

# A study on the accuracy of a numerical iteration for Markov processes by using reliability models

Hyeonah Park<sup>a</sup>, Seongryong Na<sup>1,a</sup>

<sup>a</sup>Division of Data Science, Yonsei University

## Abstract

For Markov processes whose stationary probabilities are difficult to obtain in the analytical form, approximate solutions can be considered using numerical methods such as a matrix operation method or an iterative calculation method. In this paper we perform the study to verify the accuracy of a numerical iteration formula which calculate the stationary probabilities of Markov chains or processes. Especially, the convergence and accuracy of the numerical method are investigated by using Markov models for system availability. We compare the values of the system availability based on the numerical calculation and those based on the complicated but analytical solutions. We also calculate the iteration numbers necessary for the convergence of the numerical solutions. The accuracy and usefulness of the numerical iterative calculation method can be ascertained through this study.

Keywords: Markov process, stationary probability, numerical iteration, system availability, limiting probability

## 1. 서론

확률현상을 마코프 과정(Markov process)으로 표현할 때 주요 척도를 정상확률(stationary probability) 또는 극한확률(limiting probability)의 값으로 계산하는 경우가 많다. 큐잉 시스템의 평균대기시간(mean waiting time), 손실 시스템의 탈락확률(loss probability), 수리가능 시스템의 시스템 가용도(system availability) 등을 예로 들 수 있다. 마코프 과정의 정상확률은 균형방정식(balance equation)을 이용해서 구하게 된다. 마코프 과정이 가역성 등의 조건을 만족하면 상세 균형방정식을 이용해서 해석적인 형태의 체계적인 정상 해를 유도할 수 있다. 반면에 가역성 조건이 성립하지 않는 마코프 과정의 경우에는 균형방정식으로부터 수식적 형태의 정상 해를 유도하기가 어려운 경우가 많다. 마코프 과정의 상태의 수가 증가할수록 더욱 일반적으로 나타나는 결과라고 할 수 있다.

해석적인 해를 대신해서 수치적 반복법(numerical iteration)에 의한 근사 해를 구할 수 있다. 균형방정식의 행렬 표현에 기초한 행렬 연산 방법과 균형방정식의 반복 계산에 기초한 반복식을 이용하는 방법을 고려할 수 있다. 마코프 과정의 정상확률을 구하기 위한 행렬 연산 방법과 반복 방법에 대한 다양한 이론이 O'Leary (1993)와 Stewart (2000) 등에 잘 소개되어 있다. 많은 방법 중에서 가장 이해하기 쉬운 거듭제곱법의 수렴 속도 문제를 해결하기 위한 연구를 Zhao 등 (2012)과 Nesterov와 Nemirovski (2015) 등이 수행하였다. 한편 Na (2014)에서는 내재된 이산 시간 마코프 체인(embedded discrete-time Markov chain)의  $n$ -단계 전이 확률을 직접 계산하는 방식으로 거듭제곱법의 수렴 속도 문제를 해결하는 방법이 연구되었다. 이산 시간 마코프 체인의

<sup>1</sup>Corresponding author: Division of Data Science, Yonsei University, 1 Yonseidae-gil, Wonju, Gangwon-do 26493, Korea.  
E-mail: nasr@yonsei.ac.kr

$n$ -단계 전이확률( $n$ -step transition probability)이 지수적 속도로 극한확률로 수렴한다는 성질은 Ross (1996)를 참고할 수 있다.

이 논문에서는 Na (2014)에서 제시된 내재 마코프 체인을 이용한 반복 계산식의 정확성을 연구한다. 내재 마코프 체인의 균형방정식을 이용한 반복 계산 방법의 수렴성은 이론적으로 입증된 사실이지만 실제 마코프 모형에 대한 수치 실험으로 확인하고자 하며 Na와 Bang (2022)에서 다루어진 수리가능 시스템의 신뢰도 모형(reliability model)을 이용한다. 반복 계산 결과의 정확성 여부를 확인하기 위하여 정상확률이 수치적으로 가능한 마코프 모형이 필요하며 균형방정식에 대하여 복잡하지만 해석적인 해를 구할 수 있는 앞의 신뢰도 모형이 적합하다. 정상확률을 통하여 계산되는 시스템 가용도를 구해서 수치적 반복 계산식의 정확성과 수렴성을 검토하고자 한다. 즉 수치적 계산에 의한 시스템 가용도 값이 복잡한 해석적 해에 기초한 정확한 값과 일치하는가 여부와 필요한 반복 회수를 구해 본다. 이를 통하여 수치적 반복 계산법의 정확성과 유용성을 확인할 수 있다.

이 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서 시스템 가용도를 위한 마코프 모형을 소개하고 수치적 반복 계산을 적용하기 위한 내재 마코프 체인의 균형방정식을 정리하고 반복 계산 방법을 설명한다. 수치적 반복법의 정확성과 수렴 속도를 확인하는 수치 실험의 결과는 3절에 정리한다.

## 2. 시스템 가용도를 위한 마코프 모형과 수치적 반복법

수리가능 시스템(repairable system)에 대한 가장 기본적인 모형은 시스템의 기능 여부에 따라 온, 오프 상태를 가지는 두 가지 상태의 연속 시간 마코프 과정(two-state continuous-time Markov process)으로 표현하는 것이다. 한편 현실적인 목적으로 시스템의 고장 여부를 탐지하는 고장감지장치(failure detection equipment; FDE)를 고려하는 신뢰도 모형을 Na (2011)에서 다루었다. 주요 기능을 담당하는 메인 시스템(main system; MS)의 동작 여부를 실시간 감시하고 통제하는 원격제어장치 등을 반영한 모형으로 이해할 수 있다. 이와 관련한 추가적인 연구 내용은 Na와 Bang (2013, 2022)을 참고할 수 있다. 이 연구에서는 MS-FDE 시스템에 대한 마코프 모형을 이용해서 수치적 반복법의 정확성을 연구하고자 한다. Na와 Bang (2022)에서는 메인 시스템의 작동과 고장감지장치의 운영에 대하여 다양한 수리정책을 고려하고 이를 마코프 모형으로 표현하였는데 이 연구에서는 기본적인 두 가지 모형을 이용한다.

먼저 메인 시스템 수리 중에는 고장감지장치의 고장이 발생하지 않는 것을 가정하는 NF (no failure) 모형이다. 상태공간은  $\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)\}$  집합으로 표현 가능한데 0 과 1의 값은 각각 미작동 또는 작동을 의미하고 첫 번째와 두 번째 성분은 각각 메인 시스템 또는 고장감지장치의 상태를 나타낸다. 메인 시스템과 고장감지장치의 고장률(failure rate)을 각각  $\lambda_M, \lambda_D$  그리고 수리율(repair rate)을 각각  $\mu_M, \mu_D$  값으로 표현한다. NF 모형을 표현하는 상태 전이도(transition diagram)는 Figure 1과 같고 마코프 과정에 대한 균형방정식은 다음과 같다.

$$(1,1) : p(11)(\lambda_M + \lambda_D) = p(01)\mu_M + p(10)\mu_D$$

$$(1,0) : p(10)(\lambda_M + \mu_D) = p(11)\lambda_D$$

$$(0,1) : p(01)\mu_M = p(11)\lambda_M + p(00)\mu_D$$

$$(0,0) : p(00)\mu_D = p(10)\lambda_M,$$

여기에서  $p(i,j)$ 는 상태  $(i,j)$ 에 대한 정상확률이다.

한편 NF 모형의 내재 마코프 체인의 정상확률  $\tilde{p}(i,j)$ 에 대한 균형방정식을 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$(1,1) : \tilde{p}(11) = \tilde{p}(01) + \tilde{p}(10) \cdot \mu_D / (\lambda_M + \mu_D)$$

$$(1,0) : \tilde{p}(10) = \tilde{p}(11) \cdot \lambda_D / (\lambda_M + \lambda_D)$$

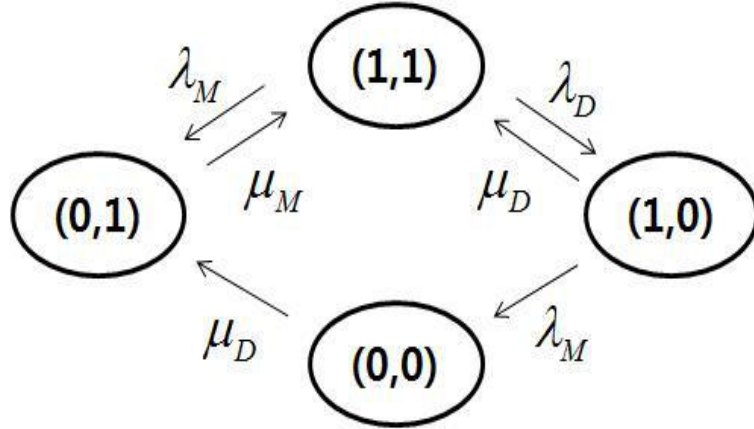


Figure 1: Transition diagram of MS-FDE system (NF).

$$(0,1) : \tilde{p}(01) = \tilde{p}(11) \cdot \lambda_M / (\lambda_M + \lambda_D) + \tilde{p}(00)$$

$$(0,0) : \tilde{p}(00) = \tilde{p}(10) \cdot \lambda_M / (\lambda_M + \mu_D).$$

앞의 균형방정식을 이용해서  $n$ -단계 전이확률을 구하기 위한 반복 계산식을 다음과 같이 수립한다.

$$\tilde{p}^{(n)}(11) = \tilde{p}^{(n-1)}(01) + \tilde{p}^{(n-1)}(10) \cdot \mu_D / (\lambda_M + \mu_D)$$

$$\tilde{p}^{(n)}(10) = \tilde{p}^{(n-1)}(11) \cdot \lambda_D / (\lambda_M + \lambda_D)$$

$$\tilde{p}^{(n)}(01) = \tilde{p}^{(n-1)}(11) \cdot \lambda_M / (\lambda_M + \lambda_D) + \tilde{p}^{(n-1)}(00)$$

$$\tilde{p}^{(n)}(00) = \tilde{p}^{(n-1)}(10) \cdot \lambda_M / (\lambda_M + \mu_D).$$

그런데 NF 모형에 대한 내재 마코프 체인의 주기는 2이다. 주기적 마코프 체인의 경우에는 정상확률을 구하기 위하여 평균 전이확률을 다음과 같이 계산한다.

$$\tilde{p}^{(n)*}(ij) = \frac{\tilde{p}^{(n)}(ij) + \tilde{p}^{(n-1)}(ij)}{2}.$$

평균 전이확률이 수렴할 때까지 반복 계산을 수행하며 그 수렴값을  $\tilde{p}^*(ij)$ 로 표현한다. 이 값이 내재 마코프 체인의 균형방정식을 만족하는 정상확률의 수치적 근사값이다.

내재 마코프 체인의 정상확률의 근사값을 이용해서 NF 모형에 대한 연속 시간 마코프 과정의 정상확률을 다음과 같이 수치적으로 결정한다.

$$(1,1) : p^*(11) = \tilde{p}^*(11)(\lambda_M + \lambda_D)^{-1} \cdot C^{-1}$$

$$(1,0) : p^*(10) = \tilde{p}^*(10)(\lambda_M + \mu_D)^{-1} \cdot C^{-1}$$

$$(0,1) : p^*(01) = \tilde{p}^*(01)\mu_M^{-1} \cdot C^{-1}$$

$$(0,0) : p^*(00) = \tilde{p}^*(00)\mu_D^{-1} \cdot C^{-1},$$

여기에서  $C$ 는 정규화 상수이다.

최종적으로 마코프 과정의 정상확률을 이용하여 시스템 가용도를 결정한다. 시스템 가용도는 메인 시스템이 작동할 확률로 정의되며 상태 (1,1), (1,0)의 정상확률의 합과 같다. 즉 NF 모형의 성질을 가지는 수리가능 시스템의 시스템 가용도에 대한 수치적 근사값은 다음과 같다.

$$Av(NF)^* = p^*(11) + p^*(10).$$

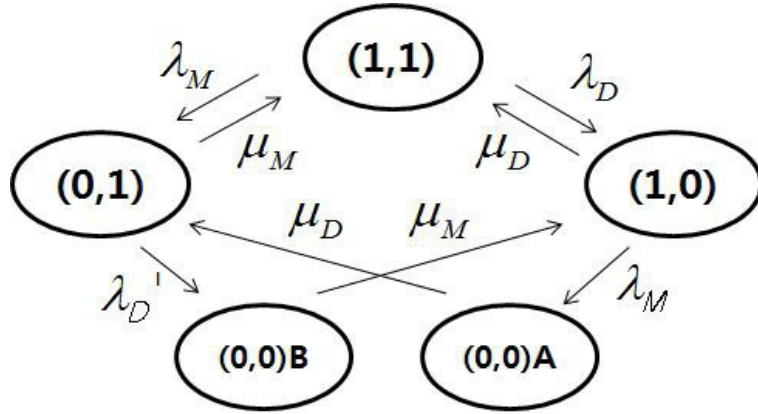


Figure 2: Transition diagram of MS-FDE system (SQ).

둘째로 메인 시스템 수리 중에도 고장감지장치의 고장이 발생할 수 있는 상황을 가정하는 신뢰도 모형을 고려한다. 이 논문에서는 고장난 메인 시스템과 고장감지장치의 수리는 발생 순서에 따라 이루어지는 SQ (sequential repair) 모형을 다룬다. SQ 모형의 상태공간은  $\{(1,1), (1,0), (0,1), (0,0)A, (0,0)B\}$ 로 표현되는데 (0,0)A는 고장감지장치 수리 중에 메인 시스템이 고장난 기존의 고장 상태이며 (0,0)B는 메인 시스템 수리 중에 고장감지장치가 고장난 새로운 고장 상태를 나타낸다. SQ 모형에 대한 연속 시간 마코프 과정의 상태 전이도는 Figure 2와 같고 균형방정식은 다음과 같다.

$$(1,1) : p(11)(\lambda_M + \lambda_D) = p(01)\mu_M + p(10)\mu_D$$

$$(1,0) : p(10)(\lambda_M + \mu_D) = p(11)\lambda_D + p(00B)\mu_M$$

$$(0,1) : p(01)(\mu_M + \lambda_D') = p(11)\lambda_M + p(00A)\mu_D$$

$$(0,0)A : p(00A)\mu_D = p(10)\lambda_M$$

$$(0,0)B : p(00B)\mu_M = p(01)\lambda_D',$$

여기에서 고장감지장치의 고장률이 메인 시스템의 작동 여부에 따라  $\lambda_D$  또는  $\lambda_D'$ 로 다른 값을 가지는 것을 가정한다.

SQ 모형의 내재 마코프 체인에 대한 균형방정식은 다음과 같다.

$$(1,1) : \tilde{p}(11) = \tilde{p}(01) \cdot \mu_M / (\mu_M + \lambda_D') + \tilde{p}(10) \cdot \mu_D / (\lambda_M + \mu_D)$$

$$(1,0) : \tilde{p}(10) = \tilde{p}(11) \cdot \lambda_D / (\lambda_M + \lambda_D) + \tilde{p}(00B)$$

$$(0,1) : \tilde{p}(01) = \tilde{p}(11) \cdot \lambda_M / (\lambda_M + \lambda_D) + \tilde{p}(00A)$$

$$(0,0)A : \tilde{p}(00A) = \tilde{p}(10) \cdot \lambda_M / (\lambda_M + \mu_D)$$

$$(0,0)B : \tilde{p}(00B) = \tilde{p}(01) \cdot \lambda_D' / (\mu_M + \lambda_D').$$

SQ 모형의 시스템 가용도를 앞의 NF 모형과 동일한 수치적 반복법의 절차로 구할 수 있다. 즉 내재 마코프 체인에 대한 균형방정식을 토대로  $n$ -단계 전이확률을 수치적으로 계산하고 그 결과를 이용해서 시스템 가용도의 수치적 근사값을 결정할 수 있다.

Table 1: Iteratively computed  $\bar{p}^{(n)*}(ij)$  until convergence and approximated  $p^*(ij)$  for NF and SQ with combination 1 of system parameters ( $\lambda_M = 1, \mu_M = 1, \lambda_D = 1, \mu_D = 1, \lambda'_D = 1$ )

NF					SQ					
$n$	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)	$n$	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)A	(0,0)B
1	0.5	0.25	0.25	0	1	0.5	0.25	0.25	0	0
2	0.375	0.25	0.25	0.125	2	0.25	0.25	0.25	0.125	0.125
3	0.375	0.1875	0.3125	0.125	3	0.25	0.25	0.25	0.125	0.125
4	0.40625	0.1875	0.3125	0.09375	$p^*$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
5	0.40625	0.20312	0.29688	0.09375						
6	0.39844	0.20312	0.29688	0.10156						
7	0.39844	0.19922	0.30078	0.10156						
8	0.40039	0.19922	0.30078	0.09961						
9	0.40039	0.2002	0.2998	0.09961						
10	0.3999	0.2002	0.2998	0.1001						
11	0.3999	0.19995	0.30005	0.1001						
12	0.40002	0.19995	0.30005	0.09998						
13	0.40002	0.20001	0.29999	0.09998						
$p^*$	0.28574	0.14287	0.42857	0.14283						

### 3. 수치 실험

앞에서 다룬 신뢰도 모형은 복잡한 형태이지만 해석적 해를 가지는 마코프 과정이다. 따라서 반복법에 의한 수치적 근사값과 해석적 해의 수치값의 일치 여부를 정확하게 비교할 수 있다. 이 절에서는 2절에서 정리한 NF 모형과 SQ 모형의 다양한 모수 조합에 대하여 수치적 반복법에 의한 시스템 가용도의 근사값을 구하고 해석적 수식값과 비교한다. 또한 적절한 반복 단계에서 계산되는 시스템 가용도의 수치값을 비교하면서 수치적 반복법의 수렴 속도를 검토한다.

고장감지장치를 고려하지 않는 메인 시스템만의 교대 과정에 대한 시스템 가용도는

$$Av = \frac{\mu_M}{\lambda_M + \mu_M}$$

식으로 표현 가능하다. 고장감지장치를 포함하는 NF 모형의 시스템 가용도는 Na (2011)의 연구를 참고할 수 있고 다음과 같다.

$$Av(\text{NF}) = \frac{\mu_M}{\lambda_M + \mu_M} \cdot \frac{\mu_D(\lambda_M + \mu_M)(\lambda_M + \lambda_D + \mu_D)}{\mu_D(\lambda_M + \mu_M)(\lambda_M + \lambda_D + \mu_D) + \lambda_M \lambda_D \mu_M}$$

한편 Na와 Bang (2013)의 결과에서 SQ 모형의 시스템 가용도는 다음과 같다.

$$Av(\text{SQ}) = \frac{\mu_M}{\lambda_M + \mu_M} \cdot \frac{\mu_D(\lambda_M + \mu_M)(\lambda_M + \lambda_D + \mu_D)}{\mu_D(\lambda_M + \mu_M)(\lambda_M + \lambda_D + \mu_D) + \lambda_M \lambda_D \mu_M + (\lambda'_D + \mu_M)\{\mu_D(\lambda_M + \mu_M)(\lambda_M + \lambda_D + \mu_D) + \lambda_M \lambda_D \mu_M\}} \cdot C^{-1},$$

여기에서 정규화 상수  $C$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} C &= \mu_M \mu_D (\lambda'_D (\lambda_M + \lambda_D) + \lambda_D \mu_M) + \lambda_M \mu_M \mu_D (\lambda_M + \lambda_D + \mu_D) + \\ &\quad \mu_M \mu_D (\lambda_M \mu_M + \mu_M \mu_D + \lambda'_D \mu_D) + \lambda_M \lambda'_D \mu_D (\lambda_M + \lambda_D + \mu_D) + \\ &\quad \lambda_M \mu_M (\lambda'_D (\lambda_M + \lambda_D) + \lambda_D \mu_M) \\ &= (\lambda'_D + \mu_M) \{\mu_D (\lambda_M + \mu_M) (\lambda_M + \lambda_D + \mu_D) + \lambda_M \lambda_D \mu_M\} + \lambda_M^2 \lambda'_D \mu_M. \end{aligned}$$

Table 2: Iteratively computed  $\bar{p}^{(n)*}(ij)$  until convergence and approximated  $p^*(ij)$  for NF and SQ with combination 2 of system parameters ( $\lambda_M = 4, \mu_M = 6, \lambda_D = 2, \mu_D = 8, \lambda'_D = 1$ )

NF					SQ					
$n$	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)	$n$	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)A	(0,0)B
1	0.5	0.16667	0.33333	0	1	0.5	0.16667	0.33333	0	0
2	0.44444	0.16667	0.33333	0.05556	2	0.39683	0.16667	0.33333	0.05556	0.04762
3	0.44444	0.14815	0.35185	0.05556	3	0.39683	0.17989	0.32011	0.05556	0.04762
4	0.45062	0.14815	0.35185	0.04938	4	0.39431	0.17989	0.32011	0.05996	0.04573
5	0.45062	0.15021	0.34979	0.04938	5	0.39431	0.17716	0.32284	0.05996	0.04573
6	0.44993	0.15021	0.34979	0.05007	6	0.39483	0.17716	0.32284	0.05905	0.04612
7	0.44993	0.14998	0.35002	0.05007	7	0.39483	0.17773	0.32227	0.05905	0.04612
8	0.45001	0.14998	0.35002	0.04999	8	0.39472	0.17773	0.32227	0.05924	0.04604
$p^*$	0.49315	0.08218	0.38358	0.04109	9	0.39472	0.17761	0.32239	0.05924	0.04604
					10	0.39474	0.17761	0.32239	0.0592	0.04606
					$p^*$	0.46422	0.10444	0.32497	0.05222	0.05416

다양한 시스템 모수의 조합과 NF 모형 또는 SQ 모형 각각에 대하여 수치적 반복법에 의한 시스템 가용도의 수치값을 단계별로 계산한다. 다음과 같은 시스템 모수의 조합을 고려한다.

조합 1 :  $\lambda_M = 1, \mu_M = 1, \lambda_D = 1, \mu_D = 1, \lambda'_D = 1$

조합 2 :  $\lambda_M = 4, \mu_M = 6, \lambda_D = 2, \mu_D = 8, \lambda'_D = 1$

조합 3 :  $\lambda_M = 1, \mu_M = 9, \lambda_D = 3, \mu_D = 2, \lambda'_D = 2$

현실 세계의 시스템 신뢰도는 이 연구에서 가정한 모수 조합의 신뢰도보다는 높을 것으로 예상할 수 있다. 다 마코프 과정의 수치 해가 수렴하는 과정의 효율적인 검토가 가능하도록 시스템 모수를 적절히 구성하였다.

조합 1의 조건의 NF 모형과 SQ 모형에 대한 수치 실험 결과는 각각 Table 1에 정리하였다. 이때 수치 실험을 위하여 상태 (1, 1)에서 출발하는 마코프 체인을 가정한다. 즉 마코프 체인의 초기 확률은  $\bar{p}^{(0)}(11) = 1$ 이고 다른 상태의 초기 확률은 0을 가정한다.

내재 마코프 체인의 정상확률 수렴값 결정을 위한 수치 실험의 반복은 직전 단계의 확률 반복 계산값과 차이가  $\epsilon = 10^{-4}$  이하가 되는 단계에서 멈춘다. Table 1의 결과에서 NF 모형의 내재 마코프 체인의 정상확률에 대한 반복 계산은 13번째 반복에서 중단 조건을 만족함을 확인할 수 있다. 연속 시간 마코프 과정의 정상확률 근사값은 마지막 행에 주어지고 조합 1의 NF 모형에 대한 가용도는  $Av(NF)^* = p^*(11) + p^*(10) = 0.42861$ 의 근사값으로 결정된다. 이 근사값은 수식으로 계산되는  $Av(NF) = 0.42857$ 과 거의 일치한다. 한편 SQ 모형에서는 수렴 속도가 매우 빠르게 나타나는데 조합 1의 모수 가정에 따른 특이한 결과라 할 수 있다. 조합 1의 SQ 모형의 경우 반복 계산에 의한 가용도가  $Av(SQ)^* = p^*(11) + p^*(10) = 0.4$ 의 근사값을 가지는데 이는 수식에 의한  $Av(SQ) = 0.4$ 와 일치한다. 모형의 가정 또는 해석적인 가용도의 수식에서 쉽게 확인할 수 있는  $Av > Av(NF) > Av(SQ)$ 의 대소관계가  $Av > Av(NF)^* > Av(SQ)^*$ 의 결과에서 수치적인 가용도 근사값 사이에도 성립함을 알 수 있다.

Table 2는 조합 2의 시스템 모수를 가지는 NF 모형과 SQ 모형에 대한 단계별 반복 계산값과 정상확률의 최종 근사값을 가진다. 조합 2는 메인 시스템의 가용도는  $Av = 0.6$ 이고 고장감지장치의 가용도는 0.8이 되는 모수 가정이다. Table 2 결과에서 NF 모형에 대한 반복 계산은 8회에서 수렴하고 시스템 가용도의 근사값  $Av(NF)^* = p^*(11) + p^*(10) = 0.57533$ 은 수식에 의한  $Av(NF) = 0.57534$  값과 거의 유사하다. SQ 모형의 반복 계산은 10회에서 수렴하고 시스템 가용도에 대한 근사값은  $Av(SQ)^* = p^*(11) + p^*(10) = 0.56865$ 이고 수식에 의한 가용도는  $Av(SQ) = 0.56867$ 이다. 조합 2의 Table 2의 결과에서  $Av > Av(NF)^* > Av(SQ)^*$ 의 대소관계가

Table 3: Iteratively computed  $\bar{p}^{(n)*}(ij)$  until convergence and approximated  $p^*(ij)$  for NF and SQ with combination 3 of system parameters ( $\lambda_M = 1, \mu_M = 9, \lambda_D = 3, \mu_D = 2, \lambda'_D = 2$ )

NF					SQ					
$n$	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)	$n$	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)A	(0,0)B
1	0.5	0.375	0.125	0	1	0.5	0.375	0.125	0	0
2	0.375	0.375	0.125	0.125	2	0.35227	0.375	0.125	0.125	0.02273
3	0.375	0.28125	0.21875	0.125	3	0.35227	0.28693	0.21307	0.125	0.02273
4	0.40625	0.28125	0.21875	0.09375	4	0.36562	0.28693	0.21307	0.09564	0.03874
5	0.40625	0.30469	0.19531	0.09375	5	0.36562	0.31295	0.18705	0.09564	0.03874
6	0.39844	0.30469	0.19531	0.10156	6	0.36167	0.31295	0.18705	0.10432	0.03401
7	0.39844	0.29883	0.20117	0.10156	7	0.36167	0.30526	0.19474	0.10432	0.03401
8	0.40039	0.29883	0.20117	0.09961	8	0.36284	0.30526	0.19474	0.10175	0.03541
9	0.40039	0.30029	0.19971	0.09961	9	0.36284	0.30754	0.19246	0.10175	0.03541
10	0.3999	0.30029	0.19971	0.1001	10	0.36249	0.30754	0.19246	0.10251	0.03499
11	0.3999	0.29993	0.20007	0.1001	11	0.36249	0.30686	0.19314	0.10251	0.03499
12	0.40002	0.29993	0.20007	0.09998	12	0.3626	0.30686	0.19314	0.10229	0.03512
13	0.40002	0.30002	0.19998	0.09998	13	0.3626	0.30706	0.19294	0.10229	0.03512
$p^*$	0.36737	0.36737	0.08163	0.18363	14	0.36257	0.30706	0.19294	0.10235	0.03508
					$p^*$	0.34126	0.38535	0.06604	0.19268	0.01467

성립한다.

조합 3의 가정에 대한 NF 모형과 SQ 모형의 수치 실험 결과는 Table 3이다. NF 모형의 반복 계산은 13회에서 멈추었고 시스템 가용도의 근사값은  $Av(NF)^* = p^*(11) + p^*(10) = 0.73474$ 이고 이 값은 수식에 의한  $Av(NF) = 0.73469$ 와 거의 유사하다. SQ 모형에 대한 반복 계산 근사값은 14회에서 얻어졌다. SQ 모형의 시스템 가용도 근사값과 수식에 의한 값은 각각  $Av(SQ)^* = p^*(11) + p^*(10) = 0.72661$ ,  $Av(SQ) = 0.72661$ 이며 일치하는 결과이다. 조합 3의 결과에서도  $Av > Av(NF)^* > Av(SQ)^*$  관계를 확인할 수 있다.

#### 4. 결론

이 논문에서는 마코프 과정의 정상확률을 수치적으로 구하는 방법으로 제안된 내재 마코프 체인을 이용한 반복 계산법의 정확성을 확인하는 연구를 수행하였다. 반복 계산을 통하여 마코프 과정의 정상확률을 구하는 방법은 수렴 속도를 개선하기 위하여 제안된 방법으로 이론적인 수렴성을 가지는데 수렴 속도와 정확성을 실증적으로 확인할 필요가 있다. 수리가능한 시스템의 신뢰도 척도인 가용도를 구하는 문제를 이용하여 내재 마코프 체인 방법의 성능을 검토하였다. 고장감지장치를 고려하는 신뢰도 시스템에 대하여 복잡하지만 수식적 형태의 해석 해를 가지는 두 가지 수리정책의 NF, SQ 마코프 모형을 고려하였다. 시스템 모수의 적절한 조합을 가정하고 두 수리정책의 모형에 대하여 반복 계산법을 적용하여 확률의 수렴 과정을 정리하고 결과를 분석하였다. 수렴으로 반복을 중지할 때까지 걸리는 회수는 최대 14회로 빠른 수렴을 확인할 수 있었다. 그리고 반복 계산법에 의한 시스템 가용도의 수치 해가 수식에 의한 해석 해와 거의 일치하는 것을 통하여 반복 계산법의 정확성을 확인하였다.

본 연구를 통하여 내재 마코프 체인의 정상확률을 반복법으로 계산하고 이를 이용하여 연속 시간 시스템의 정상확률을 구하는 방법의 효율성을 확인할 수 있다. 특히 현실적인 모형에 적용하여 성공적인 결과를 낼 수 있음을 확인하여 다양한 현실 문제에 적용 가능하리라 기대된다. 실제 시스템을 마코프 과정으로 모형화한다면 다양한 분석이 가능할 수 있다. 정상확률의 이론적인 해석 해를 구하는 것이 가장 좋은 시나리오겠지만 시스템의 복잡도가 증가하면 해석 해의 유도가 어려워진다. 이때 균형방정식을 이용할 수 있는 상황에서는

반복 계산법을 통한 수치 해의 유도가 좋은 대안이 될 수 있다. 신뢰도 시스템 또는 통신 시스템의 성능 분석에서 현실 세계의 다양한 특성을 반영한 마코프 모형을 고려한다면 모형의 복잡성으로 인하여 해석적인 결과를 얻기 어려운 경우가 많을 것이다. 향후 신뢰도 또는 통신 시스템의 다양한 분석을 위하여 본 논문에서 효율성을 검토한 반복 계산에 의한 수치적 방법론을 유용한 도구로 활용하고자 한다.

## References

- Na S (2011). Reliability analysis of repairable systems considering failure detection equipments, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **24**, 515–521.
- Na S (2014). Numerical iteration for stationary probabilities of Markov chains, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **21**, 513–520.
- Na S and Bang S (2013). The effect of failure detection equipment on system reliability, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **26**, 111–118.
- Na S and Bang S (2022). Repair policies of failure detection equipments and system availability, *Communications for Statistical Applications and Methods*, **29**, 151–160.
- Nesterov Y and Nemirovski A (2015). Finding the stationary states of Markov chains by iterative methods, *Applied Mathematics and Computation*, **255**, 58–65.
- O’Leary DP (1993). Iterative methods for finding the stationary vector for Markov chains, In Linear Algebra, Markov Chains, and Queueing Models (Meyer CD and Plemmons RJ (Eds)), *The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications*, **48**, (pp.125–136), Springer, New York.
- Ross SM (1996). *Stochastic Processes* (2nd ed), Wiley, New York.
- Stewart WJ (2000). Numerical methods for computing stationary distributions of finite irreducible Markov chains, In Computational Probability (Grassmann WK (Eds)), *International Series in Operations Research and Management Science*, **24**, (pp. 81–111), Springer, New York.
- Zhao D, Li H, and Su D (2012). A numerical algorithm on the computation of the stationary distribution of a discrete time homogeneous finite Markov chain, *Mathematical Problems in Engineering*, **2012**, 1–10.

Received February 06, 2024; Revised April 08, 2024; Accepted April 11, 2024



# 신뢰도 모형을 이용한 마코프 과정의 수치적 반복법의 정확성에 대한 연구

박현아<sup>a</sup>, 나성룡<sup>1,a</sup>

<sup>a</sup>연세대학교 데이터사이언스학부

---

## 요 약

해석적 형태의 정상확률을 얻기 어려운 마코프 과정에 대하여 행렬 연산 방법 또는 반복 계산 방법 등의 수치적 방법을 이용한 근사 해를 고려할 수 있다. 이 논문에서는 마코프 체인 또는 마코프 과정의 정상확률을 계산하는 수치적 반복 공식의 정확성을 규명하는 연구를 수행한다. 특별히 시스템 가용도를 위한 마코프 모형을 이용하여 수치적 방법의 수렴과 정확성을 검토한다. 수치적 계산에 의한 시스템 가용도와 복잡하지만 해석적 수식에 의한 시스템 가용도를 비교한다. 그리고 수치적 해의 수렴에 필요한 반복 회수를 조사한다. 이 연구를 통하여 수치적 반복 계산 방법의 정확성과 유용성을 확인할 수 있다.

주요용어: 마코프 과정, 정상확률, 수치적 반복법, 시스템 가용도, 극한확률

---