의 평균 수익률 벡터는  $\bar{r}$ 로 표현한다. 이때,  $p$ 개 자산에 대한 포트폴리오 가중치  $w = (w_1, \dots, w_p)^\top$ 의 합 즉,  $\sum_i w_i = 1$ 로 가정한다. 이때 평균-샷폴 포트폴리오 최적화 식에 SLOPE를 결합한 최종식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \min_{w, v, z} \quad & w^\top \bar{r} - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K z_{(i)} + \rho_\lambda(v), \\ \text{subject to} \quad & w^\top \bar{r} = r_{pt}, \\ & w^\top e = 1, \\ & w = v, \\ & z = R^\top w, \end{aligned} \quad (3.2)$$

여기서  $r_{pt}$ 는 포트폴리오 월간 타겟 기대수익률에 해당되며,  $K$ 는 고려하는 샷폴의 위험 분위 수에 의해 결정되는 값으로,  $\alpha T$ 보다 크지 않은 정숫값을 지칭한다.  $\rho_\lambda(v)$ 는  $\sum_{i=1}^K \lambda_i |v_{(i)}|$ 이며, 식에 포함된  $v$ 이 경우  $w$ 와 같은 값을 갖는다는 조건식을 만족하도록 설계된 변수다. 이어 3.3장에서 설명할 알고리즘 업데이트 과정에서  $w$ 와  $v$ 를 각각 업데이트함을 확인할 수 있다.

### 3.3. 알고리즘

본 절에서는 위에서 소개한 식을 알고리즘 관점에서 어떻게 계산되는지 설명한다. 서론에서 설명한 바와 같이 보통의 평균-샷폴 포트폴리오는 LP로 변환될 수 있다는 장점이 있으며, 대부분의 경우 LP 알고리즘의 적용을 통해 최적화 식을 해결할 수 있다. 하지만 본 논문에서 소개하는 모형의 경우 페널티 항으로 사용되는 SLOPE에 절대값 및 순서 통계량이 포함되므로 선형계획법으로 표현되지 않는다. 본 연구에서는 ADMM 알고리즘을 통해 최적해를 도출한다. 위에서 정의한 최적화 식을 업데이트가 용이하도록 augmented lagrangian 식으로 작성하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\eta(w, v, z; \alpha, \beta, \theta, \gamma) = & w^\top \bar{r} - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K z_{(i)} + \sum_{j=1}^p \lambda_j |v_{(j)}| + \alpha^\top (w - v) \\ & + \beta (w^\top e - 1) + \theta (w^\top \bar{r} - r_{pt}) + \gamma^\top (z - R^\top w) \\ & + \frac{\eta}{2} \|w - v\|_2^2 + \|z - R^\top w\|_2^2 + (w^\top \bar{r} - r_{pt})^2 + (w^\top e - 1)^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

이때 순서대로  $\alpha \in \mathbb{R}^p, \beta, \theta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}^T, e_{p \times 1} = (1, \dots, 1)^\top$ 이며,  $\eta$ 는 페널티 파라미터로 0보다 큰 값을 갖는다. 이를 바탕으로 ADMM 알고리즘의 업데이트는 다음의 순서를 따라 이뤄진다.

$$\begin{aligned}
w^{j+1} &= \operatorname{argmin}_w \left( \bar{r}(1 + \theta^j) + \alpha^j + \beta^j e - R\gamma^j \right)^\top w + \frac{\eta}{2} \left\{ \|w - v\|_2^2 + \|z - R^\top w\|_2^2 + (w^\top \bar{r} - r_{pt})^2 + (w^\top e - 1)^2 \right\} \\
&= (\eta(I + ee^\top + \bar{r}\bar{r}^\top + RR^\top))^{-1} \left( \eta(v^j + e + r_{pt}\bar{r} + Rz^j) - (\bar{r} + \alpha^j + \beta^j e + \theta^j \bar{r} - R\gamma^j) \right) \\
v^{j+1} &= \operatorname{argmin}_v \frac{\eta}{2} \left\{ \|v - w^{j+1} - \frac{1}{\eta} \alpha^j\|_2^2 + \rho_\lambda(v) \right\} = \operatorname{prox}_{\rho_{\lambda/\eta}(v)} \left( w^{j+1} + \frac{1}{\eta} \alpha^j \right) \\
z^{j+1} &= \operatorname{argmin}_z - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K z^{(i)} + \gamma^{j\top} z + \frac{\eta}{2} \|z - R^\top w^{j+1}\|_2^2 \\
\alpha^{j+1} &= \alpha + \eta(w^{j+1} - v^{j+1}) \\
\beta^{j+1} &= \beta + \eta(e^\top w^{j+1} - 1) \\
\theta^{j+1} &= \theta + \eta(w^{j+1\top} \bar{r} - r_{pt}) \\
\gamma^{j+1} &= \gamma + \eta(z^{j+1} - R^\top w^{j+1}),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

여기서  $\operatorname{prox}_{\rho_{\lambda/\eta}(v)}$ 는 sorted  $L_1$  norm에 대한 proximal operator에  $\lambda/\eta$ 를 적용해 계산하는 값으로 Bogdan 등 (2013)에서 그 증명과 코드를 제공한다.

본 논문에서는 평균-숏폴 포트폴리오에 sorted  $L_1$ -norm을 적용하는 과정에서 추가된  $z$ 에 대한 업데이트 과정을 중점적으로 설명한다. 먼저 식 (3.3)에서  $z$ 의 업데이트 식을 일반화된 최적화 된 식으로 작성하면 다음과 같다.

$$z = \operatorname{argmin}_z - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K z^{(i)} + \gamma^{j\top} z + \frac{\eta}{2} \|z - R^\top w\|_2^2. \tag{3.5}$$

해당 최적화 식은 순서 통계량이 포함되어 최소로 하는 값( $\operatorname{argmin}$ )을 구하는 것이 까다로운 구조이다. 이를 최적해 도출이 용이한 QP (quadratic programming) 형태로 변환하기 위해 Bogdan 등 (2013)의 증명을 변형하여 적용한다.  $R^\top w$  값의 크기 순서를 따로 저장하여 다시 원래의 순서로 되돌리는 방식을 적용하면 더 이상 최적화 식에 순서 통계량이 포함되지 않기에 최적해를 구하는 것이 용이해진다. 먼저, 크기 순으로 정렬한  $R^\top w$ 를  $y$ 로 정의하고,  $R^\top w$ 의 원래 순서를 따로 저장한다. 이때  $\gamma$  또한  $R^\top w$ 의 순서에 맞춰 정렬하며 이를  $\gamma'$ 으로 정의한다. 새롭게 정의된  $y$ 와  $\gamma'$ 을 이용해 식 (3.5)를  $z$ 에 대응하는  $z'$ 에 대한 최적화 식으로 다시 작성하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$z' = \operatorname{argmin}_{z'} - \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K z' + \gamma'^{\top} z' + \frac{\eta}{2} \|z' - y\|_2^2. \tag{3.6}$$

식 (3.6)은  $z'$ 에 대한 2차식으로 표현되므로 식 (3.5)와 달리 쉽게 최적해를 도출할 수 있다. 도출된  $z'$ 는 앞서 기록한 원래  $R^\top w$ 의 순서에 따라 재정렬하여 업데이트 과정에서  $z^{j+1}$ 로 사용한다.

#### 4. 시뮬레이션

4장에서는 SLOPE의 특징인 변수 선택 기능과 그룹화 효과가 숏폴을 위험지표로 사용하는 경우에도 여전히 유효하다는 점을 시뮬레이션 데이터를 통해 확인한다.  $p$ 개 자산을 고려하는 포트폴리오에 대해 SLOPE를 페널티항으로 활용하는 경우 자산별 가중치는 자산 각각에 부여되는  $p$ 개 페널티항의 모음인 람다 시퀀스의

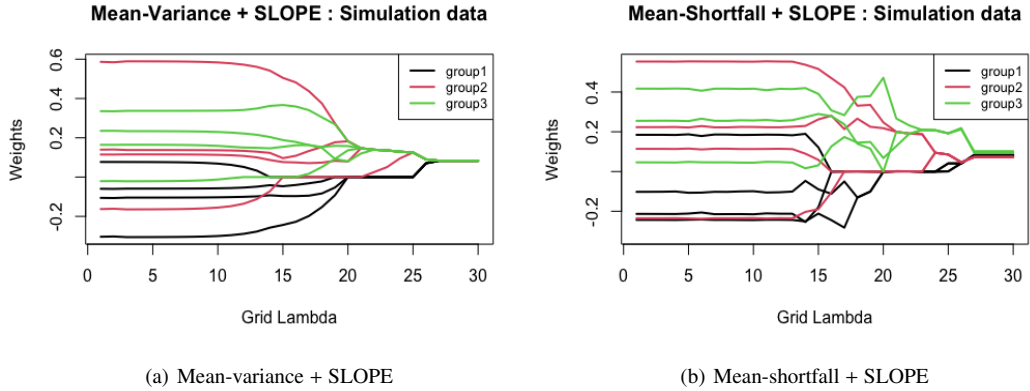


Figure 1: Convergence behavior in relation to risk indicators.

크기에 따라 달라진다. 따라서  $10^{-5} \sim 10^2$ 의 로그 범위에서 총 30개의  $a$ 를 생성하고, 각  $a$ 에 매치되는 람다 시퀀스를 생성해 수렴 양상 및 그룹화 양상을 확인한다. 각 시퀀스에 속하는  $\lambda_i$ 와  $a$ 는  $\lambda_i = a\Phi^{-1}(1 - 0.01i/2k)$ ,  $i = 1, \dots, p$ 의 관계를 가지며,  $a$ 값이 점점 커짐에 따라 시퀀스에 속하는 각 람다값도 커진다.

시뮬레이션 데이터의 생성은 두 모형의 비교를 위해 평균-분산 포트폴리오에 SLOPE를 적용한 Kremer 등 (2020)에서 사용된 세팅을 이용하며, 히든 팩터 모델(hidden factor model)에 기반해 각 자산의 수익률이  $r$ 개의 위험 요인의 선형 결합으로 표현된다고 가정한다.  $k$ 개의 자산에 대해  $t$ 개의 관측치를 고려할 때  $F_{rxr} = [f_1, \dots, f_r]$ , 각  $f_i$ 는  $i_{th}$  위험 요인에 관련해 산출된 수익으로 표현된다.  $B_{rxk}$ 는 각 자산에 대한 위험 요인별 가중치를 나타내며, 따라서 오차항 행렬  $\epsilon_{rxk}$ 을 반영한 수익률 행렬은  $R = F \times B + \epsilon$ 으로 표현된다. Kremer 등 (2020)에서 사용된 시뮬레이션 세팅의 세부 사항은 아래와 같다.

- 1)  $t = 50, k = 12, r = 3$
- 2) 위험 요인을 나타내는  $f_1, f_2, f_3$ 는 서로 독립이고, 다변량 표본정규분포  $N(0, I)$ 를 따른다.
- 3) 오차항을 나타내는 벡터인  $\epsilon, i = 1, \dots, k$ 는 서로 독립이며  $N(0, 0.05 \times I)$ 를 따른다.
- 4) 각 위험 요소에의 가중치를 나타내는  $B$ 는  $[0.77 \ 0.64 \ 0]^T, [0.9 \ 0 \ -0.42]^T, [0 \ 0.31 \ 0.64]^T$ 의 세 벡터가 각 4번씩 반복되는 형태로 구성된다. 결과적으로 각 그룹에 포함되는 4개씩의 자산은 3개의 위험 요소중 각 2개씩에 동일한 가중치로 노출되며 자연스럽게 높은 상관관계를 갖는다.

따라서 평균-분산 포트폴리오 최적화 모형에서 위험 측정 요소로 활용되는 공분산은  $\Sigma = B^T B + 0.05 \times I$ 가 된다. 평균-숏폴 포트폴리오 최적화 모형에서 활용되는 숏폴에 대해서는 고려할 분위 수( $\alpha$ )와 기대 수익률( $r_{pt}$ ) 두 가지 하이퍼파라미터가 추가로 필요하며, 그룹화 양상의 비교를 위해  $\alpha = 0.3, r_{pt} = 0.005$ 로 설정하여 그 값을 산출했다. 생성된 데이터를 기반으로 시뮬레이션을 수행한 결과는 Figure 1과 같다.

각 그림에서 나타나는 실선들은 앞서 생성한 30개의 람다 시퀀스의 순서를 지칭하는 X축의 Grid Lambda를 따른 각 자산에 부여된 가중치의 변동 흐름을 보여주며, 각 그룹은 다른 색상으로 구분된다. Figure 1을 통해 SLOPE 페널티가 가지는 특징적인 수렴 양상을 확인할 수 있는데, 먼저 두 모형 모두 처음엔 자산별로 다른 가중치가 도출되지만 20번째 시퀀스 이상으로 람다가 커짐에 따라 모든 자산에 대한 가중치가 0 또는 0 이상의 값을 갖는다. 이는 SLOPE에 변수 선택 기능이 있으며, 포트폴리오 운용자의 전략에 따라 롱온리(long-only) 포트폴리오의 운용이 가능함을 시사한다. 다음으로 26번째 이상으로 큰 람다를 고려하는 경우 모든 자산에 대해  $1/k$ 로 동일한 가중치를 가져 동일 가중(equally-weighted) 포트폴리오 또한 운용할 수 있게

된다. 그림 (b)에 해당하는 평균-숏폴 모형에서는 정확히  $1/k$ 의 값이 산출되지는 않았으나,  $k = 12$ 인 시뮬레이션 데이터에 대해 각 자산의 가중치 평균은 0.083(=  $1/12$ ), 표준편차는 0.011로 나타나  $1/k$ 을 중심으로 가중치가 산출되었음을 알 수 있다. 이러한 차이가 발생하는 이유는 공분산 행렬을 직접적으로 위험 지표로 활용하지 않는 숏폴의 산출 방식에 기인한 것으로 볼 수 있다.

이어서 그룹화 효과에 대해 살펴보면 두 모형 모두에 대해 램다 값이 커짐에 따라 동일한 그룹에 속하는 자산에 대해 가중치가 유사하게 부여되는 현상이 확인된다. 24번째 램다 시퀀스를 고려하는 경우 두 모형 모두에서 12개의 자산 가중치가 3개로 구분되었다. 평균-분산 모형에 대해서는 그룹1에 속하는 4개의 자산에 대해 동일한 가중치가 부여되어 분리되었으며, 평균-숏폴 모형에서는 3개의 그룹별로 구분되는 가중치가 부여되어 그룹화 효과가 더 명확하게 나타났다. 이러한 결과는 숏폴을 위험 지표로 활용하는 경우에도 SLOPE의 그룹화 효과가 여전히 유의할 뿐만 아니라 보다 명확할 수 있음을 시사한다. 다만 두 모형에 포함되는 하이퍼파라미터의 종류가 다르므로 특정 모형의 우위성은 단정할 수 없으며, 후속 연구를 통한 확인이 필요할 것으로 보인다. 본 장을 통해 살펴본 SLOPE 방식을 활용한 평균-숏폴 포트폴리오의 통온리 또는 동일 가중 포트폴리오의 운용 가능성과 그룹화 효과는 투자자의 성향이나 선호에 따라 다양한 포트폴리오 구성이 가능하다는 점에서 그 의의가 있으며, 5장에서 실증데이터 분석을 통해 가능한 포트폴리오들을 제시하고 모형의 유효성을 확인한다.

## 5. 실증데이터 분석

5장에서는 실제 데이터를 바탕으로 모형의 표본 외 성능을 확인하고 결과에 대해 논의한다. 금융 분야의 예측 모델에서 많이 사용되는 롤링 윈도우 방식을 사용해 매달(주식 거래일 기준 21일)마다 포트폴리오를 업데이트한다. 이때 평균수익률( $\bar{r}$ )과 숏폴 위험을 계산하기 위한 윈도우로는 고려하는 달로부터 과거 1년 치(250일 치)를 사용한다.

SLOPE 방식을 이용한 평균-숏폴 포트폴리오 최적화 문제에서 도출되는 최적 포트폴리오의 자산별 가중치는 고려하는 램다에 의존한다. 따라서 Kremer 등 (2020)을 참고해  $10^{-5} \sim 10^1$ 의 로그 범위에서 생성한  $a$ 를 바탕으로 총 30개의 램다 시퀀스를 생성해 후보군으로 사용한다. 각 시퀀스에 속하는  $\lambda_i$ 를 수식으로 표현하면  $a\Phi^{-1}(1 - (0.01i/2k)), i = 1, \dots, p$ 가 된다.

### 5.1. 데이터 셋 설명

분석에 사용된 실증데이터는 DOW30, DAX30, S&P100, FTSE100, FTSE250 총 다섯 가지 데이터로 2005년 1월부터 2015년 12월까지 총 11년간의 일 주가를 포함한다. 초기 1년 치(250일 치)는 고려하는 첫 번째달의 롤링 윈도우로 사용되므로 2006년 1월부터 2015년 12월까지 총 120달에 걸쳐 포트폴리오 업데이트를 진행하였다. 각 데이터 셋에 대해 살펴보면, 먼저 DOW30은 다우 존스 산업평균지수로 총 29개의 자산이 활용되었다. DAX30은 독일 프랑크푸르트 증권거래소에 상장된 주식을 대상으로 하며 총 28개의 자산이 포함되었다. S&P100 미국 신용평가사 Standard&Poor's에서 관리하는 주식 상장 지수로 미국에 상장된 기업을 대상으로 하며, 분석에는 81개의 자산이 포함되었다. FTSE100과 FTSE250은 런던 증권거래소에 상장된 주식으로 시가총액 순서대로 1~100위 기업 주가는 FTSE100에, 100 ~ 350위 기업의 주가는 FTSE250에 포함되었으며, 분석에 사용된 주식의 수는 각각 81, 149개다. 각 지수에 포함되는 자산의 수와 분석에 사용된 자산의 수 사이의 차이는 결측치를 제거하는 과정에서 발생한 결과이다.



## 5.2. 평가 지표

모형의 전반적인 성능을 평가하기 위해 총 5가지 평가 지표를 사용하였으며, 각 평가지표에 대한 정의는 다음과 같다.

- 1) 평균수익률 :  $\mu = (1/(T - \tau)) \sum_{i=\tau+1}^T w_i^\top r_i$ . 전체 시점에 걸친 포트폴리오의 월간 평균수익률
- 2) 분산 위험률 :  $\sigma = \sqrt{(1/T - \tau - 1) \sum_{i=\tau+1}^T (w_i^\top r_i - \mu)^2}$ . 수익률의 표준편차  
 샷폴 위험률 :  $s = \bar{r} - \sum_{j=1}^K r_{(j)}/K$ . 샷폴의 표본 비모수 추정량 (Bertsimas, 2004)
- 3) 샤프지수(분산) :  $\mu/\sigma$   
 샤프지수(샷폴) :  $\mu/s$   
 위험 대비 기대수익 (Sharpe, 1966). 투자 성과를 판단하는 지수로, 샤프지수 값이 클수록 나은 포트폴리오로 평가하며, 본 논문에서는 각 지표에 대한 샤프지수를 모두 고려함
- 4) 회전을율 :  $(1/(T - \tau - 1)) \sum_{i=\tau}^{T-1} \sum_{j=1}^p |w_i^{t+1} - w_i^t|$ . 포트폴리오 리밸런싱 시점마다 발생한 자산 가중치 변동합의 평균
- 5)  $t$  시점의 희소성 :  $|A_t|/p$ . 시점  $t$ 에 0이 아닌 가중치  $w_{t,i}$ 의 집합을  $A_t = \{w_{t,i} | w_{t,i} \neq 0, i = 1, \dots, p\}$ 로 정의할 때,  $t$  시점의 포트폴리오 중 가중치가 0이 아닌 자산의 비율 (park 등, 2019)

## 5.3. 결과

본 논문에서 제안하는 평균-샷폴 포트폴리오에 SLOPE 페널티 항을 추가한 최적화 식은 램다의 선택과 포트폴리오를 운영하는 개인의 성향에 따라 다양하게 활용될 수 있다. 이에 본 논문에서는 다음의 4가지 방식으로 생성된 포트폴리오를 고려한다. 먼저 일정한 개수의 자산을 고려하기 위해 앞서 설명한 후보군 30개의 램다 시퀀스 중 30% ~ 40%의 자산을 포함하는 포트폴리오가 구성되는 지점에서 램다 시퀀스를 선택한다. 만약 이러한 조건에 부합하는 램다 시퀀스가 둘 이상일 경우, 이전 시점의 자산별 가중치를 고려해 회전을율 즉, 가중치의 변동이 가장 적게 발생하는 지점에서 선택하며, 이러한 포트폴리오를 SLOPE\_30로 지칭한다. SLOPE\_30에 대해서는 추가로 회전을율을 억제하기 위해 릿지 페널티 항을 추가한 SLOPE+RIDGE 포트폴리오를 함께 고려한다. 이때 릿지 페널티 항은 본 논문에서 중점적으로 다루는 페널티가 아니므로 이에 대응하는 하이퍼파라미터는 0.05로 고정해 사용한다. 다음으로는 SLOPE의 그룹화 효과를 극적으로 활용하기 위해 고안된 SLOPE.MV 포트폴리오를 고려한다. 이는 앞서 설명한 SLOPE\_30 포트폴리오에 대한 가중치가 결정되었을 때, 2개 이상의 자산이 동일한 가중치를 부여받는 경우 하나의 그룹으로 간주하고 그룹별로 하나의 자산에 그룹의 가중치 전체를 투자하는 방식이다. 이때 그룹별로 투자 대상이 되는 자산은 윈도우로 고려하는 이전 250일에 대해 수익률 변동이 가장 적은 자산으로 결정한다. 마지막으로 30개 램다 시퀀스를 매번 고려하지 않고 임의의 고정된 램다시퀀스를 사용하는 포트폴리오도 고려할 수 있다. 본 논문에서는 전반적인 수렴양상을 바탕으로 17번째 램다 시퀀스를 임의로 지정해 포트폴리오를 SLOPE.17로 표기하며, 이때 고려하는 램다 시퀀스 중 가장 큰 값을 모든 자산에 대해 일괄로 적용한 Shortfall+LASSO 포트폴리오를 함께 비교한다. 이렇게 구성된 포트폴리오는 인덱스 펀드(Market Index), 동일 가중 포트폴리오(Equally-Weighted Portfolio)의 성능과 비교한다. 또한 위험 지표의 사용에 따른 효과를 비교하기 위해 전통적인 평균-분산 포트폴리오에 SLOPE 페널티 항을 추가한 포트폴리오를 Variance+SLOPE로 지칭하고 이에 대한 결과도 함께 비교한다. 이 경우 SLOPE\_30과의 객관적인 비교를 위해 월간 타겟 기대수익률( $r_{pt}$ )를 동일하게 고정하는 제약을 추가하고, 고려하는 자산의 약 30%가 포트폴리오에 포함되는 지점의 램다를 선택했다.

Table 1부터 Table 6를 통해 월간 타겟 기대수익률( $r_{pt}$ ) = 0.005,  $\alpha = 0.1$ 일때 각 포트폴리오에 따른 연평균 수익률, 분산 위험률, 위험률의 비교, 샤프지수, 회전을율, 희소성을 확인할 수 있다. 먼저 Table 1에서는

Table 1: Average return

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE				Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE+RIDGE	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.1208	0.0625	<b>0.1291</b>	<b>0.1366</b>	<b>0.1491</b>	<b>0.1472</b>	0.1579	0.1581
DAX30	0.1376	0.1161	<b>0.1458</b>	<b>0.167</b>	<b>0.1652</b>	0.1029	0.0971	0.193
SP100	0.1127	0.0587	0.0936	0.1009	0.0911	0.0927	0.0835	0.3195
FTSE100	0.1217	0.0208	<b>0.1501</b>	<b>0.1801</b>	<b>0.1432</b>	<b>0.1551</b>	0.1518	0.2678
FTSE250	0.1367	0.0883	<b>0.178</b>	<b>0.2013</b>	<b>0.2109</b>	<b>0.1964</b>	0.1914	0.6631

Table 2: Variance risk

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE				Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE+RIDGE	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.045	0.0434	0.047	0.0465	0.062	0.0461	0.0464	0.0497
DAX30	0.0698	0.0606	<b>0.0568</b>	<b>0.0616</b>	<b>0.0647</b>	<b>0.0678</b>	0.069	0.0682
SP100	0.0496	0.0454	<b>0.0464</b>	<b>0.0438</b>	0.0613	<b>0.0454</b>	0.0461	0.0998
FTSE100	0.0457	0.0431	<b>0.0433</b>	<b>0.0406</b>	0.064	<b>0.0411</b>	0.0424	0.1173
FTSE250	0.0501	0.0477	<b>0.0449</b>	<b>0.0422</b>	0.0849	<b>0.0431</b>	0.0448	0.2204

Table 3: Comparison of risk - Variance risk and Shortfall risk

Data set	Variance risk				Shortfall risk			
	EW	SLOPE_30	SLOPE +RIDGE	Variance +SLOPE	EW	SLOPE_30	SLOPE +RIDGE	Variance +SLOPE
DOW30	0.045	0.047	0.0465	0.0497	0.0886	0.0923	0.0939	0.0979
DAX30	0.0698	<b>0.0568</b>	<b>0.0616</b>	0.0682	0.1386	<b>0.1205</b>	<b>0.1345</b>	0.146
SP100	0.0496	<b>0.0464</b>	<b>0.0438</b>	0.0998	0.0993	0.1015	<b>0.095</b>	0.1948
FTSE100	0.0457	<b>0.0433</b>	<b>0.0406</b>	0.1173	0.0881	<b>0.0847</b>	<b>0.08</b>	0.2355
FTSE250	0.0501	<b>0.0449</b>	<b>0.0422</b>	0.2204	0.0903	<b>0.0903</b>	<b>0.0809</b>	0.3909

포트폴리오별 연평균수익률을 살펴본다. 모든 수익률은 연간 수익률로 환산해 작성했으며, 표를 살펴보면 S&P100 전반과 DAX30의 SLOPE\_17을 제외한 모든 데이터셋에 대해 Shortfall+SLOPE를 기반으로 구성된 포트폴리오들의 평균수익률이 동일 가중 포트폴리오 보다 높게 나타난다. 또 다른 벤치마크인 인덱스 펀드와 비교하면, S&P100 데이터셋에 대한 Shortfall+SLOPE 포트폴리오 또한 더 높은 평균수익률을 보이는 것을 확인할 수 있다. Variance+SLOPE 포트폴리오에 대해서는 30개의 적은 자산을 포함하는 DOW30 또는 DAX30을 제외하고는 다른 포트폴리오와 비교해 매우 높은 평균수익률을 보이는데, 이는 위험률 지표와 함께 다음 문단에서 해석한다.

Table 2의 분산 위험률 지표를 살펴보면, SLOPE\_MV를 제외한 전반적인 Shortfall+SLOPE 포트폴리오에서 동일 가중 포트폴리오에 비해 낮은 분산 위험률이 도출되었다. 이는 그룹화가 이뤄졌을 때 그룹별로 하나의 자산에만 투자하도록 설계된 SLOPE\_MV의 특성 때문이라고 해석할 수 있다. 또한 sparsity를 강조한 Shortfall+LASSO의 경우 SLOPE\_17보다 전체적으로 분산 위험률이 높게 나타났다. 분산을 위험측정 지표로 사용한 Variance+SLOPE의 경우 상대적으로 적은 수의 자산을 고려하는 DOW30, DAX30을 제외하고는 다른 포트폴리오보다 매우 큰 분산 위험률을 보이는데, 이는 앞서 살펴봤던 평균수익률 지표에서와 동일한 현상이다. 따라서 Variance+SLOPE 포트폴리오의 경우 고려하는 자산의 수가 많아질수록 최적 포트폴리오가 고위험 고수익률이 예상되는 지점에서 선택되는 경향이 존재함을 알 수 있다.

Table 3에서는 대표적인 포트폴리오 4가지에 대해 샷폴 위험률을 산출해 분산 위험률과 그 양상을 비교한다. 샷폴 위험률에 대해서도 대부분의 경우 동일 가중 포트폴리오에 비해 낮은 위험률이 도출되며, SLOPE\_30의 경우 DOW30뿐만 아니라 S&P100에 대해서도 상대적으로 높은 위험률을 보였다. 분산과 샷폴

Table 4: Sharpe ratio

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE				Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE+RIDGE	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.2237	0.1199	<b>0.229</b>	<b>0.2451</b>	0.2004	<b>0.2662</b>	0.2837	0.2653
DAX30	0.1643	0.1597	<b>0.214</b>	<b>0.2259</b>	<b>0.2128</b>	0.1265	0.1173	0.2357
SP100	0.1893	0.1077	0.1679	<b>0.1921</b>	0.1238	0.1702	0.1508	0.2669
FTSE100	0.222	0.0402	<b>0.2887</b>	<b>0.3697</b>	0.1864	<b>0.3144</b>	0.2982	0.1902
FTSE250	0.2276	0.1542	<b>0.3302</b>	<b>0.3977</b>	0.2069	<b>0.38</b>	0.3559	0.2507

Table 5: Turnover

Data set	Shortfall+SLOPE				Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	SLOPE_30	SLOPE+RIDGE	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	<b>0.8293</b>	<b>0.3571</b>	1.2755	<b>0.7718</b>	0.7909	0.9402
DAX30	<b>0.7016</b>	<b>0.3372</b>	1.2561	<b>0.7731</b>	0.7952	0.8612
SP100	<b>0.9915</b>	<b>0.535</b>	<b>1.285</b>	<b>0.8479</b>	0.883	3.4242
FTSE100	<b>0.8143</b>	<b>0.4623</b>	<b>1.1724</b>	<b>0.705</b>	0.737	3.2318
FTSE250	<b>0.9232</b>	<b>0.5556</b>	<b>1.4277</b>	<b>0.5986</b>	0.6461	6.6872

Table 6: Sparsity

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE				Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	SLOPE_30	SLOPE+RIDGE	SLOPE_MV	SLOPE_17			
DOW30	1	0.3517	0.3572	0.2325	0.3006	0.2425	0.3425	
DAX30	1	0.3783	0.4048	0.2345	0.3932	0.3146	0.3557	
SP100	1	0.3471	0.3468	0.107	0.2328	0.157	0.3457	
FTSE100	1	0.3473	0.3511	0.1	0.263	0.18	0.35	
FTSE250	1	0.3482	0.3444	0.0498	0.2069	0.1501	0.3502	

두 위험률 두지표 모두 솟폴을 위험 측정 지표로 사용한 SLOPE\_30, SLOPE+RIDGE보다 Variance+SLOPE에서 높게 나타났다. 또한 Table 2에서 살펴봤던 고려하는 자산 수가 많아질수록 고위험 고수익률이 예상되는 지점에서 최적 포트폴리오가 선정되는 Variance+SLOPE 포트폴리오의 경향이 솟폴 위험률을 기준으로 할때도 여전히 나타남을 확인할 수 있다.

Table 4에서 SLOPE\_30에 대한 샤프지수를 살펴보면 S&P100을 제외하고 모든 데이터 셋에 대해 동일 가중 포트폴리오와 Index 포트폴리오에 대해 더 높은 샤프지수가 도출되었다. 릿지 페널티를 추가한 SLOPE+RIDGE의 경우 모든 데이터 셋에 대해 샤프지수가 높게 도출되어 벤치마크보다 더 나은 포트폴리오가 구성되었음을 알 수 있다. SLOPE\_MV의 경우 DAX30를 제외하고 모든 데이터 셋에 대해 동일 가중 포트폴리오 보다 낮은 샤프지수가 도출되었는데, 이는 그룹별로 하나의 자산만 남기는 제약식에 의해 높게 도출된 분산 위험률에 기인한 현상으로 해석할 수 있다. SLOPE\_17의 경우 Shortfall+LASSO와 비교하면 DOW30을 제외한 모든 데이터셋에서 높은 샤프지수가 도출되었다.

Table 5에서는 포트폴리오별 회전율을 비교한다. Shortfall+SLOPE 포트폴리오는 전반적으로 회전율이 높게 도출되는 경향이 있다. 이러한 현상의 억제를 위해 릿지 페널티를 추가한 포트폴리오인 SLOPE+RIDGE의 결과를 살펴보면 0.70 ~ 0.99 사이의 회전율을 갖는 SLOPE\_30에 비해 0.38 ~ 0.56의 범위를 보여 회전율이 낮게 유지되었다. 반면 SLOPE\_MV의 경우 기존 1 이상의 값으로 SLOPE\_MV 보다 회전율이 높게 도출되는데, 이는 그룹화가 이뤄졌을때 각 그룹별로 하나의 자산만 남기도록 설정한 SLOPE\_MV의 특성을 고려하면 자연스러운 현상이다. SLOPE\_17의 경우 가장 큰 페널티를 모든 자산에 대해 일괄 적용한 Shortfall+LASSO 포트폴리오와 비교해 모든 데이터 셋에 대해 회전율이 더 작게 도출되었다. 위험 지표로 Shortfall이 아닌 Variance를 사용한 Variance+SLOPE 포트폴리오를 살펴보면 전반적으로 SLOPE\_30의 경우보다 높게 도출되

었으며, 특히 포트폴리오에서 고려하는 자산이 100개 이상인 SP100, FTSE100, FTSE250의 경우 회전율이 3 이상의 극단적으로 높은 양상을 보인다.

마지막으로 Table 6에서는  $t$ 시점의 회소성을 비교하며 마무리한다. 먼저, SLOPE\_30은 고려하는 자산의 30% ~ 40%에 투자하도록 구성되도록 하는 제약식을 기반으로 한다. 결과를 살펴보면 34% ~ 37%의 회소성을 가지므로 제약식에 부합하는 최적 포트폴리오가 도출된 것을 확인할 수 있다. 동일한 제약식을 사용하는 Variance+SLOPE 포트폴리오도 34% ~ 35%대의 회소성을 가진다. 다음으로 그룹화가 되는 경우 하나의 자산을 선택하는 SLOPE.MV의 경우 포트폴리오에 포함되는 자산의 수가 적으므로 회소성 또한 낮게 도출되었다. 특히 가장 많은 자산을 고려하는 FTSE250의 경우 회소성이 0.0498로 매우 작음을 확인할 수 있다. SLOPE\_17에서 고려하는 램다 시퀀스 중 가장 큰 첫 번째 램다를 일괄 페널티로 적용하는 Shortfall+LASSO의 경우 SLOPE\_17과 비교해 큰 페널티를 적용하기 때문에 모든 데이터 셋에 대해 더 작은 회소성을 갖는다.

모델의 성능비교를 위해 월간 타겟 기대수익률 ( $r_{pt}$ ) = 0.01과  $\alpha = 0.2$ 를 고려해 3개의 세팅을 추가로 고려했으며, 구체적인 결과값은 Appendix에서 확인할 수 있다.

## 6. 결론

본 논문은 적은 자산으로 양호한 수익을 내는 효율적인 포트폴리오의 운영을 위해 평균-숏폴 포트폴리오 최적화식에 슬로프 방식을 결합한 모형을 제안했다. 숏폴은 자산의 가격 상승과 하락을 동일한 위험으로 취급하는 분산과는 달리 가격 하락에 해당하는 하방 위험만을 위험으로 측정하기 위해 고안된 지표로 전통적인 포트폴리오 최적화 모형인 평균-분산 모형보다 정교한 포트폴리오 운영이 가능하도록 한다. 포트폴리오에 포함되는 자산의 수는 운영 비용에 직접적 영향을 미치므로, 변수 선택 기능이 있는 페널티 항을 추가해 자산의 수를 조절한다. SLOPE 페널티 항의 경우 단순 변수 선택 기능뿐만 아니라 동일한 위험 요소의 영향을 받는 자산의 경우 동일한 가중치가 도출되는 그룹화 효과 또한 갖는다. 이때 그룹화 효과는 투자자의 성향에 따라 다양한 형태의 포트폴리오를 구성할 수 있도록한다는 점에서 의의가 있다. 평균-숏폴 포트폴리오는 대부분의 경우 최적해 도출이 용이한 선형계획법 형태로의 변환을 통해 해를 구하나, SLOPE 방식을 결합하면서 절댓값의 순서 통계량이 식에 포함되었기에 해당 방식을 적용할 수 없다. 이에 본 논문에서는 ADMM 알고리즘의 적용을 통해 최적해를 구하는 새로운 알고리즘을 제안하였고, 해당 모형의 단계별 업데이트 과정을 제안하였다. 이 과정에서 새로 추가된 변수  $z$ 에 관한 업데이트 식을 계산이 용이한 QP 형태로 변환하는 과정을 거쳤다. SLOPE 방식을 활용한 평균-분산 포트폴리오에 대해 연구한 Kremer 등 (2020)은 히든 팩터 모델을 기반으로 생성한 3개 그룹 데이터를 바탕으로 SLOPE 페널티 항의 특성을 보인 바 있다. 해당 연구에서 큰 램다 시퀀스를 고려함에 따라 순서대로 통온리 포트폴리오, 동일 가중 포트폴리오가 형성되며, 이 과정에서 동일한 팩터의 영향을 받는 자산들은 동일한 가중치가 부여되는 그룹화 효과가 있음을 보였다. 본 논문에서는 동일한 세팅의 시뮬레이션 데이터를 통해 이러한 특징들이 숏폴을 위험 측정 요소로 활용했을 때에도 여전히 유효함을 확인하였다. 특히 다양한 포트폴리오의 구성에 있어 중요한 특징인 그룹화 효과와 관련해 특정 램다 시퀀스에서 사전 세팅된 3개의 그룹에 대한 가중치가 명확히 분리되는 결과를 확인했다는 점에서 의의가 있다. 다만 평균-분산 포트폴리오와 비교했을 때 도출되는 가중치의 변동이 크게 도출된 바 있으며, 이와 관련해서는 후속 연구를 통해 모형의 정교화가 필요할 것으로 보인다. 실증 데이터를 기반으로 SLOPE를 활용한 평균-숏폴 포트폴리오 모형에서 고려할 수 있는 4가지 포트폴리오 구성을 설명하고, 도출된 평가지표의 비교를 통해 각 포트폴리오의 특성에 대해 살펴보았다. 포트폴리오에 포함되는 자산의 수를 전체 자산의 30% ~ 40%로 유지하는 SLOPE\_30의 경우 대부분의 데이터에 대해 벤치마크로 고려한 동일 가중 포트폴리오보다 높은 기대 수익률과 낮은 분산 위험률을 보였다. SLOPE\_30에 릿지 페널티 항을 추가해 회전율이 억제되도록 설계한 SLOPE+RIDGE의 경우 모든 데이터에 대해 샤프지수가 높게 도출되었음을 확인하였다. 그룹화 효과를 활용한 포트폴리오인 SLOPE.MV의 경우 SLOPE\_30과 유사하게 대부분의 데이터에 대해 동일 가중 포트폴

리오에 비해 기대 수익률이 높았으나, 동시에 분산 위험률 또한 높게 도출되는 결과를 보였다. 이는 그룹별로 단 하나의 자산만을 고려하도록 추가한 제약식에 따른 결과로 해석되며, SLOPE의 그룹화 효과를 활용한 포트폴리오의 개선은 후속 연구의 영역으로 제시한다.

### Appendix A: $r_{pt} = 0.005$ , $\alpha = 0.2$ 세팅

Table A.1: Average return

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.1208	0.0625	<b>0.1533</b>	<b>0.1661</b>	<b>0.1467</b>	0.1519	0.1581
DAX30	0.1376	0.1161	0.1303	0.1339	0.121	0.1155	0.193
SP100	0.1127	0.0587	0.1119	<b>0.1427</b>	0.0979	0.0919	0.3195
FTSE100	0.1217	0.0208	<b>0.1703</b>	<b>0.2017</b>	<b>0.1542</b>	0.1444	0.2678
FTSE250	0.1367	0.0883	<b>0.2011</b>	<b>0.1367</b>	<b>0.1925</b>	0.1903	0.6631

Table A.2: Variance risk

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.045	0.0434	0.0495	0.0586	0.0491	0.0492	0.0497
DAX30	0.0698	0.0606	<b>0.0621</b>	0.0709	<b>0.0663</b>	0.0674	0.0682
SP100	0.0496	0.0454	<b>0.0453</b>	<b>0.048</b>	<b>0.0471</b>	0.0474	0.0998
FTSE100	0.0457	0.0431	<b>0.0382</b>	0.0558	<b>0.041</b>	0.0429	0.1173
FTSE250	0.0501	0.0477	<b>0.0414</b>	0.0663	<b>0.0418</b>	0.0427	0.2204

Table A.3: Comparison of risk - Variance risk and Shortfall risk

Data set	Variance risk			Shortfall risk		
	EW	SLOPE_30	Variance +SLOPE	EW	SLOPE_30	Variance +SLOPE
DOW30	0.045	0.0495	0.0497	0.0639	0.0678	0.071
DAX30	0.0698	<b>0.0621</b>	0.0682	0.0991	<b>0.0922</b>	0.0997
SP100	0.0496	<b>0.0453</b>	0.0998	0.0708	<b>0.0666</b>	0.1366
FTSE100	0.0457	<b>0.0382</b>	0.1173	0.0661	<b>0.0534</b>	0.1666
FTSE250	0.0501	<b>0.0414</b>	0.2204	0.069	<b>0.0591</b>	0.2822

Table A.4: Sharpe ratio

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.2237	0.1199	<b>0.2582</b>	<b>0.2362</b>	<b>0.2488</b>	0.2571	0.2653
DAX30	0.1643	0.1597	<b>0.1748</b>	0.1574	0.152	0.1428	0.2357
SP100	0.1893	0.1077	<b>0.2059</b>	<b>0.248</b>	0.1731	0.1614	0.2669
FTSE100	0.222	0.0402	<b>0.3716</b>	<b>0.301</b>	<b>0.3136</b>	0.2802	0.1902
FTSE250	0.2276	0.1542	<b>0.4048</b>	0.1717	<b>0.3841</b>	0.3713	0.2507

Table A.5: Turnover

Data set	Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	<b>0.8003</b>	1.2518	<b>0.7561</b>	0.7843	0.9402
DAX30	<b>0.7063</b>	1.237	<b>0.7452</b>	0.7803	0.8612
SP100	<b>0.8366</b>	<b>1.1174</b>	<b>0.7645</b>	0.8217	3.4242
FTSE100	<b>0.7194</b>	<b>1.0414</b>	<b>0.6439</b>	0.6875	3.2318
FTSE250	<b>0.6864</b>	<b>1.3634</b>	<b>0.5296</b>	0.5524	6.6872

Table A.6: Sparsity

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17			
DOW30	1	0.3529	0.2362	0.3046	0.244	0.3425	
DAX30	1	0.397	0.233	0.4167	0.3292	0.3557	
SP100	1	0.343	0.1064	0.2401	0.161	0.3457	
FTSE100	1	0.3583	0.1034	0.2976	0.2028	0.35	
FTSE250	1	0.3476	0.0408	0.239	0.16	0.3502	

## Appendix B: $r_{pt} = 0.01, \alpha = 0.1$ 세팅

Table B.1: Average return

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.1208	0.0625	<b>0.3019</b>	<b>0.3419</b>	<b>0.2785</b>	0.2962	0.1554
DAX30	0.1376	0.1161	<b>0.3355</b>	<b>0.4134</b>	<b>0.4158</b>	0.4124	0.1929
SP100	0.1127	0.0587	<b>0.2926</b>	<b>0.36</b>	<b>0.2661</b>	0.26	0.3188
FTSE100	0.1217	0.0208	<b>0.3492</b>	<b>0.3492</b>	<b>0.3925</b>	0.388	0.2337
FTSE250	0.1367	0.0883	<b>0.417</b>	<b>0.2551</b>	<b>0.4219</b>	0.4172	0.6723

Table B.2: Variance risk

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.045	0.0434	0.1284	0.1304	0.1517	0.1549	0.0501
DAX30	0.0698	0.0606	0.1551	0.1486	0.1939	0.1961	0.0682
SP100	0.0496	0.0454	0.1301	0.116	0.1342	0.1423	0.0996
FTSE100	0.0457	0.0431	0.1233	0.1091	0.1352	0.1409	0.1169
FTSE250	0.0501	0.0477	0.0998	0.1039	0.1008	0.1019	0.2198

Table B.3: Comparison of risk - Variance risk and Shortfall risk

Data set	Variance risk			Shortfall risk		
	EW	SLOPE_30	Variance +SLOPE	EW	SLOPE_30	Variance +SLOPE
DOW30	0.045	0.1284	0.0501	0.0886	0.2281	0.1001
DAX30	0.0698	0.1551	0.0682	0.1386	0.3073	0.146
SP100	0.0496	0.1301	0.0996	0.0993	0.2657	0.1945
FTSE100	0.0457	0.1233	0.1169	0.0881	0.2348	0.2325
FTSE250	0.0501	0.0998	0.2198	0.0903	0.1871	0.391

Table B.4: Sharpe ratio

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.2237	0.1199	0.1959	0.2186	0.153	0.1594	0.2586
DAX30	0.1643	0.1597	<b>0.1803</b>	<b>0.2318</b>	<b>0.1787</b>	0.1753	0.2358
SP100	0.1893	0.1077	0.1875	<b>0.2587</b>	0.1652	0.1522	0.2668
FTSE100	0.222	0.0402	<b>0.236</b>	<b>0.2668</b>	<b>0.2418</b>	0.2294	0.1667
FTSE250	0.2276	0.1542	<b>0.3481</b>	0.2047	<b>0.3487</b>	0.3413	0.2549

Table B.5: Turnover

Data set	Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	2.7519	3.2691	3.1764	3.048	0.9519
DAX30	2.1797	2.7844	2.7852	2.7681	0.8603
SP100	<b>3.1546</b>	<b>3.5413</b>	<b>2.9314</b>	2.9039	3.4198
FTSE100	<b>2.7432</b>	3.3187	<b>2.5904</b>	2.5354	3.2179
FTSE250	<b>2.3977</b>	<b>2.5044</b>	<b>2.0089</b>	1.9282	6.6355

Table B.6: Sparsity

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17			
DOW30	1	0.3534	0.2664	0.4402	0.3736	0.3428	
DAX30	1	0.3461	0.2643	0.4699	0.3875	0.3557	
SP100	1	0.3479	0.221	0.2895	0.2172	0.3458	
FTSE100	1	0.3523	0.2179	0.2994	0.2257	0.3498	
FTSE250	1	0.3446	0.1124	0.2232	0.1589	0.3495	

### Appendix C: $r_{pt} = 0.01$ , $\alpha = 0.2$ 세팅

Table C.1: Average return

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.1208	0.0625	<b>0.3049</b>	<b>0.3887</b>	<b>0.2936</b>	0.3077	0.1554
DAX30	0.1376	0.1161	<b>0.2726</b>	<b>0.3039</b>	<b>0.4252</b>	0.4114	0.1929
SP100	0.1127	0.0587	<b>0.3178</b>	<b>0.3596</b>	<b>0.2682</b>	0.2567	0.3188
FTSE100	0.1217	0.0208	<b>0.3951</b>	<b>0.3633</b>	<b>0.3951</b>	0.391	0.2337
FTSE250	0.1367	0.0883	<b>0.4107</b>	<b>0.4354</b>	<b>0.414</b>	0.4199	0.6723

Table C.2: Variance risk

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.045	0.0434	0.1346	0.1414	0.153	0.1571	0.0501
DAX30	0.0698	0.0606	0.1578	0.1497	0.1954	0.1992	0.0682
SP100	0.0496	0.0454	0.12	0.1372	0.1403	0.1474	0.0996
FTSE100	0.0457	0.0431	0.1312	0.1089	0.1379	0.1421	0.1169
FTSE250	0.0501	0.0477	0.0995	0.1254	0.0993	0.1	0.2198

Table C.3: Comparison of risk - Variance risk and Shortfall risk

Data set	Variance risk			Shortfall risk		
	EW	SLOPE_30	Variance +SLOPE	EW	SLOPE_30	Variance +SLOPE
DOW30	0.045	0.1346	0.0501	0.0639	0.1806	0.072
DAX30	0.0698	0.1578	0.0682	0.0991	0.2172	0.0996
SP100	0.0496	0.12	0.0996	0.0708	0.1695	0.1365
FTSE100	0.0457	0.1312	0.1169	0.0661	0.182	0.1661
FTSE250	0.0501	0.0995	0.2198	0.069	0.1389	0.2826

Table C.4: Sharpe ratio

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	Index	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	0.2237	0.1199	0.1888	<b>0.2291</b>	0.16	0.1633	0.2586
DAX30	0.1643	0.1597	0.144	<b>0.1692</b>	<b>0.1813</b>	0.1721	0.2358
SP100	0.1893	0.1077	<b>0.2208</b>	<b>0.2185</b>	0.1594	0.1451	0.2668
FTSE100	0.222	0.0402	<b>0.2509</b>	<b>0.278</b>	<b>0.2388</b>	0.2294	0.1667
FTSE250	0.2276	0.1542	<b>0.344</b>	<b>0.2893</b>	<b>0.3476</b>	0.3498	0.2549

Table C.5: Turnover

Data set	Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17		
DOW30	2.8513	3.3136	3.0997	2.9734	0.9519
DAX30	2.1372	2.8292	2.6792	2.6825	0.8603
SP100	<b>2.995</b>	3.576	<b>2.7556</b>	2.7685	3.4198
FTSE100	<b>2.5524</b>	3.1171	<b>2.4262</b>	2.3654	3.2179
FTSE250	<b>2.1929</b>	<b>2.3159</b>	<b>1.8239</b>	1.7358	6.6355

Table C.6: Sparsity

Data set	Benchmark		Shortfall+SLOPE			Shortfall +LASSO	Variance +SLOPE
	EW	SLOPE_30	SLOPE_MV	SLOPE_17			
DOW30	1	0.3575	0.2879	0.4287	0.3606	0.3428	
DAX30	1	0.3485	0.2735	0.4589	0.3771	0.3557	
SP100	1	0.3506	0.2126	0.2742	0.2053	0.3458	
FTSE100	1	0.3516	0.2081	0.2848	0.2118	0.3498	
FTSE250	1	0.3537	0.1051	0.1992	0.1442	0.3495	

## References

- Artzner P, Delbaen F, Eber JM, and Heath D (1999). Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, **9**, 203–228.
- Bawa VS (1975). Optimal rules for ordering uncertain prospects, *Journal of Financial Economics*, **2**, 95–121.
- Bertsimas D, Lauprete GJ, and Samarov A (2004). Shortfall as a risk measure: Properties, optimization and applications, *Journal of Economic Dynamics & Control*, **28**, 1353–1381.
- Bogdan M, van den Berg E, Su W, and Cades E (2013). Statistical estimation and testing via the sorted L1 norm, Available from: <https://arxiv.org/abs/1310.1969>



- Bogdan M, van den Berg E, Su W, and Cades E (2015). SLOPE-adaptive variable selection via convex optimization, *The Annals of Applied Statistics*, **9**, 1103–1140.
- Fishburn PC (1977). Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns, *The American Economic Review*, **67**, 116–126.
- Harlow WV and Rao R (1999). Asset pricing in a generalized mean-lower partial moment framework: Theory and evidence, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **24**, 285–311.
- Huang CF and Litzenberger RH (1988). Foundations for financial economics, *The Review of Financial Studies*, **4**, 447–449.
- Kremer P, Lee S, Bogdan M, and Paterlini S (2020). Sparse portfolio selection via the sorted  $\ell_1$ -Norm, *Journal of Banking & Finance*, **110**, 105687, 1–15.
- Markowitz H (1952). Portfolio selection, *Journal of Finance*, **7**, 77–91.
- Markowitz H (1959). *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York.
- Park S, Song H, and Lee S (2019). Linear programming models for portfolio optimization using a benchmark, *The European Journal of Finance*, **25**, 435–457.
- Rockafella RT and Uryasev S (2000). Optimization of conditional value-at-risk, *Journal of Risk*, **2**, 493–517.
- Roy AD (1952). Safety first and the holding of assets, *Econometrica*, **20**, 431–449.
- Sharpe WF (1966). Mutual fund performance, *The Journal of Business*, **39**, 119–138.
- Zeng X and Figueiredo M (2014). Decreasing weighted sorted  $l_1$  regularization, *IEEE Signal Processing Letters*, **21**, 1240–1244.

Received October 19, 2023; Revised December 6, 2023; Accepted January 15, 2024

## 슬로프 방식을 이용한 평균-숏폴 포트폴리오 최적화

조해인<sup>a</sup>, 박세영<sup>1,b</sup>

<sup>a</sup>성균관대학교 핀테크융합전공; <sup>b</sup>연세대학교 응용통계학과

---

### 요약

기대 수익률은 높이고, 재무적 위험은 낮추는 것을 목표로 하는 금융 포트폴리오 최적화 분야에서는 위험 측정 지표에 관한 연구가 활발히 진행되어 왔다. 적은 자산으로 효율적인 포트폴리오를 구성하기 위해 다양한 페널티 항을 활용한 연구 또한 지속해서 진행되어 왔다. 본 논문에서는 평균-숏폴 포트폴리오와 SLOPE 페널티 항을 결합한 새로운 포트폴리오 최적화 식을 제안하였다. 이 과정에서 선형계획법으로 표현되지 않는 최적화식을 새로운 변수를 도입해 표현하고, 이를 ADMM 알고리즘을 사용해 해결하는 방식을 제안하였다. SLOPE 페널티 항이 갖는 그룹화 특징이 본 논문에서 제안하는 평균-숏폴 포트폴리오에서도 해당 특징이 유효함을 시뮬레이션 데이터를 바탕으로 확인하였다. 실증 데이터 분석을 통해서도 본 논문에서 제안한 모형을 기반으로 실제 투자 환경에서 고려할 수 있는 4가지 종류의 포트폴리오 구성 방식을 제안하고, 평가하였다.

주요용어: 포트폴리오 최적화, 숏폴, 슬로프, ADMM

---